

УДК 531.01+531.552

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА  
В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ  
И АНАЛОГИИ С ВИХРЕВЫМИ ДОРОЖКАМИ**

© 2015 г. *М.В. Шамолин*

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова  
shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru

Автор возвращается к построению нелинейной математической модели плоскопараллельного воздействия среды на твердое тело, учитывающей зависимость плеча силы от приведенной угловой скорости тела (типа числа Струхалия). В этом случае сам момент силы воздействия является также функцией угла атаки. Как показала обработка эксперимента о движении в воде однородных круговых цилиндров, эти обстоятельства необходимо учитывать при моделировании. При изучении плоской модели взаимодействия твердого тела со средой найдены новые случаи полной интегрируемости в элементарных функциях, что позволило обнаружить качественные аналогии между движениями тел, свободных в сопротивляющейся среде, и колебаниями тел, частично закрепленных и находящихся в потоке набегающей среды. Проводится сравнение фазовых портретов, полученных при исследовании нелинейной модели воздействия среды, с реальными вихревыми дорожками, полученными Карманом.

Ключевые слова: твердое тело, сопротивляющаяся среда, струйное обтекание, полная интегрируемость.

**RIGID BODY MOTION IN A RESISTING MEDIUM MODELLING  
AND ANALOGUES WITH VORTEX STREETS**

*M.V. Shamolin*

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University

The author returns to construction of nonlinear mathematical model of the planar interaction of a medium to the rigid body was constructed. That model takes into account the dependency of shoulder of force from effective angular velocity of the body (the type of Strouhal number). In this case the moment of force of the interaction itself is also function of the angle of attack. As it has shown for processing the experiment on the motion of the uniform circular cylinders in water, these facts necessary to take into account at modeling. At study of flat model of the interaction of the rigid body with a medium the new cases of full integrability in elementary functions are found that has allowed to find the qualitative analogies between the free moving bodies in a resisting medium and the oscillations of bolted bodies in a jet flow. The comparison of phase patterns obtained under studying of nonlinear model of medium interaction, and the real vortex streets obtained by Karman, is occurred.

Key words: rigid body, resisting medium, jet flow, full integrability.

### Введение

В данной работе систематизируются как уже опубликованные ранее, так и полученные новые результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного двумерного твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твердых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая во все время движения центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил (см. также [1,2]).

Ранее в [3] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

В данной работе полученные новые результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

### 1. Более общая задача о движении со следящей силой

В работе [4] уже рассматривалась модель взаимодействия твердого тела со средой через передний плоский участок. А именно, рассмотрим плоскопараллельное движение симметричного твердого тела с передним плоским торцом (одномерной пластиной) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [3,5]. Если  $(v, \alpha)$  – полярные координаты вектора скорости некоторой характерной точки  $D$  твердого тела ( $D$  – центр пластины),  $\Omega$  – значение его угловой скорости,  $I, m$  – инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [6,7], см. далее), при котором касательные силы воздействия среды на пластину отсутствуют, примет вид

$$\begin{aligned} v^{\bullet} \cos \alpha - \alpha^{\bullet} v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 &= F_x / m, \\ v^{\bullet} \sin \alpha + \alpha^{\bullet} v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \Omega^{\bullet} &= 0, \\ I \Omega^{\bullet} &= y_N (\alpha, \Omega / v) s(\alpha) v^2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$F_x = -S, \quad S = s(\alpha) v^2, \quad \sigma > 0, \quad v > 0.$$

Первые два уравнения (1.1) описывают движение центра масс на двумерной евклидовой плоскости  $E^2$  в проекциях на систему координат  $Dx_1x_2$ , связанную с телом. При этом  $Dx_1$  – срединный перпендикуляр к пластине, проходящий через центр масс  $C$  сим-

метричного тела, а  $Dx_2$  – ось, выбранная вдоль пластины. Третье же уравнение (1.1) получено из теоремы об изменении кинетического момента тела.

Таким образом, фазовым пространством системы (1.1) третьего порядка является прямое произведение  $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \text{so}(2)$  двумерного цилиндра на алгебру Ли  $\text{so}(2)$ .

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ( $\mathbf{V}_C$  – скорость центра масс, см. также [1,2])

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \quad (1.2)$$

то в системе (1.1) вместо  $F_x$  должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0, \quad \sigma = DC.$$

Очевидно, для этого нужно выбрать величину следящей силы  $\mathbf{T}$  в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (1.3)$$

Случай (1.3) выбора величины  $T$  следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы второго порядка после некоторого преобразования системы третьего порядка (1.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину  $T$ :

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = \tau_1(\alpha, \Omega/v)v^2 + \tau_2(\alpha, \Omega/v)\Omega v + \tau_3(\alpha, \Omega/v)\Omega^2 = T_1(\alpha, \Omega/v)v^2.$$

Систему (1.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v^\bullet + \sigma\Omega^2 \cos \alpha - \sigma \sin \alpha \left[ y_N(\alpha, \Omega/v) s(\alpha)v^2 / I \right] &= [T_1(\alpha, \Omega/v)v^2 - s(\alpha)v^2] \cos \alpha / m, \\ \alpha^\bullet v + \Omega v - \sigma \cos \alpha \left[ y_N(\alpha, \Omega/v) s(\alpha)v^2 / I \right] - \sigma\Omega^2 \sin \alpha &= \\ = [-T_1(\alpha, \Omega/v)v^2 + s(\alpha)v^2] \sin \alpha / m, \\ I\Omega^\bullet &= y_N(\alpha, \Omega/v) s(\alpha)v^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Вводя далее новую безразмерную фазовую переменную и дифференцирование по формулам  $\Omega = n_1 v \omega$ ,  $\langle \bullet \rangle = n_1 v \langle ' \rangle$ ,  $n_1 v > 0$ ,  $n_1 v = \text{const}$ , систему (1.4) приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, \omega), \\ \alpha' &= -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin \alpha + \left[ \sigma y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) / I n_1 \right] \cos \alpha - \\ &\quad - [T_1(\alpha, n_1 \omega)v^2 - s(\alpha)v^2] \sin \alpha / m n_1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \omega' = & y_N(\alpha, n_1\omega)s(\alpha) / In_1^2 - \omega [\sigma y_N(\alpha, n_1\omega)s(\alpha) / In_1] \sin \alpha + \\ & + \sigma n_1 \omega^3 \cos \alpha - \omega [T_1(\alpha, n_1\omega)v^2 - s(\alpha)v^2] \cos \alpha / mn_1, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \omega) = & -\sigma n_1 \omega^2 \cos \alpha + [\sigma y_N(\alpha, n_1\omega)s(\alpha) / In_1] \sin \alpha + \\ & + [T_1(\alpha, n_1\omega)v^2 - s(\alpha)v^2] \cos \alpha / mn_1. \end{aligned}$$

Видно, что в системе третьего порядка (1.5), (1.6) может быть выделена независимая подсистема второго порядка (1.6), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем двумерном фазовом цилиндре. В частности, при выполнении условия (1.3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы второго порядка также возможен.

## 2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**2.1. Введение зависимости от угловой скорости и приведенная система.** Данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости. Напомним также, что данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть  $x = (x_{1N}, x_{2N})$  – координаты точки  $N$  приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на одномерную пластину,  $Q = (Q_1, Q_2)$  – компоненты координат точки  $N$  приложения силы  $S$  воздействия среды, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций  $(x_{1N}, x_{2N}) = (x_N, y_N)$  от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори, как уже указывалось выше, не очевидно [8].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R,$$

где  $R = (R_1, R_2)$  – вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции  $R$  от угловой скорости – гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $(h_1, h_2)$  – некоторые положительные параметры (ср. с [2,7]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку  $x_{1N} = x_N \equiv 0$ , то

$$x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1 \Omega / v.$$

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [7]

$$Q_2 = A \sin \alpha, \quad A > 0, \quad (2.1)$$

динамические функции  $s$  и  $y_N$  примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad y_N(\alpha, \Omega / v) = A \sin \alpha - h\Omega / v, \quad A, B, h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \quad (2.2)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости).

Тогда, благодаря условиям (1.2), (2.1), (2.2), преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.5), (1.6)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (2.3)$$

$$\alpha' = -\omega + b\omega^2 \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1\omega \cos^2 \alpha, \quad (2.4)$$

$$\omega' = \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha + bH_1\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1\omega \cos \alpha,$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -b\omega^2 \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - bH_1\omega \sin \alpha \cos \alpha.$$

При этом выбираем, как и выше, безразмерные параметры  $b$ ,  $H_1$  и постоянную  $n_1$  следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = AB / I, \quad H_1 = Bh / In_0, \quad n_1 = n_0.$$

Итак, система (2.3), (2.4) может быть рассмотрена на своем фазовом трехмерном цилиндре

$$W_1 = \mathbf{R}^1_{+\{v\}} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}. \quad (2.5)$$

**2.2. Полный список первых интегралов.** От системы (2.3), (2.4) отделилась независимая система второго порядка (2.4).

Заметим, что в силу (1.2) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.1), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \Omega) = v^2 + \sigma^2 \Omega^2 - 2\sigma \Omega v \sin \alpha = V_C^2 \quad (2.6)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

В силу невырожденной замены независимого переменного (при  $v \neq 0$ ) у системы (2.3), (2.4) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \omega) = v^2(1 + b^2\omega^2 - 2b\omega \sin \alpha) = V_C^2 \quad (2.7)$$

постоянна на ее фазовых траекториях. Равенство (2.7) позволяет, не решая системы (2.3), (2.4), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра пластины) от других фазовых переменных, а именно, при  $V_C \neq 0$  выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2\omega^2 - 2b\omega\sin\alpha}.$$

Поскольку фазовое пространство (2.5) системы (2.3), (2.4) трехмерно, а в нем существуют асимптотические предельные множества, то равенство (2.7) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (2.3), (2.4) во всем фазовом пространстве (ср. с [2, 9]).

Разберем подробнее вопрос существования второго (дополнительного) первого интеграла системы (2.3), (2.4). Ее фазовое пространство расслаивается на поверхности

$$\{(v, \alpha, \omega) \in W_1 : V_C = \text{const}\},$$

динамика на которой определяется с помощью первого интеграла системы (2.4).

Сопоставим отделившейся системе второго порядка (2.4) неавтономное дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau + b\omega[\omega^2 - \tau^2] + H_1\omega[b\omega\tau - 1]}{-\omega + b\tau + b\tau[\omega^2 - \tau^2] - bH_1\omega[1 - \tau^2]}, \quad \tau = \sin\alpha. \quad (2.8)$$

Тогда после замены переменных  $u_1 = \omega - \tau$ ,  $v_1 = \omega + \tau$  уравнение (2.8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & du_1 \left\{ -u_1 \left( 1 + \frac{b}{2} + \frac{bH_1}{2} + \frac{H_1}{2} \right) + v_1 \left( \frac{b}{2} - \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2} \right) \right\} + dv_1 \left\{ bv_1v_1^2 + \frac{bH_1}{4}v_1(v_1^2 - u_1^2) \right\} = \\ & = dv_1 \left\{ u_1 \left( \frac{b}{2} + \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2} \right) + v_1 \left( 1 - \frac{b}{2} - \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2} \right) \right\} + dv_1 \left\{ bv_1u_1^2 + \frac{bH_1}{4}u_1(v_1^2 - u_1^2) \right\}. \quad (2.9) \end{aligned}$$

После использования двух замен  $u_1 = v_1t_1$ ,  $v_1^2 = p_1$ , уравнение (2.9) приведет к уравнению Бернулли:

$$2p_1 \left\{ -A_2t_1 + A_1 + bp_1 \left( t_1 + H_1 \frac{1-t_1^2}{4} \right) \right\} = \frac{dp_1}{dt_1} \{A_3 + bH_1t_1 + A_2t_1^2\}, \quad (2.10)$$

при этом

$$A_1 = \frac{b}{2} - \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2}, \quad A_2 = 1 + \frac{b}{2} + \frac{bH_1}{2} + \frac{H_1}{2} > 0, \quad A_3 = 1 - \frac{b}{2} + \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2}.$$

Уравнение (2.10) заменой  $p_1 = 1/q_1$  легко сводится к линейному неоднородному:

$$q_1' = a_1(t_1)q_1 + a_2(t_1), \quad (2.11)$$

где

$$a_1(t_1) = \frac{2(A_2 t_1 - A_1)}{A_3 + bH_1 t_1 + A_2 t_1^2}, \quad a_2(t_1) = \frac{2b(-t_1 + H_1(t_1^2 - 1)/4)}{A_3 + bH_1 t_1 + A_2 t_1^2}. \quad (2.12)$$

Решение однородной части уравнения (2.11) найдется из равенства

$$q_{\text{одн}}(t_1) = k \exp W(t_1), \quad W(t_1) = 2 \int \frac{(A_2 t_1 - A_1) dt_1}{A_3 + bH_1 t_1 + A_2 t_1^2}. \quad (2.13)$$

При вычислении интеграла (2.13) необходимо рассмотреть три случая.

**I.**  $|b - H_1| < 2$ .

$$W(t_1) = \ln(A_3 + bH_1 t_1 + A_2 t_1^2) - \frac{2(b - bH_1 - H_1)}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \arctan \left\{ \frac{2 + b + bH_1 + H_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} t_1 + \frac{bH_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \right\} + \text{const.} \quad (2.14)$$

**II.**  $|b - H_1| > 2$ .

$$W(t_1) = \ln|A_3 + bH_1 t_1 + A_2 t_1^2| + \frac{b - bH_1 - H_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4} + (2 + b + bH_1 + H_1)t_1 + bH_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4} - (2 + b + bH_1 + H_1)t_1 - bH_1} \right| + \text{const.} \quad (2.15)$$

**III.**  $|b - H_1| = 2$ .

$$W(t_1) = 2 \ln \left| t_1 + \frac{bH_1}{2A_2} \right| + \frac{bH_1 + 2A_1}{A_2} \frac{2A_2}{2A_2 t_1 + bH_1} + \text{const.} \quad (2.16)$$

Теперь можно окончательно выписать общее решение однородного уравнения для каждого из трех случаев:

**I.**  $|b - H_1| < 2$ .

$$q_{\text{одн}}(t_1) = k(A_3 + bH_1 t_1 + A_2 t_1^2) \times \exp \left\{ - \frac{2(b - bH_1 - H_1)}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \arctan \left\{ \frac{2 + b + bH_1 + H_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} t_1 + \frac{bH_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \right\} \right\}. \quad (2.17)$$

**II.**  $|b - H_1| > 2$ .

$$q_{\text{одн}}(t_1) = k(A_3 + bH_1 t_1 + A_2 t_1^2) \times$$

$$\times \left| \frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} + (2+b+bH_1+H_1)t_1 + bH_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4} - (2+b+bH_1+H_1)t_1 - bH_1} \right|^{(b-bH_1-H_1)/(\sqrt{(b-H_1)^2-4})}. \quad (2.18)$$

III.  $|b-H_1|=2$ .

$$q_{1odn}(t_1) = \left( t_1 + \frac{bH_1}{2A_2} \right)^2 \times \exp \left\{ \frac{2(b-H_1)}{(2+b+bH_1+H_1)t_1 + bH_1} \right\}. \quad (2.19)$$

Для поиска решения неоднородного уравнения (2.11), (2.12) находится величина  $k$  как функция  $t_1$ , выражающаяся через конечную комбинацию элементарных функций. Ввиду громоздкости выкладок дальнейшие рассуждения приводятся лишь в случае III.

Таким образом, соответствующие равенства позволяют получить искомый первый интеграл системы (2.4) (а значит, и дополнительный первый интеграл системы (2.3), (2.4)), являющийся трансцендентной функцией своих фазовых переменных и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

В случае III искомый первый интеграл примет вид

$$\exp \left\{ \frac{-2(b-H_1)\sin\alpha}{2(1+bH_1)\omega - (b+H_1)\sin\alpha} \right\} \frac{1-4\omega\sin\alpha+4\omega^2}{(\omega-2\sin\alpha/(b+H_1))^2} = C_1 = \text{const}. \quad (2.20)$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (2.3), (2.4) имеет два инвариантных соотношения – первых интеграла: аналитический вида (2.7), а также трансцендентный первый интеграл, который может быть получен с помощью равенств (2.14)–(2.20).

**Теорема 1.** Система (2.3), (2.4) обладает полным набором первых интегралов, один из которых является аналитической функцией, а второй – трансцендентной функцией фазовых переменных, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь необходимо повторить важное замечание. Дело в том, что с точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

**Следствие 1.** Система (2.4) не обладает простыми и сложными предельными циклами.

Действительно, трансцендентный первый интеграл выражается через конечную комбинацию элементарных функций и имеет существенно особые точки только лишь в точках  $(\pi k, 0)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Если бы у рассматриваемой системы существовали предельные циклы, то трансцендентный первый интеграл не имел бы предела как функция на замкнутых путях [2, 10].



**2.3. Топологические аналогии.** Покажем, что существует еще одна механическая и топологическая аналогия.

Пусть по-прежнему рассматривается задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , проходящей через центр масс. Только на этот раз она обеспечивает во все время движения выполнение равенства ( $v$  – величина скорости центра  $D$  пластины, см. также [2, 3])

$$v \equiv \text{const.} \quad (2.21)$$

Тогда естественно потребовать в системе (1.1) тождественного равенства нулю первого уравнения, при этом величину тяги нужно выбрать соответствующим образом [2, 3].

**Теорема 2.** *Первый интеграл системы (1.1) при условиях (2.21), (2.1), (2.2) (см. также [10, 11]) постоянен на фазовых траекториях системы (2.3), (2.4).*

**Доказательство** проведем для случая  $|b - H_1| = 2$ . Действительно, перепишем первый интеграл (2.20) в следующем виде:

$$\exp \left\{ \frac{-2n_0v(b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\Omega - n_0v(b + H_1) \sin \alpha} \right\} \frac{n_0^2v^2 - 4n_0v\Omega \sin \alpha + 4\Omega^2}{(\Omega - 2n_0v \sin \alpha / (b + H_1))^2} = \text{const.}$$

Видно, что числитель второго множителя пропорционален квадрату скорости центра масс тела  $V_C$  с постоянным коэффициентом. Но, в силу (2.6), данная величина постоянна на траекториях системы (2.3), (2.4). Значит, на них постоянна и функция

$$\exp \left\{ \frac{-2n_0v(b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\Omega - n_0v(b + H_1) \sin \alpha} \right\} \frac{V_C^2}{(\Omega - 2n_0v \sin \alpha / (b + H_1))^2} = \text{const.} \quad (2.22)$$

Возведем далее в степень  $(-1/2)$  равенство (2.22) и заключаем, что следующая функция также постоянна на фазовых траекториях системы (2.3), (2.4):

$$\exp \left\{ \frac{n_0v(b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\Omega - n_0v(b + H_1) \sin \alpha} \right\} (\Omega - 2n_0v \sin \alpha / (b + H_1)) = \text{const.} \quad (2.23)$$

Теперь ясно, что функция (2.23) эквивалентна функции

$$\exp \left\{ \frac{(b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\omega - (b + H_1) \sin \alpha} \right\} \left( \omega - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)} \sin \alpha \right) = \text{const.},$$

которая является первым интегралом системы (1.1) при условиях (2.21), (2.1), (2.2), поскольку в случае **III** выполнено следующее равенство:

$$(b + H_1)^2 = 4(1 + bH_1).$$

Итак, соответствующая аналогия доказана, что и требовалось. ■

Более того, система (1.1) при условиях (2.21), (2.1), (2.2) эквивалентна уравнению плоского маятника, помещенного в поток набегающей среды [2, 12].

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше, но теперь уже в случаях (2.1), (2.2).

1) Движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи (2.21)).

2) Движение закрепленного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).

3) Вращение твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [11–13].

### 3. Строение фазовых портретов на фазовом цилиндре

Для анализа фазовых портретов исследуемой системы (2.4) рассмотрим вспомогательную систему второго порядка на фазовом цилиндре, получающуюся из системы (2.4) формальным приравнением  $H_1 = 0$ :

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\omega + b\omega^2 \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Три типа фазовых портретов системы (3.1) известны (рис. 1–3,  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ) [1, 2]. Более точно, справедливо

**Предложение 1.** Существует величина  $b = b^* < 2$  такая, что при  $b < b^*$  фазовый портрет системы (3.1) ( $\alpha \rightarrow -\alpha$ ) изображен на рис.1; при  $b = b^*$  фазовый портрет системы (3.1) ( $\alpha \rightarrow -\alpha$ ) изображен на рис.2; при  $b > b^*$  фазовый портрет системы (3.1) ( $\alpha \rightarrow -\alpha$ ) изображен на рис.3.

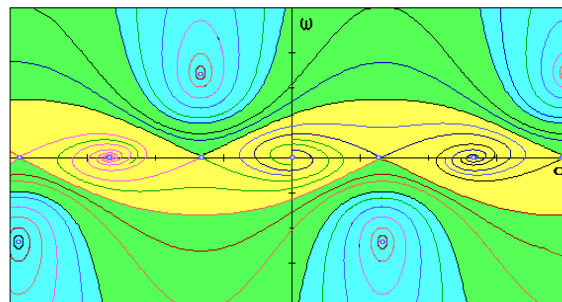


Рис.1.

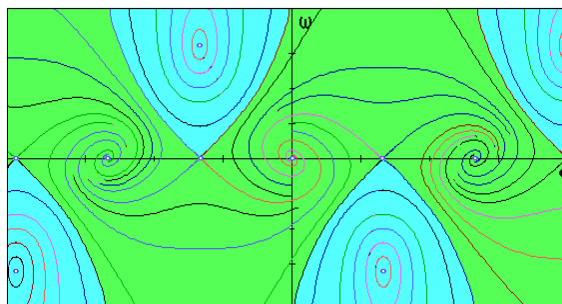


Рис.2.

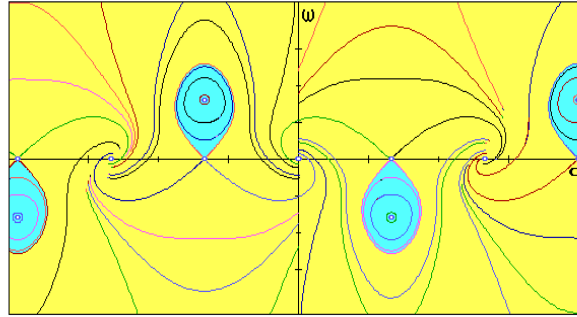


Рис.3.

**3.1. Симметрии в исследуемой системе и ее положения равновесия.** Для начала напомним, что характеристической функцией двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений на евклидовой поверхности, задаваемых векторными полями  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2\}$  и  $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2\}$ , называется кососимметрическая функция

$$\chi = \chi(X, Y) = -\chi(Y, X) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = X_1 Y_2 - X_2 Y_1,$$

которая «отвечает» за синус угла между рассматриваемыми полями. В частности, функция  $\chi$  равна нулю там, где поля касаются (в том числе в точках покоя одной из систем) [14].

Исследование положений равновесия системы (2.4) поможет провести

**Предложение 2.** *Характеристическая функция систем (3.1), (2.4) имеет вид*

$$\chi = \chi((3.76), (3.52)) = H_1 \omega^2 \cos \alpha \{ (b\omega - \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha \}.$$

Видно, что положения равновесия системы (2.4) могут лежать лишь в объединении прямых

$$W_2 = \{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2: \omega \sin \alpha \cos \alpha = 0\},$$

т.е. они совпадают с положениями равновесия системы (3.1).

Действительно, система (2.4) имеет лишь следующие положения равновесия (точки покоя):

$$(0,0); \tag{3.2}$$

$$(\pi,0); \tag{3.3}$$

$$(\pm\pi/2,0); \tag{3.4}$$

$$(\pm\pi/2, \pm 1/b). \tag{3.5}$$

Проведем их классификацию. Характеристические уравнения около точек (3.2)–(3.5) имеют, соответственно, вид

$$\lambda^2 + (H_1 - b)\lambda + 1 = 0,$$

$$\lambda^2 + (b - H_1)\lambda + 1 = 0,$$

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{b^2} = 0.$$

Положения равновесия (3.2) при  $H_1 > b$  ( $H_1 < b$ ) являются притягивающими (отталкивающими), а положения равновесия (3.3) – наоборот (при  $H_1 > b$  ( $H_1 < b$ ) являются отталкивающими (притягивающими)). Так, в частности, на фазовых портретах системы (3.1) ( $\alpha \rightarrow -\alpha$ ) (при  $H_1 = 0$ , рис. 1-3) начало координат – отталкивающая точка, точка  $(\pi, 0)$  – притягивающая. Положения равновесия (3.4) (как и на рис. 1-3,  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ) являются седлами, а возле положений равновесия (3.5) возникает, вообще говоря, проблема центра и фокуса, которая решается в пользу центра благодаря наличию в системе следующих симметрий:

А) центральной симметрии. Такая симметрия возле точек  $(\pi k, 0)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , возникает по причине того, что векторное поле системы (2.4) в координатах  $(\alpha, \omega)$  меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -\omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ \omega \end{pmatrix};$$

В) некоторой зеркальной симметрии (НЗС). Такая симметрия относительно прямых  $\Lambda_i = \{(\alpha, \omega) : \alpha = \pi/2 + \pi i\}$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ , возникает по причине того, что  $\alpha$ -составляющая векторного поля системы в координатах  $(\alpha, \omega)$  сохраняется при замене

$$\begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i - \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i + \alpha \\ \omega \end{pmatrix},$$

$\omega$ -составляющая меняет знак.

Важную роль в построении глобальных фазовых портретов (в частности, при классификации ее положений равновесия) системы вида (2.4) играют предъявленные симметрии. Действительно, как нетрудно видеть, симметрия НЗС «оставляет» положения равновесия (3.5) центрами и в нелинейном случае. К тому же центрально симметричные положения равновесия  $(\pi/2, 0)$  и  $(-\pi/2, 0)$ , а также  $(\pi/2, 1/b)$  и  $(-\pi/2, -1/b)$  объединены вместе (соответственно в случаи (3.4) и (3.5)) по причине наличия центральной симметрии. Более того, положения равновесия (3.2), (3.3) меняют характер устойчивости при изменении знака величины  $H_1 - b$  как раз из-за наличия симметрии НЗС.

**3.2. Эволюция фазовых портретов при изменении параметров.** Получим еще следствия из предложения 2. Будем изменять параметр  $H_1$ , увеличивая его вдоль объединения интервалов  $(0, b) \cup (b, +\infty)$ . В силу следствия 1, у рассматриваемой системы не существует простых и сложных предельных циклов, а поэтому при  $H_1 \in (0, b)$  она допускает фазовые портреты, показанные на рис.1-3 (в зависимости от величины  $|b - H_1|$ ,  $\alpha \rightarrow -\alpha$ , при этом предложение 1 и определяет три возможных случая фазового портрета).

Далее, при увеличении значения  $H_1 \in (b, +\infty)$  положение равновесия  $(0,0)$  становится притягивающим, а положение равновесия  $(\pi,0)$  – отталкивающим. Тогда фазовые портреты для этого случая можно получить из рис.1-3 (в зависимости от величины  $|b - H_1|$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha + \pi$ , при этом предложение 1 по-прежнему определяет три возможных случая фазового портрета).

**Следствие 2.** При  $b = H_1$  положения равновесия  $(\pi i, 0)$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ , являются центрами.

Действительно, если бы данные положения равновесия являлись бы слабыми фокусами (устойчивыми или неустойчивыми), то при достаточно малом значении параметра  $\delta = |b - H_1| > 0$  в окрестности данных положений равновесия существовал бы, по крайней мере, один предельный цикл, родившийся в силу бифуркации рождения цикла из слабого фокуса (бифуркация Пуанкаре-Андропова-Хопфа), что противоречит следствию 2.

**Следствие 3.** При  $b = H_1$  у системы (2.4) в полосах

$$\Pi = \left\{ (\alpha, \omega) : -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right\}$$

или

$$\Pi' = \left\{ (\alpha, \omega) : \frac{\pi}{2} < \alpha < 3\frac{\pi}{2} \right\}$$

реализуется гетероклиническая ситуация (рис.4).

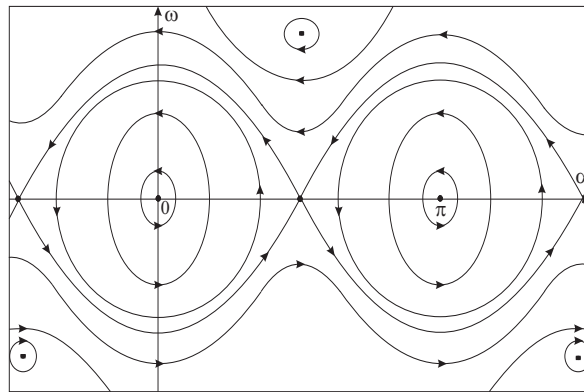


Рис.4.

#### 4. Замечания о возможных автоколебаниях в системе

Достаточно обстоятельно был разобран случай, когда функции воздействия среды представлялись в виде (2.2), т.е. были аналитическими функциями. Но вот только при моделировании воздействия среды на тело функции  $s(\alpha)$  и  $y_N(\alpha, \Omega/\nu) = y(\alpha) - h\Omega/\nu$ , вообще говоря, не представляются в таком аналитическом виде. Более того, для каждой конкретной передней пластины, через которую происходит взаимодействие тела со средой, явный вид пары функций  $s(\alpha)$  и  $y(\alpha)$  не известен, а имеется лишь качественная информация о таких функциях [2–4].

Опорным для нас выше уже являлся результат С.А. Чаплыгина, который для плоскопараллельного струйного обтекания пластины бесконечной длины получил необходимые функции в аналитическом виде (2.2). Этот результат помогает построить функциональные классы  $\{y\}$ ,  $\{s\}$  [2–4]. Они состоят из функций достаточно гладких,  $2\pi$ -периодических ( $y(\alpha)$  – нечетная, а  $s(\alpha)$  – четная), удовлетворяющих следующим условиям:  $y(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi)$ , причем  $y'(0) > 0$ ,  $y'(\pi) < 0$  (класс функций  $\{y\} = Y$ );  $s(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2)$ ,  $s(\alpha) < 0$  при  $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ , причем  $s(0) > 0$ ,  $s'(\pi/2) < 0$  (класс функций  $\{s\} = \Sigma$ ). Как  $y$ , так и  $s$  меняют знак при замене  $\alpha$  на  $\alpha + \pi$ . Таким образом,

$$y \in Y, s \in \Sigma. \quad (4.1)$$

Из перечисленных выше условий следует, что  $F = ys$  – достаточно гладкая нечетная  $\pi$ -периодическая функция, удовлетворяющая условиям:  $F(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2)$ ,  $F(\pi/2) > 0$ ,  $F'(\pi/2) < 0$  (класс функций  $\{F\} = \Phi$ ). Таким образом,

$$F \in \Phi \quad (4.2)$$

является типичным представителем класса функций  $\Phi$ .

Тогда преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.5), (1.6)) примет вид аналитической системы

$$\nu' = \nu\Psi(\alpha, \omega), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + \mu_2 \omega^2 \sin \alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2} F(\alpha) \cos \alpha - \frac{\mu_2}{In_0} H \omega s(\alpha) \cos \alpha, \\ \omega' &= \frac{F(\alpha)}{In_0^2} - \frac{\mu_2}{In_0^2} \omega F(\alpha) \sin \alpha + \mu_2 \omega^3 \cos \alpha + \frac{\mu_2}{In_0} H \omega^2 s(\alpha) \sin \alpha - \frac{H}{In_0} \omega s(\alpha), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\mu_2 \omega^2 \cos \alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{\mu_2}{In_0} H \omega s(\alpha) \sin \alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерные параметры  $b = \mu_2$ ,  $H_1 = \mu_3$  и постоянную  $n_1$  следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = AB / I, \quad H_1 = BH / In_0, \quad n_1 = n_0.$$

Итак, система (4.3), (4.4) может быть рассмотрена на своем фазовом трехмерном цилиндре (2.5).

Для начала исследуем устойчивость ее тривиального решения, соответствующего невозмущенному движению, для чего выпишем соответствующее характеристическое уравнение возле начала координат:

$$\lambda^2 + \lambda[\mu_3 - \mu_2] + 1 = 0.$$

Очевидно следующее

**Предложение 3.** При  $\mu_3 > \mu_2$  ( $\mu_3 < \mu_2$ ) тривиальное решение системы (4.4) асимптотически устойчиво (является отталкивающим).

Для возможного рождения предельного цикла около начала координат исследуем устойчивость тривиального решения системы (4.4) при критическом соотношении параметров

$$\mu_3 = \mu_2. \quad (4.5)$$

Для этого сделаем следующую замену фазовых переменных  $(\alpha, \omega) \rightarrow (a, w)$  в системе (4.4):

$$\alpha = a, \quad \omega = \frac{|\omega_0|}{1 + \mu_2^2} (\mu_2 a - w), \quad \omega_0 = 1,$$

переводящую ее в систему

$$\begin{aligned} a' &= |\omega_0| w + B_1 a^3 + B_2 a^2 w + B_3 a w^2 + \bar{o}_1((a^2 + w^2)^{3/2}), \\ w' &= -|\omega_0| a + B_4 a^3 + B_5 a^2 w + B_6 a w^2 + B_7 w^3 + \bar{o}_2((a^2 + w^2)^{3/2}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$B_1 = \frac{\mu_2 f_3}{6In_0^2} - \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2^2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^3}{(1 + \mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2}{2(1 + \mu_2^2)},$$

$$B_2 = \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} - \frac{2\mu_2^2}{(1 + \mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2^2}{2(1 + \mu_2^2)},$$

$$B_3 = \frac{\mu_2}{(1 + \mu_2^2)^2},$$

$$B_4 = -\frac{f_3}{6In_0^2} + \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^2}{2(1 + \mu_2^2)},$$

$$B_5 = -\frac{Hs_2}{2In_0} \frac{1}{1+\mu_2^2} + \frac{\mu_2^3}{2(1+\mu_2^2)} - \frac{\mu_2}{(1+\mu_2^2)^2},$$

$$B_6 = -\frac{\mu_2^2(3+\mu_2^2)}{(1+\mu_2^2)^2},$$

$$B_7 = \frac{\mu_2}{(1+\mu_2^2)^2}, \quad s_2 = s''(0), \quad f_3 = F'''(0).$$

Введем следующий вспомогательный индекс [2, 15]:

$$Ind = |\omega_0| \{Y_{111}^1 + Y_{122}^1 + Y_{112}^2 + Y_{222}^2\} + \\ + (Y_{11}^1 Y_{11}^2 + Y_{11}^1 Y_{12}^1 + Y_{11}^2 Y_{12}^2 + Y_{22}^2 Y_{12}^2 - Y_{22}^1 Y_{12}^1 - Y_{22}^1 Y_{22}^2),$$

где

$$\begin{pmatrix} Y_1(a, w) \\ Y_2(a, w) \end{pmatrix}$$

– правая часть системы (4.6).

Более конкретно, для системы (4.6) построенный индекс будет иметь вид

$$Ind = 6B_1 + 2B_3 + 2B_5 + 6B_7 = \frac{\mu_2 f_3}{In_0^2} - \frac{Hs_2}{In_0} \frac{1+3\mu_2^2}{1+\mu_2^2} + \frac{\mu_2}{1+\mu_2^2} (3+\mu_2^2).$$

Поскольку для данной системы

$$Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0, 0) = 0$$

(по причине нечетности ее правой части от фазовых переменных) для любых индексов  $i, j, k$ , то следующее предложение дает необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) начала координат при  $Ind \neq 0$ .

**Предложение 4.** Если  $Ind < 0$  ( $Ind > 0$ ) и при этом выполнено неравенство

$$|\mu_3 - \mu_2| < 2, \quad (4.7)$$

то начало координат фазовой плоскости  $\mathbf{R}^2\{a, w\}$  системы (4.6) при критическом соотношении параметров (4.5) является слабым устойчивым (неустойчивым) фокусом.

Условие (4.7) в данном случае является необходимым, поскольку лишь при его выполнении начало координат на плоскости  $\mathbf{R}^2\{a, w\}$  является (устойчивым или неустойчивым, сильным или слабым) фокусом.

Следствием известной теоремы Пуанкаре-Андронов-Хопфа [16] является

**Теорема 3.** Пусть для системы (4.4) выполнено неравенство (4.7). Тогда:

1) Если  $Ind < 0$ , то для любого фиксированного  $\mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильным устойчивым фокусом; при



$\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$  начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окруженным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением  $\mu_3$  от  $\mu_2$  до  $\mu_2 - \delta_2$  как  $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$ .

2) Если  $Ind > 0$ , то для любого фиксированного  $\mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$  начало координат является сильным неустойчивым фокусом; при  $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильным устойчивым фокусом, окруженным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом  $\mu_3$  от  $\mu_2$  до  $\mu_2 + \delta_2$  как  $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$ .

Проверить выполнение условия  $\mu_3 > \mu_2$  ( $\mu_3 < \mu_2$ ) в принципе не составляет труда, поскольку в каждом конкретном случае данные параметры зависят лишь или от первых производных функций воздействия среды  $(y_{N,s})$ , или от их значений. А вот проверка условия  $Ind < 0$  ( $Ind > 0$ ) в каждом конкретном случае довольно затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках функций воздействия среды  $(y_{N,s})$  неизвестны.

Итак, если функции воздействия среды не удовлетворяют условию (2.2), то в полосе  $\Pi$  (или  $\Pi'$ ) при некоторых естественных условиях возможно возникновение предельных циклов, говорящее о том, что фазовые портреты более общей допустимой системы (4.4) не совпадают, вообще говоря, с показанными фазовыми портретами. Последнее говорит нам об относительной негрубости систем вида (4.4) при допустимых деформациях ее правых частей в классах функций (4.1) ((4.2)).

### 5. Из гидродинамической теории сопротивления жидкости

Теперь приведем некоторые размышления, известные еще по классическим работам, при этом отметим наглядные и топологические аналогии.

Как известно, если тело движется равномерно в жидкости, лишенной трения и простирающейся во все стороны до бесконечности, то при обычном потенциальном обтекании тела не возникает ни сопротивления движению, ни подъемной силы, перпендикулярной к направлению движения, какова бы ни была форма тела. Этот результат нетрудно объяснить [17]. Исследование также показывает, что добавочные скорости, а также разности давлений, вызванные движением тела, очень быстро уменьшаются по всем направлениям по мере удаления от тела — по крайней мере, пропорционально третьей степени расстояния.

С другой стороны, наблюдение показывает, что пластина, установленная в набегающем потоке под углом к его направлению, поворачивается так, что в конце концов устанавливается перпендикулярно к потоку, а значит, набегающий поток сообщает ей определенный вращающий момент.

При ускоренном движении тела в жидкости без трения сопротивление возникает, однако это сопротивление такого рода, как если бы масса тела увеличилась на величину массы жидкости, увлекаемой телом при своем движении. Для шара подсчитано [5,6], что величина такой присоединенной массы равна половине массы жидкости, вытесняемой шаром. Так как при возникновении движения из состояния покоя вначале образуется всегда течение, похожее на потенциальное, то понятие о присоединенной массе вполне имеет значение и для реальных жидкостей.

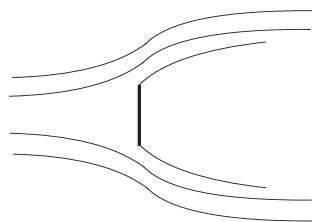
Равенство нулю сопротивления тела, равномерно движущегося без трения в жидкости, можно вывести также из энергетических соображений. Действительно, при отсутствии трения работа, необходимая для преодоления сопротивления, может накапливаться в жидкости только в виде кинетической энергии. Между тем, при потенциальном течении, когда жидкость позади равномерно движущегося тела так же смыкается, как расступается впереди него, за телом не остается никакого возмущения течения, в котором могла бы накапливаться кинетическая энергия. Следовательно, при таком движении не может быть и сопротивления.

Однако могут быть и такие случаи движения в жидкости без трения, когда позади тела в жидкости остается кинетическая энергия и, следовательно, возникает сопротивление. Одним из таких случаев является движение крыла самолета [17]. Возникновение подъемной силы без продолжающегося накопления кинетической энергии в жидкости не противоречит закону сохранения энергии, поскольку подъемная сила перпендикулярна к пути тела в жидкости и поэтому при установившемся движении для ее сохранения затраты работы равны нулю.

Возникновение сопротивления при ускоренном движении также легко понять и с точки зрения закона сохранения энергии. В самом деле, если бы сопротивление при таком движении не возникало и, таким образом, не требовалось бы силы для преодоления этого сопротивления, то наша присоединенная масса не могла бы накапливать и кинетическую энергию. В действительности же полное сопротивление почти всех тел значительно больше всегда неизбежного сопротивления трения [17]. Как известно, причина этого в том, что при движении таких тел образуются поверхности раздела и вихри, которые и являются основной причиной сопротивления. Они препятствуют смыканию потока позади обтекаемого тела и объясняют несимметричное распределение давления на поверхности тела; кроме того, для их образования требуются затраты энергии.

Чтобы определить сопротивление тел, движущихся в идеальной жидкости, остановимся на двух типичных попытках, предпринятых Кирхгофом [18] и Карманом [19].

Кирхгоф исследовал обтекание плоской пластины, поставленной перпендикулярно к потоку (рис.5). Перед пластиной поток разделяется и затем слетает с ее краев, образуя поверхности раздела. Позади пластины пространство между поверхностями раздела заполнено покоящейся жидкостью. Поскольку давление в этом пространстве, если пренебрегать силой тяжести, везде одинаковое, то должно быть одинаковым также давление во всех точках поверхностей раздела, поэтому, на основании теоремы Бернулли, должна быть одинаковой и скорость. Если все это довести до вычислений, то возможны только такие решения задачи, при которых поверхности раздела простираются до бесконечности, а скорость на поверхностях раздела равна скорости невозмущенного потока, т.е. скорости жидкости в бесконечности. Что касается распределения давления, то перед пластиной в ее центре мы имеем динамическое давление  $\rho v^2 / 2$  ( $\rho$  – плотность жидкости). По мере приближения к краям пластины давление уменьшается и на краях совпадает с давлением в невозмущенном потоке. На задней же стороне пластины имеет место постоянное давление, равное давлению в невозмущенном потоке. Поэтому сопротивление пластины пропорционально ее площади и динамическому давлению, и поэтому коэффициент сопротивления  $c$  должен иметь постоянное значение. Согласно вычислениям Кирхгофа, это значение равно  $c = 2\pi / (4 + \pi) \approx 0.88$  [18].



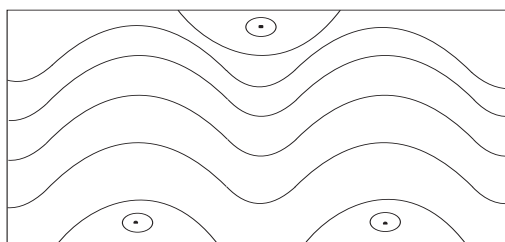
**Рис.5.** Обтекание плоской пластины с образованием поверхности раздела.

Но на самом деле, как известно, поверхности раздела неустойчивы и быстро распадаются, образуя различные вихри. Поэтому давление позади пластины намного ниже, чем в невозмущенном потоке. Таким образом, задняя поверхность пластины оказывает как бы отрицательное действие, и сопротивление получается больше, чем у Кирхгофа. Так, для бесконечно широкой пластины измерения дают  $c = 2.0$ . При обтекании же прямоугольных пластин с конечным отношением сторон жидкость огибает узкие стороны и значительно уменьшает разрежение [18].

Расчет Кирхгофа относится к бесконечно длинной пластине и он плохо согласуется с результатом опыта. Но хорошее совпадение расчета с экспериментом получается в том случае, когда при обтекании водой пластины пространство позади пластины заполняется, например, воздухом. В этом случае поверхности раздела почти не распадаются, и поэтому условия хорошо удовлетворяются [18].

При обтекании узких пластин, когда поток жидкости перед телом не разделяется на две части (как это было в рассмотренном случае) иногда образуется позади тела довольно правильная последовательность вихрей, попеременно срывающихся то с одного, то с другого края тела (вихревая дорожка).

Наблюдения над вихревыми дорожками побудили Кармана [19,20] исследовать устойчивость различных систем параллельных и прямолинейных вихревых нитей. Вычисления показали, что все такие системы (кроме одной) почти всегда неустойчивы. А устойчивая система изображена на рис.6. Для нее отношение расстояния  $h$  между обоими рядами вихрей к расстоянию  $l$  между вихрями в каждом ряду равно 0.283 [19,20]. Но вихревые дорожки, наблюдающиеся в реальности, обладают структурой, очень близкой к этой. По некоторым причинам расстояние между вихрями увеличивается.



**Рис.6.** Линии тока в вихревой дорожке.

Образование за обтекаемым телом новых вихрей означает, что тело испытывает сопротивление, поскольку иначе не соблюдался бы закон сохранения энергии. Можно использовать и другой способ вычисления сопротивления, основанный на теореме о количестве движения. Данное исследование было выполнено Карманом.

Главное же в данных рассуждениях заключается в том, что линии тока, определяемые полем направлений среды (рис.6), имеют топологическую картину, поразительно похожую на фазовую картину разбиения на траектории динамической системы (2.4), показанной на рис.1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *М.В. Шамолин.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ, Сер.1, Математика, механика, 1992, №1, с.52-58, 112;  
англ. пер.: *M.V. Shamolin.* On the problem of the motion of a body in a resistant medium // Moscow University Mechanics Bulletin, 1992, 47:1, p.4-10.
2. *М.В. Шамолин.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Из-во «Экзамен», 2007, 352 с.;  
*M.V. Shamolin.* Metody analiza dinamiceskikh sistem s peremennoi dissipatsiei v dinamike tverdogo tela. – М.: Iz-vo "Ekzamen", 2007, 353 s.
3. *В.А. Самсонов, М.В. Шамолин.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ, Сер.1, Математика, механика, 1989, №3, с.51-54, 105;  
англ. пер.: *V.A. Samsonov, M.V. Shamolin.* Body motion in a resisting medium // Moscow University Mechanics Bulletin, 1989, 44:3, p.16-20.
4. *М.В. Шамолин.* Движение твердого тела в сопротивляющейся среде // Матем. моделирование, 2011, т.23, №12, с.79-104;  
*M.V. Shamolin.* Dvizhenie tverdogo tela v soprotivliauishcheisia srede // Matem. modelirovanie, 2011, t.23, №12, s.79-104.
5. *М.И. Гуревич.* Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979, 322 с.;  
*M.I. Gurevich.* Teoriia strui idealnoi zhidkosti. – М.: Nauka, 1979, 322 s.
6. *С.А. Чаплыгин.* Избранные труды. – М.: Наука, 1976, 495 с.;  
*S.A. Chaplygin.* Izbrannye trudy, – М.: Nauka, 1976, 495 s.
7. *С.А. Чаплыгин.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости. Полн. собр. соч., т.1. – Л.: Изд-во АН СССР, 1933, с.133-135;  
*S.A. Chaplygin.* O dvizhenii tiazhelykh tel v neshzhimaemoi zhidkosti. poln. sobr. soch., t.1. – L.: Izd-vo AN SSSR, 1933, s.133-135.
8. *М.В. Шамолин.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Доклады РАН, 2012, т.442, №4, с.479-481;  
англ. пер.: *M.V. Shamolin.* A New Case of Integrability in Spatial Dynamics of a Rigid Solid Interacting with a Medium under Assumption of Linear Damping // Dokl. Phys., 2012, 57:2, p.78-80
9. *М.В. Шамолин.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук, 1998, т.53, вып.3, с.209-210.  
англ. пер.: *M.V. Shamolin.* On integrability in transcendental functions // Russian Math. Surveys, 1998, 53:3, p.637-638.
10. *M.V. Shamolin.* Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // Journal of Mathematical Sciences, 2004, v.122, №1, p.2841-2915.
11. *М.В. Шамолин.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН, 1999, т.364, №5, с.627-629.  
англ. пер.: *M.V. Shamolin.* New integrable, in the sense of Jacobi, cases in the dynamics of a rigid body interacting with a medium // Doklady Mathematics, 1999, 44:2, p.110-113.
12. *М.В. Шамолин.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое

- двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. МГУ, Сер.1, Математика. Механика, 1996, №4, с.57-69;  
англ. пер.: *M.V. Shamolin*. Introduction to problem on braking of a body in a resisting medium and new two-parametric family of phase portraits // Moscow University Mechanics Bulletin, 1996, 51:4, p.1-9.
13. *М.В. Шамолин*. Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента // Прикл. мат. и мех., 1993, т.57, вып.4, с.40-49;  
англ. пер.: *M.V. Shamolin*. Phase pattern classification for the problem of the motion of a body in a resisting medium in the presence of a linear damping moment // J. Appl. Math. Mech., 1993, 57:4, 623-632.
  14. *М.В. Шамолин*. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений // Вестн. МГУ, Сер. 1, Математика. Механика, 1993, №2, с.66-70;  
англ. пер.: *M.V. Shamolin*. Application of the methods of topographic Poincaré systems and comparison systems to some particular systems of differential equations // Moscow University Mechanics Bulletin, 1993, 48:2, p.10-15.
  15. *Д. Эрроусмит, К. Плейс*. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986, 243 с.;  
*D. Arrowsmith and C. Place*. Ordinary Differential Equations. Ordinary Differential Equations. A Qualitative Approach. With Applications, Springer, London, 1983.
  16. *А. Пуанкаре*. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947;  
*A. Poincaré*. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
  17. *Л. Прандтль* Гидроаэромеханика. – М.: Изд-во Иностранной лит-ры, 1949, 520 с.;  
*L. Prandtl*. Führer durch die Stromungslehre. – Berlin: 1944.
  18. *G. Kirchhoff*. Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen // Crelle's Journ., 1869, v.70.
  19. *Karman und Rubach* // Phys. Zeitschr., 1912, v.13.
  20. *Н.Е. Кочин*. О неустойчивости вихревых цепочек // Доклады АН СССР, 1939, т. XXIV.  
*N.E. Kochin*. О неустойчивости вихревых цепочек // Doklady AN SSSR, 1939, t. XXIV.

Поступила в редакцию 16.07.13