5. *Gapeev P.V., Peskir G.* The Wiener disorder problem with finite horizon // Stochast. Process. and Appl. 2006. **116**, N 12. 1770–1791.
6. *Shiryaev A.N.* A remark on the quickest detection problems // Statistics and Decisions. 2004. **22**. 79–82.
7. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
8. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: Фазис, 1998, 2004.
9. *Ширяев А.Н.* Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. М.: ФМОП МЦНМО, 2011.
10. *Peskir G.* A-change-of-variable formula with local time on curves // J. Theor. Probab. 2005. **18**, N 3. 499–535.
11. *Yor M.* On some exponential functionals of Brownian motion // Adv. Appl. Probab. 1992. **24**. 509–531.

Поступила в редакцию
14.03.2012

УДК 517.925+531.01

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

М. В. Шамолин[1]

В работе сообщается о результатах по исследованию уравнений движения динамически симметричного четырехмерного твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Вид поля заимствован из динамики реальных двумерных и трехмерных твердых тел, взаимодействующих со средой, когда в системе присутствует неконсервативная пара сил, заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно. Получен случай интегрируемости динамических уравнений движения тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерное пространство, при наличии некоторой следящей силы.

Ключевые слова: четырехмерное твердое тело, динамические уравнения, трансцендентная интегрируемость.

The paper presents the results of study of the motion equations for a dynamically symmetric 4D-rigid body placed in a certain non-conservative field of forces. The form of the field is taken from the dynamics of actual 2D- and 3D-rigid bodies interacting with the medium in the case when the system contains a non-conservative pair of forces forcing the center of mass of a body to move rectilinearly and uniformly. A new case of integrability is obtained for dynamic equations of body motion in a resisting medium filling a four-dimensional space under presence of a tracking force.

Key words: 4D-rigid body, dynamic equations, integrability in terms of transcendental functions.

1. Четырехмерное тело в неконсервативном поле. Пусть четырехмерное твердое тело Θ массой m с гладкой трехмерной границей $\partial\Theta$ движется в среде, заполняющей четырехмерную область евклидова пространства. При этом тензор инерции тела в некоторой связанной системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ имеет вид $\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}$ (так называемый случай (1–3)). Расстояние от точки N приложения неконсервативной силы $\mathbf{S}$ до точки D является функцией по крайней мере некоторого угла α между вектором $\mathbf{v}_D$ и осью симметрии тела Dx_1: $DN = R_1(\alpha, \ldots)$ (ср. с [1–3]). Сила $\mathbf{S}$ имеет величину

$$S = s(\alpha)\mathrm{sgn}\cos\alpha \cdot v^2, \ |\mathbf{v}_D| = v,$$

где s — некоторая функция, характеризующая в системе как рассеяние, так и подкачку энергии [1, 2]. При этом функцию s определим следующим образом: $s = s(\alpha) = B\cos\alpha$; $B > 0$.

2. Динамические уравнения. Пусть Ω — тензор угловой скорости тела Θ, $\Omega \in \mathrm{so}(4)$. Его будем представлять в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

[1] *Шамолин Максим Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. НИИ механики МГУ; e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru.

где $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на естественные координаты в алгебре Ли so(4) кососимметрических матриц. Тогда часть уравнений движения, отвечающая алгебре so(4), имеет вид [2]

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{2}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\},\ \lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2, \ldots,\ \lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2,$$

M — момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbf{R}^4$, который спроектирован на естественные координаты в алгебре so(4); $[\ldots, \ldots]$ — коммутатор в so(4).

Очевидно, выполнены следующие равенства: $\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i$ для любых $i, j = 1, \ldots, 4$.

При вычислении момента M внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathrm{so}(4),$$

переводящее упорядоченную пару векторов $(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры Ли so(4), где $\mathbf{DN} = \{x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}\}$, $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ — внешняя сила, действующая на тело. При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} x_{1N} & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда правая часть системы (2) будет соответствовать

$$M = \{x_{3N}F_4 - x_{4N}F_3, x_{4N}F_2 - x_{2N}F_4, x_{1N}F_4 - x_{4N}F_1, x_{2N}F_3 - x_{3N}F_2, x_{3N}F_1 - x_{1N}F_3, x_{1N}F_2 - x_{2N}F_1\},$$

и 6 компонент момента M строятся в алгебре Ли so(4) по правилу (1).

Уравнение движения центра масс C тела Θ представится в виде

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{3}$$

где $\mathbf{w}_C$ — ускорение точки C, и по многомерной формуле Ривальса

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC},\ \mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega\mathbf{v}_D,\ E = \dot{\Omega},$$

здесь $\mathbf{F}$ — внешняя сила (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$), E — тензор углового ускорения [1, 2].

3. Более широкий класс задач. Нам необходимо несколько расширить задачу, а именно по прямой $Dx_1 = DC$ действует следящая сила $\mathbf{T}$, введение которой используется для рассмотрения интересующих нас классов движений. Таким образом, порядок динамической системы может быть понижен (см. также [1]). В настоящей работе изучен такой класс движения, когда центр масс тела движется прямолинейно и равномерно (т.е. на тело действует пара сил $(\mathbf{T}, \mathbf{S})$, $\mathbf{T} = -\mathbf{S}$).

Если $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ — координаты точки N в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, $\{-S, 0, 0, 0\}$ — координаты вектора $\mathbf{S}$, то момент силы при проектировании в алгебру so(4) имеет вид

$$\{0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S\} \in \mathbf{R}^6 \cong M \in \mathrm{so}(4).$$

При этом если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — обобщенные сферические координаты в $\mathbf{R}^4$, то примем разложения

$$\begin{gathered} x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1 - h\omega_6/v, \\ x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2 + h\omega_5/v, \\ x_{4N} = R(\alpha)\sin\beta_1\sin\beta_2 - h\omega_3/v,\ R(\alpha) = A\sin\alpha,\ A, h > 0. \end{gathered}$$

С учетом вышеизложенного уравнение (2) можно расписать в виде

$$\begin{aligned} (\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) &= 0, \\ (\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) &= 0, \\ (\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) &= x_{4N}S, \\ (\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) &= 0, \\ (\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) &= -x_{3N}S, \\ (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) &= x_{2N}S. \end{aligned} \tag{4}$$

4. Циклические интегралы. Очевидно, что существуют три циклических первых интеграла у уравнений (4):

$$\omega_1 = \omega_1^0, \omega_2 = \omega_2^0, \omega_4 = \omega_4^0,$$

при этом считаем, что $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0$. В результате этого оставшиеся уравнения в алгебре Ли so(4) примут следующий вид (здесь $n_0^2 = AB/2I_2$):

$$\dot\omega_3 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - hB\omega_3 v\cos\alpha/2I_2,$$

$$\dot\omega_5 = -n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - hB\omega_5 v\cos\alpha/2I_2,$$

$$\dot\omega_6 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1 - hB\omega_6 v\cos\alpha/2I_2.$$

5. Динамическая система на касательном расслоении к трехмерной сфере. Замена угловых скоростей

$$z_1 = \omega_3\cos\beta_2 + \omega_5\sin\beta_2,$$

$$z_2 = -\omega_3\sin\beta_2\cos\beta_1 + \omega_5\cos\beta_2\cos\beta_1 + \omega_6\sin\beta_1,$$

$$z_3 = \omega_3\sin\beta_2\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_2\sin\beta_1 + \omega_6\cos\beta_1$$

после учета условий, понижающих порядок совместной системы динамических уравнений (2), (3), позволяет рассматривать редуцированные уравнения движения на касательном расслоении $T\mathbb{S}^3$ трехмерной сферы ($\sigma = DC,\ b = \sigma n_0,\ H_1 = hB/2I_2n_0,\ [b] = [H_1] = 1,\ n_0^2 = AB/2I_2$)

$$\dot v = \sigma\cos\alpha[n_0^2v^2\sin^2\alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^3)] - bH_1vz_3\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\left.\begin{aligned}\dot\alpha &= -z_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha\cos^2\alpha + \sigma\sin\alpha(z_1^2 + z_2^2 + z_3^3)/v - bH_1z_3\cos^2\alpha,\\ \dot z_3 &= n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)(z_1^2 + z_2^2)\mathrm{ctg}\alpha - H_1vz_3\cos\alpha,\\ \dot z_2 &= (1 + bH_1)z_2z_3\,\mathrm{ctg}\,\alpha + (1 + bH_1)z_1^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta_1 - H_1vz_2\cos\alpha,\\ \dot z_1 &= (1 + bH_1)z_1z_3\,\mathrm{ctg}\,\alpha - (1 + bH_1)z_1z_2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta_1 - H_1vz_1\cos\alpha,\\ \dot\beta_1 &= (1 + bH_1)z_2\,\mathrm{ctg}\,\alpha,\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\dot\beta_2 = -(1 + bH_1)z_1\,\mathrm{ctg}\,\alpha\csc\beta_1.$$

6. Понижение порядка. В системе седьмого порядка появилась независимая подсистема шестого порядка, в которой отделяется независимая подсистема пятого порядка (5). Для полного интегрирования необходимо знать, вообще говоря, шесть независимых первых интегралов. Однако после замен переменных и введения нового дифференцирования $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2},\ z_* = z_2/z_1,\ z = n_0vZ,\ z_k = n_0vZ_k,\ k = 1,2,3,\ z_* = Z_*,\ <\cdot>\mapsto\ n_0v <'>$, система седьмого порядка приводится к виду

$$v' = v\Psi(\alpha, Z, Z_3),\ \ \Psi(\alpha, Z, Z_3) = b\cos\alpha[\sin^2\alpha - (Z^2 + Z_3^2)] - bH_1Z_3\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha' &= -Z_3 + b\sin\alpha\cos^2\alpha + b\sin\alpha(Z^2 + Z_3^2) - bH_1Z_3\cos^2\alpha,\\ Z_3' &= \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)Z^2\mathrm{ctg}\alpha - Z_3\Psi(\alpha, Z, Z_3) - H_1Z_3\cos\alpha,\\ Z' &= (1 + bH_1)ZZ_3\mathrm{ctg}\alpha - Z\Psi(\alpha, Z, Z_3) - H_1Z\cos\alpha,\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}Z_*' &= \pm(1 + bH_1)Z\sqrt{1 + Z_*^2}\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta_1,\\ \beta_1' &= \pm(1 + bH_1)\frac{ZZ_*}{\sqrt{1 + Z_*^2}}\mathrm{ctg}\alpha,\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\beta_2' = \mp(1 + bH_1)\frac{Z_1}{\sqrt{1 + Z_*^2}}\mathrm{ctg}\alpha\csc\beta_1.$$

Видно, что система пятого порядка (5) распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (6) — третьего, а система (7) (после замены независимого переменного) — второго. Поэтому для полной интегрируемости достаточно указать два независимых интеграла системы (6), один системы (7) и два дополнительных интеграла, "привязывающие" оставшиеся уравнения (т.е. всего пять). При этом заметим, что систему (6) можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbb{S}^2$ двумерной сферы.

7. Список первых интегралов. Полная система седьмого порядка обладает аналитическим первым интегралом вида

$$v^2(1 - 2bZ_3 \sin\alpha + (Z^2 + Z_3^2)) = V_C^2,$$

поскольку центр масс движется прямолинейно и равномерно.

Система (6) принадлежит к классу систем, возникающих в динамике трехмерного твердого тела, и обладает двумя независимыми первыми интегралами, которые являются трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций (ср. с [1–3])

$$\frac{(1 + bH_1)Z_3^2 + (1 + bH_1)Z^2 - (b + H_1)Z_3 \sin\alpha + \sin^2\alpha}{Z \sin\alpha} = C_1 = \text{const},$$

$$G\left(\frac{Z}{\sin\alpha}, \frac{Z_3}{\sin\alpha}, \sin\alpha\right) = C_2 = \text{const}$$

(функция G имеет достаточно громоздкий вид, но также выражается через конечную комбинацию элементарных функций).

Система (7) имеет первый интеграл

$$\frac{\sqrt{1 + Z_*^2}}{\sin\beta_1} = C_3 = \text{const}.$$

В свою очередь дополнительный первый интеграл, позволяющий определить величину β_2, имеет вид

$$\operatorname{arctg}\frac{C_3 Z_*}{\sqrt{C_3^2 - 1 - Z_*^2}} \pm \beta_2 = C_4, \quad C_4 = \text{const}.$$

8. Заключение. Ранее в основном рассматривались лишь такие движения четырехмерного тела, когда $M \equiv 0$ (или имеется ненулевой момент консервативной силы, см. работы О. И. Богоявленского [4, 5], А. П. Веселова [6, 7], С. В. Манакова [8] и многих других авторов). Настоящая работа развивает направление в исследовании уравнений движения твердого тела на $\mathrm{so}(4) \times \mathbb{R}^4$ при наличии момента неконсервативной внешней силы.

Методика интегрирования рассматриваемых динамических систем часто может быть распространена и на пространство $\mathrm{so}(n) \times \mathbb{R}^n$ произвольного динамически симметричного n-мерного твердого тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12–01–00020-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.
2. *Шамолин М.В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Докл. РАН. 2000. **375**, № 3. 343–346.
3. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. **53**, вып. 3. 209–210.
4. *Богоявленский О.И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // Докл. АН СССР. 1986. **287**, № 5. 1105–1108.
5. *Богоявленский О.И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // Докл. АН СССР. 1983. **272**, № 6. 1364–1367.
6. *Веселов А.П.* Уравнение Ландау–Лифшица и интегрируемые системы классической механики // Докл. АН СССР. 1983. **270**, № 5. 1094–1097.
7. *Веселов А.П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на so(4) // Докл. АН СССР. 1983. **270**, № 6. 1298–1300.
8. *Манаков С.В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела // Функц. анализ и его прил. 1976. **10**, № 4. 93–94.

Поступила в редакцию
28.03.2011
После доработки
23.09.2014