ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2015, том 461, № 5, с. 533–536

МЕХАНИКА

УДК 531.01+531.552

ПОЛНЫЙ СПИСОК ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ

© 2015 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 13.10.2014 г.

Поступило 14.10.2014 г.

DOI: 10.7868/S0869565215110092

При построении неконсервативного силового поля в динамике многомерного твердого тела естественно опираться на результаты, взятые из динамики реальных твердых тел, находящихся, например, в поле силы сопротивления среды. Тогда становится возможным обобщение динамической части уравнений на случай движения тела многомерного в аналогично построенном поле сил и получение полного списка, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного момента, поскольку ранее другими авторами использовалось лишь поле сил потенциальное (см., например, [1–3]).

В [4, 5] показана интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде, когда у системы динамических уравнений был найден в явном виде первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле комплексного анализа) функцией квазискоростей. При этом все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности, которая имеет форму (одномерной) пластины. Затем [5, 6] задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений был найден в явном виде полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части его поверхности, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. В дальнейшем [7–9] была исследована динамическая часть уравнений движения четырехмерных твердых тел различных типов динамической симметрии, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску.

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
E-mail: shamolin@imec.msu.ru

УРАВНЕНИЯ НА АЛГЕБРЕ ЛИ so(n)

Рассмотрим движение однородного твердого тела массы m, частью поверхности которого является $(n-1)$-мерный диск, находящийся в некотором неконсервативном поле силы $\mathbf{S}$, с динамической симметрией следующего вида:

$$I_1,\ I_2 = \ldots = I_n. \tag{1}$$

Здесь $I_1, \ldots, I_n$ – главные моменты инерции тела в некоторой связанной с ним системе координат $Dx_1 \ldots x_n$, при этом $CD = Dx_1$ (C – центр масс, D – центр диска), а оси $Dx_2, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска. Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ – сферические (обобщенные) координаты вектора скорости $\mathbf{v}_D$ центра D диска такие, что α – угол между вектором $\mathbf{v}_D$ и прямой Dx_1.

Пусть $\mathbf{S} = \{-S, \ldots, 0\}$ в системе $Dx_1 \ldots x_n$, при этом $S = s_1(\alpha)v^2$, $v = |\mathbf{v}_D|$, $s_1 \geq 0$, $s_1(\alpha) = s(\alpha)\operatorname{sign}\cos\alpha$. Если Ω – тензор угловой скорости твердого тела, $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, то та часть уравнений движения тела, которая отвечает алгебре Ли so(n), размерность которой равна $\frac{1}{2}n(n-1)$, имеет следующий вид [9–12]:

$$\Omega^{\bullet}\Lambda + \Lambda\Omega^{\bullet} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{2}$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-I_1 + I_2 + \ldots + I_n)$, ..., $\lambda_n = \frac{1}{2}(I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n)$, M – момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbf{R}^n$, спроектированный на “естественные” координаты в алгебре Ли so(n), $[\ldots]$ – коммутатор в so(n). Так, например, элемент $\Omega \in \mathrm{so}(n)$ при $n = 5$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_{10}$ – компоненты “угловой скорости” в проекциях на естественные координаты в алгебре Ли so(5).

Если $N = (0, x_{2N}, \ldots, x_{nN})$ в системе $Dx_1 \ldots x_n$, то при вычислении момента силы **S** строится отображение

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathrm{so}(n), \qquad (3)$$

переводящее пару векторов из $\mathbf{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли so(n). Так, например, при $n = 5$ в проекциях на алгебру Ли so(5) момент силы сопротивления имеет следующий вид (ср. с [11, 12]):

$$(0, 0, 0, -x_{5N}s(\alpha)v^2, 0, 0, x_{4N}s(\alpha)v^2,$$
$$0, -x_{3N}s(\alpha)v^2, x_{2N}s(\alpha)v^2) \in \mathbf{R}^{10} \cong M \in \mathrm{so}(5),$$

при этом в общем случае элемент M будет иметь $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ нулевых компонент, поскольку вспомогательная матрица для построения отображения (3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -S & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

и именно $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ ее миноров второго порядка со знаком, которые и определяют элемент M, тождественно равны нулю.

Уравнения (2) можно переписать в виде системы $\frac{1}{2}n(n-1)$ уравнений. Так, в частности, при $n = 5$ система на алгебре Ли so(5) примет вид

$$\begin{aligned}
&(\lambda_4 + \lambda_5)\dot\omega_1 + (\lambda_4 - \lambda_5)(\omega_4\omega_7 + \omega_3\omega_6 + \omega_2\omega_5) = 0,\\
&(\lambda_3 + \lambda_5)\dot\omega_2 + (\lambda_5 - \lambda_3)(\omega_1\omega_5 - \omega_3\omega_8 - \omega_4\omega_9) = 0,\\
&(\lambda_2 + \lambda_5)\dot\omega_3 + (\lambda_2 - \lambda_5)(\omega_4\omega_{10} - \omega_2\omega_8 - \omega_1\omega_6) = 0,\\
&(\lambda_1 + \lambda_5)\dot\omega_4 + (\lambda_5 - \lambda_1)(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) = -x_{5N}S,\\
&(\lambda_3 + \lambda_4)\dot\omega_5 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_7\omega_9 + \omega_6\omega_8 + \omega_1\omega_2) = 0,\\
&(\lambda_2 + \lambda_4)\dot\omega_6 + (\lambda_4 - \lambda_2)(\omega_5\omega_8 - \omega_7\omega_{10} - \omega_1\omega_3) = 0,\\
&(\lambda_1 + \lambda_4)\dot\omega_7 + (\lambda_1 - \lambda_4)(\omega_1\omega_4 - \omega_6\omega_{10} - \omega_5\omega_9) = x_{4N}S,\\
&(\lambda_2 + \lambda_3)\dot\omega_8 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_9\omega_{10} + \omega_5\omega_6 + \omega_2\omega_3) = 0,\\
&(\lambda_1 + \lambda_3)\dot\omega_9 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) = -x_{3N}S,\\
&(\lambda_1 + \lambda_2)\dot\omega_{10} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_8\omega_9 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) = x_{2N}S.
\end{aligned} \qquad (4)$$

ДИНАМИКА В $\mathbf{R}^n$ И ОТДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЙ

По аналогии с трехмерным случаем можно вывести формулы, аналогичные формулам Эйлера и Ривальса, а именно, скорости и ускорения любых двух точек A и B многомерного твердого тела в любой декартовой системе координат связаны соотношениями

$$v_B = v_A + \Omega AB, \quad w_B = w_A + \Omega^2 AB + \mathrm{E}AB, \qquad (5)$$

где $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, $\mathrm{E} = \Omega^\bullet \in \mathrm{so}(n)$. Тензор Е называется тензором углового ускорения [9].

Таким образом, уравнение движения центра масс в $\mathbf{R}^n$ запишется при помощи (5) уравнением Ньютона:

$$m\mathbf{w}_C = \mathrm{F}. \qquad (6)$$

Если правые части уравнений (2), (6) зависят лишь от квазискоростей в системе (т.е. от величин v, α, β_1, ..., β_{n-2}, а также компонент тензора $\Omega \in \mathrm{so}(n)$), то эти уравнения определяют замкнутую динамическую часть системы уравнений движения многомерного твердого тела на so(n) × $\mathbf{R}^n$, которая имеет порядок $\frac{1}{2}(n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

ДВИЖЕНИЕ В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ И РЕДУКЦИИ В СИСТЕМЕ

Рассмотрим такой класс движений тела, при котором во все время центр масс C тела движется прямолинейно и равномерно, т.е. выполнено условие (см. также [4, 5, 9])

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{const}. \qquad (7)$$

Для достижения этого предположим, что по прямой $CD = Dx_1$ на тело действует некоторая следящая сила $\mathbf{T} = -\mathbf{S}$, обеспечивающая выполнение условия (7) (ср. с маломерными случаями [9]). Таким образом, на тело действует пара сил, и выполнение условия (7) может быть достигнуто.

Поскольку выполнены равенства (1), то существуют $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ циклических первых интегралов у уравнений (2):

$$\omega_{k_1} = \omega_{k_1}^0, \ldots, \omega_{k_s} = \omega_{k_s}^0, \qquad (8)$$

где $s = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. При этом $k_1 = 1, \ldots, k_s$ – некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W = \left\{1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n(n-1)\right\}$. Рассмотрим набор (8) первых интегралов на своих нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = 0, \ldots, \omega_{k_s}^0 = 0. \qquad (9)$$

В частности, при $n = 5$ у системы (4) имеются шесть таких первых интегралов: $\omega_1 = \omega_1^0$, $\omega_2 = \omega_2^0$, $\omega_3 = \omega_3^0$, $\omega_5 = \omega_5^0$, $\omega_6 = \omega_6^0$, $\omega_8 = \omega_8^0$, рассматриваемых на нулевых уровнях: $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0$. Ненулевых компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось

$$p = \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = n-1$$

(здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества W, не равных $k_1, \ldots, k_s$).

При выполнении условий (7)–(9) порядок общей системы (2), (6) опускается до $2(n-1)+1$. Если правые части уравнений (2), (6) зависят лишь от квазискоростей в системе, то справедлива

Теорема 1. *Система* (2), (6) *при выполнении условий* (7)–(9) *редуцируется к динамической системе на прямом произведении числового луча* $\mathbf{R}_+^1\{v\}$ *на касательное расслоение* $T_*\mathbf{S}^{n-1}$ $(n-1)$*-мерной сферы* $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ МОМЕНТ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ СИЛЫ

Выберем функции $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ в следующем виде (гиперплоскость диска задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ \ldots \\ x_{nN} \end{pmatrix} = R(\alpha) i_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}),\ i_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = = i_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right), \quad (10)$$

(ср. со случаями меньшей размерности [9]). При этом следует учесть, что если $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — сферические (обобщенные) координаты в $\mathbf{R}^n$, то

$$i_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Для построения силового поля используется пара функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. По аналогии с маломерными случаями без ограничения общности можно считать, что

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A > 0, \quad s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad B > 0 \quad (11)$$

(функции типа Чаплыгина [13]).

ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

Преобразуем далее набор фазовых переменных $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2n-1}(-\beta_1) \circ T_{n-3n-2}(-\beta_2) \circ \ldots \circ T_{12}(-\beta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix},$$

где матрица $T_{kk+1}(\beta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка M_{kk+1}:

$$T_{kk+1}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{kk+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{kk+1} = \begin{pmatrix} m_{kk} & m_{kk+1} \\ m_{k+1k} & m_{k+1k+1} \end{pmatrix},$$

$$m_{kk} = m_{k+1k+1} = \cos\beta, \quad m_{k+1k} = -m_{kk+1} = \sin\beta.$$

Введем следующие безразмерные переменные, параметры и дифференцирование:

$$w_1 = \frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}}, \ldots, w_{n-4} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}},\ w_{n-3} = \frac{z_2}{z_1},$$

$$w_{n-2} = \frac{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}}{n_0 v}, \quad w_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{n_0 v}, \quad (12)$$

$$n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2},\ b = \sigma n_0,\ \sigma = CD,\ n_0 v\langle\,'\,\rangle = \langle\,^{\bullet}\,\rangle.$$

В результате совместные уравнения (2), (6) при условиях (7)–(11) примут следующий вид:

$$v' = \cos\alpha[\sin^2\alpha - (w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)], \quad (13)$$

$$\alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha,$$

$$w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \quad (14)$$

$$w'_{n-2} = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + + bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

$$w'_k = d_k\frac{1 + w_k^2}{w_k}\frac{\cos\beta_k}{\sin\beta_k}, \quad \beta'_k = d_k, \quad k = 1, \ldots, n-3, \quad (15)$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \quad (16)$$

где $Z_1(w_1, \ldots, w_{n-1}) = z_1$ в силу замены (12), d_k, $k = 1, \ldots, n-3$, — некоторые гладкие функции на своей области определения.

Видно, что в системе (13)–(16) порядка $2(n-1)+1$ выделяется независимая подсистема (14)–(16) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом сама система (14)–(16) распадается на совокупность независимых подсистем: система (14) — третьего порядка, системы (15) (их $n-3$ после замены независимого переменного) — второго, при этом, в свою очередь, система (14), (15) — независимая подсистема порядка $2n - 3$ (уравнение на угол β_{n-2} (16) отделяется).

Для полного интегрирования системы (13)–(16) порядка $2(n-1)+1$ достаточно знать, вообще говоря, $2(n-1)$ независимых первых интегралов. Но после введения новых переменных и дифференцирования (12) в силу имеющихся симметрий для интегрирования системы (13)–(16) достаточно знать два независимых первых интеграла системы (14), $n - 3$ независимых первых интеграла совокупности систем (15), а также два инвариантных соотношения, "привязывающих" уравнения (13) и (16) (т.е. всего $n + 1$).

ПОЛНЫЙ СПИСОК ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Полная система (13)–(16) является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним. Тем не менее она обладает аналитическим первым интегралом вида

$$v^2(1 - 2bw_{n-1}\sin\alpha + (w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)) = V_C^2, \qquad (17)$$

поскольку выполнено свойство (7). Последнее инвариантное соотношение позволяет определить величину v.

Система (14) обладает двумя независимыми первыми интегралами, которые являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных (в смысле определений комплексного анализа) и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций (ср. с [5, 9]).

Один из трансцендентных первых интегралов системы (14) имеет вид

$$\frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \qquad (18)$$

Второй трансцендентный интеграл системы (14) достаточно громоздко выражается через конечную комбинацию элементарных функций и имеет следующий структурный вид:

$$G\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \qquad (19)$$

Далее, распавшаяся система (15) имеет $n - 3$ независимых первых интеграла

$$\frac{\sqrt{1 + w_k^2}}{\sin\beta_k} = C_{k+2} = \text{const}, \quad k = 1, \ldots, n-3. \qquad (20)$$

А первый интеграл, "привязывающий" уравнение (16) на угол β_{n-2}, найдем из уравнения

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}} = -\frac{1}{w_{n-3}\sin\beta_{n-3}},$$

при этом, используя первые интегралы (20) при $k = n - 3$, $n - 4$, окончательно получим его вид:

$$\operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} \pm \beta_{n-2} = C_n = \text{const}. \qquad (21)$$

Т е о р е м а 2 (основная). *Динамическая часть* (2), (6) *уравнений движения n-мерного твердого тела при условиях* (1), (7)–(12) *обладает полным списком первых интегралов,* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ *из которых* ((8), (17)) *являются аналитическими функциями, а остальные n* ((18)–(21)) *— трансцендентными функциями своих переменных (после их формального продолжения в комплексную область), выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

В работах автора [9, 11, 12] уже рассматривались задачи о движении многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы. Данная работа продолжает этот цикл работ по интегрированию многомерного твердого тела в неконсервативном поле, поскольку ранее, как уже указывалось (см., например, [1–3]), рассматривались лишь движения многомерного тела в потенциальном поле сил.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12–01–00020-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Манаков С.В.* // Функцион. анализ и его прил. 1976. Т. 10. № 4. С. 93–94.
2. *Веселов А.П.* // ДАН. 1983. Т. 270. № 6. С. 1298–1300.
3. *Богоявленский О.И.* // ДАН. 1986. Т. 287. № 5. С. 1105–1108.
4. *Шамолин М.В.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 1. С. 52–58.
5. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.
6. *Шамолин М.В.* // ДАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.
7. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.
8. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.
9. *Шамолин М.В.* В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 125. Динамические системы. М., 2013. С. 5–254.
10. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 448 с.
11. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49.
12. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 542–545.
13. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости. В кн.: Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133–135.