ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2015, том 460, № 2, с. 165–169

МЕХАНИКА

УДК 531.01

МНОГОМЕРНЫЙ МАЯТНИК В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

© 2015 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 20.06.2014 г.

Поступило 23.06.2014 г.

DOI: 10.7868/S0869565215020127

ВВЕДЕНИЕ

Неконсервативное силовое поле в динамике многомерного твердого тела построено согласно результатам из динамики реальных твердых тел, находящихся в поле силы воздействия среды. При этом становятся возможными обобщение уравнений движения многомерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного списка, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты важны в смысле присутствия в системе неконсервативного силового поля, а ранее использовалось в основном поле сил потенциальное (см., например, [1–3]).

В [4, 5] показана интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения закрепленного маятника в потоке набегающей среды, когда у системы динамических уравнений был найден в явном виде первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле комплексного анализа) функцией квазискоростей. При этом все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности, которая имеет форму пластины (одномерной). Затем [5–8] задача была обобщена на пространственный случай (сферический маятник), при этом был найден в явном виде полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части его поверхности, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. В дальнейшем [9–11] исследовались уравнения движения четырехмерных твердых тел различных типов динамической симметрии, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску.

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ГРУППА ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА АЛГЕБРЕ ЛИ so(n)

Рассмотрим движение в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ однородного n-мерного твердого тела (маятника), представляющего собой $(n-1)$-мерный диск (находящийся в потоке набегающей среды, движущемся с постоянной скоростью v_∞), жестко закрепленный перпендикулярно державке в центре диска D, которая другим концом закреплена на (обобщенном) сферическом шарнире O и сопротивления не создает. Движение маятника с динамической симметрией вида

$$I_1, I_2 = \ldots = I_n \qquad (1)$$

происходит в неконсервативном поле силы $\mathbf{S}$ (воздействия среды), приложенной в точке N диска. Здесь $I_1, \ldots, I_n$ – главные моменты инерции маятника в связанной с ним системе координат $Dx_1 \ldots x_n$, при этом $OD = Dx_1$, а оси $Dx_2, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска.

Пусть $(\nu, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ – обобщенные сферические координаты вектора скорости $\mathbf{v}_D$ центра D диска такие, что α – угол между вектором $\mathbf{v}_D$ и прямой Dx_1. Силовое поле $\mathbf{S} = \{-S, \ldots, 0\}$ в системе $Dx_1 \ldots x_n$ представляется в виде $S = s_1(\alpha)v^2$, $v = |\mathbf{v}_D|$, $s_1 \geq 0$, $s_1(\alpha) = s(\alpha)\mathrm{sign}\cos\alpha$. Если Ω – тензор угловой скорости маятника, $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, то часть уравнений движения тела, которая отвечает алгебре Ли so(n), размерность которой равна $n(n-1)/2$, имеет следующий вид [6, 9–12]:

$$\Omega^\bullet\Lambda + \Lambda\Omega^\bullet + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \qquad (2)$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + \ldots + I_n)/2, \ldots$, $\lambda_n = (I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n)/2$, M – момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbf{R}^n$, спроектированный на “естественные” координаты в алгебре Ли so(n), [...] – коммутатор в so(n). Так, например, элемент $\Omega \in \mathrm{so}(n)$ при $n = 5$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_{10}$ – компоненты “угловой скорости” в проекциях на естественные координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$.

Если $N = (0, x_{2N}, \ldots, x_{nN})$ в системе $Dx_1 \ldots x_n$, то при вычислении момента силы $\mathbf{S}$ строится отображение

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathrm{so}(n), \tag{3}$$

переводящее пару векторов из $\mathbf{R}^n$ в некоторый элемент из алгебра Ли $\mathrm{so}(n)$. Так, например, при $n = 5$ в проекциях на алгебру Ли $\mathrm{so}(5)$ момент силы сопротивления имеет следующий вид (ср. с [12]):

$$(0, 0, 0, -x_{5N}s(\alpha)v^2, 0, 0, x_{4N}s(\alpha)v^2, 0,$$
$$-x_{3N}s(\alpha)v^2, x_{2N}s(\alpha)v^2) \in \mathbf{R}^{10} \cong M \in \mathrm{so}(5),$$

при этом в общем случае элемент M будет иметь $(n - 1)(n - 2)/2$ нулевых компонент, поскольку вспомогательная матрица для построения отображения (3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -S & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

и именно $(n - 1)(n - 2)/2$ ее миноров второго порядка со знаком, которые и определяют элемент M, тождественно равны нулю.

Уравнения (2) можно переписать в виде системы $n(n - 1)/2$ уравнений. Так, в частности, при $n = 5$ система на алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$ примет вид

$$\begin{gathered}
(\lambda_4 + \lambda_5)\dot\omega_1 + (\lambda_4 - \lambda_5)(\omega_4\omega_7 + \omega_3\omega_6 + \omega_2\omega_5) = 0, \\
(\lambda_3 + \lambda_5)\dot\omega_2 + (\lambda_5 - \lambda_3)(\omega_1\omega_5 - \omega_3\omega_8 - \omega_4\omega_9) = 0, \\
(\lambda_2 + \lambda_5)\dot\omega_3 + (\lambda_2 - \lambda_5)(\omega_4\omega_{10} - \omega_2\omega_8 - \omega_1\omega_6) = 0, \\
(\lambda_1 + \lambda_5)\dot\omega_4 + (\lambda_5 - \lambda_1)(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) = -x_{5N}S, \\
(\lambda_3 + \lambda_4)\dot\omega_5 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_7\omega_9 + \omega_6\omega_8 + \omega_1\omega_2) = 0, \\
(\lambda_2 + \lambda_4)\dot\omega_6 + (\lambda_4 - \lambda_2)(\omega_5\omega_8 - \omega_7\omega_{10} - \omega_1\omega_3) = 0, \\
(\lambda_1 + \lambda_4)\dot\omega_7 + (\lambda_1 - \lambda_4)(\omega_1\omega_4 - \omega_6\omega_{10} - \omega_5\omega_9) = x_{4N}S, \\
(\lambda_2 + \lambda_3)\dot\omega_8 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_9\omega_{10} + \omega_5\omega_6 + \omega_2\omega_3) = 0, \\
(\lambda_1 + \lambda_3)\dot\omega_9 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) = -x_{3N}S, \\
(\lambda_1 + \lambda_2)\dot\omega_{10} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_8\omega_9 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) = x_{2N}S.
\end{gathered} \tag{4}$$

Поскольку выполнены равенства (1), то существуют $(n - 1)(n - 2)/2$ циклических первых интегралов у уравнений (2):

$$\omega_{k_1} = \omega^0_{k_1}, \ldots, \omega_{k_s} = \omega^0_{k_s}, \tag{5}$$

где $s = (n - 1)(n - 2)/2$. При этом $k_1 = 1, \ldots, k_s$ – некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W = \{1, 2, \ldots, n(n - 1)/2\}$. Рассмотрим набор (5) первых интегралов на своих нулевых уровнях:

$$\omega^0_{k_1} = 0, \ldots, \omega^0_{k_s} = 0. \tag{6}$$

В частности, при $n = 5$ у системы (4) имеются шесть таких первых интегралов: $\omega_1 = \omega_1^0$, $\omega_2 = \omega_2^0$, $\omega_3 = \omega_3^0$, $\omega_5 = \omega_5^0$, $\omega_6 = \omega_6^0$, $\omega_8 = \omega_8^0$, рассматриваемых на нулевых уровнях: $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0$. Ненулевых компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось $p = n(n - 1)/2 - (n - 1)(n - 2)/2 = n - 1$ (здесь $r_1, \ldots, r_p$ – оставшиеся p чисел из множества W, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

ПЕРВАЯ ГРУППА КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости центра диска и набегающего потока:

$$\mathbf{v}_D = v i_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) =$$
$$= \Omega \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + (-v_\infty) i_v(-\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{7}$$

$$i_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix},$$

$l = OD$, $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$ – обобщенные сферические координаты радиуса–вектора $\mathbf{OD}$ на $(n - 1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$, являющейся пространством положений маятника.

ВТОРАЯ ГРУППА КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости и координаты $\xi^\bullet$, $\eta_1^\bullet$, ..., $\eta_{n-2}^\bullet$ фазового пространства исследуемого маятника – касательного расслоения $T\mathbf{S}^{n-1}\{\xi^\bullet, \eta_1^\bullet, \ldots, \eta_{n-2}^\bullet; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$. Они получаются из следующих двух групп соотношений. Сначала выражаем набор фазовых переменных $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ через новые переменные z:

$$\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_{n-2}) \circ \ldots \circ T_{n-3,n-2}(\eta_2) \circ$$

$$\circ\, T_{n-2,n-1}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка M_{kk+1}:

$$T_{kk+1}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{kk+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{kk+1} = \begin{pmatrix} m_{kk} & m_{kk+1} \\ m_{k+1k} & m_{k+1k+1} \end{pmatrix},$$

$$m_{kk} = m_{k+1k+1} = \cos\beta, \quad m_{k+1k} = -m_{kk+1} = \sin\beta.$$

Затем вместо переменных z подставляем следующие зависимости:

$$z_{n-1} = \xi^\bullet, \quad z_{n-2} = -\eta_1^\bullet \frac{\sin\xi}{\cos\xi},$$
$$z_{n-3} = \eta_2^\bullet \frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1, \ldots \tag{9}$$
$$\ldots, \; z_1 = (-1)^n \eta_{n-2}^\bullet \frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3}.$$

РЕДУЦИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Выберем функции $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ в следующем виде (гиперплоскость диска задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ \ldots \\ x_{nN} \end{pmatrix} = R(\alpha) i_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}),$$

$$i_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = i_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right).$$

Для построения силового поля используется пара функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. По аналогии с маломерными случаями будем считать [4, 5], что

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \; A > 0, \; s(\alpha) = B\cos\alpha, \; B > 0 \tag{10}$$

(функции типа Чаплыгина [13]).

Т е о р е м а 1. *Совместные уравнения* (2), (7)–(9) *при выполнении условий* (5), (6), (10) *редуцируются к динамической системе* (11) *на касательном расслоении* $T\mathbf{S}^{n-1}\{\xi^\bullet, \eta_1^\bullet, \ldots, \eta_{n-2}^\bullet; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$ $(n-1)$-*мерной сферы* $\mathbf{S}^{n-1}\{\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$.

Если ввести безразмерные параметр и дифференцирование: $b_* = ln_0$, $\langle\bullet\rangle \to n_0 v_\infty \langle\bullet\rangle$, $n_0^2 = \dfrac{AB}{(n-2)I_2}$, то полученная система будет иметь вид

$$\xi^{\bullet\bullet} + b_*\xi^\bullet\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - [\eta_1^{\bullet 2} + \eta_2^{\bullet 2}\sin^2\eta_1 +$$
$$+ \eta_3^{\bullet 2}\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2 + \ldots + \eta_{n-2}^{\bullet 2}\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}] \times$$
$$\times \frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0,$$

$$\eta_1^{\bullet\bullet} + b_*\eta_1^\bullet\cos\xi + \xi^\bullet\eta_1^\bullet\left[\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}\right] - [\eta_2^{\bullet 2} + \eta_3^{\bullet 2}\sin^2\eta_2 +$$
$$+ \eta_4^{\bullet 2}\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3 + \ldots + \eta_{n-2}^{\bullet 2}\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}] \times$$
$$\times \sin\eta_1\cos\eta_1 = 0,$$

$$\eta_2^{\bullet\bullet} + b_*\eta_2^\bullet\cos\xi + \xi^\bullet\eta_2^\bullet\left[\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}\right] + 2\eta_1^\bullet\eta_2^\bullet\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} -$$
$$- [\eta_3^{\bullet 2} + \eta_4^{\bullet 2}\sin^2\eta_3 + \eta_5^{\bullet 2}\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4 + \ldots +$$
$$+ \eta_{n-2}^{\bullet 2}\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}]\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0,$$

$$\eta_3^{\bullet\bullet} + b_*\eta_3^\bullet\cos\xi + \xi^\bullet\eta_3^\bullet\left[\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}\right] + 2\eta_1^\bullet\eta_3^\bullet\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} +$$
$$+ 2\eta_2^\bullet\eta_3^\bullet\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} - [\eta_4^{\bullet 2} + \eta_5^{\bullet 2}\sin^2\eta_4 + \tag{11}$$
$$+ \eta_6^{\bullet 2}\sin^2\eta_4\sin^2\eta_5 + \ldots + \eta_{n-2}^{\bullet 2}\sin^2\eta_4\ldots\sin^2\eta_{n-3}] \times$$
$$\times \sin\eta_3\cos\eta_3 = 0,$$

$$\ldots$$

$$\eta_{n-4}^{\bullet\bullet} + b_*\eta_{n-4}^\bullet\cos\xi + \xi^\bullet\eta_{n-4}^\bullet\left[\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}\right] +$$
$$+ 2\eta_1^\bullet\eta_{n-4}^\bullet\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-5}^\bullet\eta_{n-4}^\bullet\frac{\cos\eta_{n-5}}{\sin\eta_{n-5}} -$$
$$- [\eta_{n-3}^{\bullet 2} + \eta_{n-2}^{\bullet 2}\sin^2\eta_{n-3}]\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-4} = 0,$$

$$\eta_{n-3}^{\bullet\bullet} + b_*\eta_{n-3}^{\bullet}\cos\xi + \xi^{\bullet}\eta_{n-3}^{\bullet}\left[\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}\right] + $$
$$+ 2\eta_1^{\bullet}\eta_{n-3}^{\bullet}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-4}^{\bullet}\eta_{n-3}^{\bullet}\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}} -$$
$$- \eta_{n-2}^{\bullet 2}\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3} = 0,$$
$$\eta_{n-2}^{\bullet\bullet} + b_*\eta_{n-2}^{\bullet}\cos\xi + \xi^{\bullet}\eta_{n-2}^{\bullet}\left[\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}\right] +$$
$$+ 2\eta_1^{\bullet}\eta_{n-2}^{\bullet}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-3}^{\bullet}\eta_{n-2}^{\bullet}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} = 0.$$

В переменных же w

$$w_1 = \frac{-z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}}, \ldots, w_{n-4} = \frac{-z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}},$$
$$w_{n-3} = \frac{z_2}{z_1}, \tag{12}$$
$$w_{n-2} = w = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}, \quad w_{n-1} = -z_{n-1}$$

система (11) примет вид

$$\xi' = -w_{n-1} - b_*\sin\xi,$$
$$w'_{n-1} = \sin\xi\cos\xi - w^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{13}$$
$$w' = ww_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi};$$
$$w'_k = d_k\frac{1+w_k^2}{w_k}\frac{\cos\eta_k}{\sin\eta_k}, \tag{14}$$
$$\eta'_k = d_k, \quad k = 1, \ldots, n-3;$$
$$\eta'_{n-2} = (-1)^{n+1}Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}}, \tag{15}$$

где $Z_1(w_1, \ldots, w_{n-1}) = z_1$ в силу замены (12), d_k, $k = 1, \ldots, n-3$, – некоторые гладкие функции на своей области определения.

Система (13)–(15) возникает в динамике свободного многомерного твердого тела [5]. Таким образом, получена аналогия между движением тел свободного и закрепленного в многомерном пространстве. При этом квазискоростям тела свободного соответствуют позиционные координаты $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$ тела закрепленного (см. также [6]).

Видно, что система (13)–(15) порядка $2(n-1)$ распадается на совокупность независимых подсистем: система (13) – третьего порядка, $n-3$ системы (14) (после замены независимого переменного) – второго, при этом система (13), (14) – независимая подсистема порядка $2n-3$ (уравнение (15) отделяется).

Таким образом, для полного интегрирования системы (13)–(15) достаточно знать два независимых первых интеграла системы (13), $n-3$ независимых первых интеграла совокупности систем (14), а также одно инвариантное соотношение, “привязывающее” уравнение (15).

ПОЛНЫЙ СПИСОК ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Один из трансцендентных первых интегралов [14] системы (13) имеет вид

$$\frac{w_{n-1}^2 + w^2 + b_*w_{n-1}\sin\xi + \sin^2\xi}{w\sin\xi} = C_1 = \text{const}. \tag{16}$$

И второй трансцендентный интеграл, имеющий громоздкий вид, выражается через конечную комбинацию элементарных функций и имеет следующий структурный вид:

$$\ln|\sin\xi| + G_1\left(\sin\xi, \frac{w_{n-1}}{\sin\xi}, \frac{w}{\sin\xi}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{17}$$

Далее, распавшаяся система (14) имеет $n-3$ независимых первых интеграла

$$\frac{\sqrt{1+w_k^2}}{\sin\eta_k} = C_{k+2} = \text{const}, \quad k = 1, \ldots, n-3. \tag{18}$$

А первый интеграл, “привязывающий” уравнение (15) на угол η_{n-2}, найдется из уравнения

$$\frac{d\eta_{n-2}}{d\eta_{n-3}} = -\frac{1}{w_{n-3}\sin\eta_{n-3}},$$

при этом, используя первый интеграл (18) при $k = n-3$, окончательно получим его вид:

$$\operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\eta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\eta_{n-3} - C_{n-1}^2}} \pm \eta_{n-2} = C_n = \text{const}. \tag{19}$$

Теорема 2 (основная). *Совместные уравнения* (2), (7)–(9) *движения n-мерного маятника при условиях* (1), (5), (6), (10) *обладают полным списком инвариантных соотношений*, $(n-1)(n-2)/2$ *из которых* (5) *являются аналитическими функциями, а остальные n* (16)–(19) – *трансцендентными функциями своих переменных* (*после их формального продолжения в комплексную область*), *выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предыдущих работах автора [9–12] уже рассматривались задачи о движении свободного многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы. Данная работа открывает новый цикл работ по интегрированию закрепленного многомерного твердого тела в неконсервативном поле, поскольку ранее, как уже указывалось (см., например, [1–3]), рассматривались лишь такие движения тела, когда поле внешних сил было потенциальным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12–01–00020-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Манаков С.В.* // Функцион. анализ и его прил. 1976. Т. 10. № 4. С. 93–94.
2. *Веселов А.П.* // ДАН. 1983. Т. 270. № 6. С. 1298–1300.
3. *Богоявленский О.И.* // ДАН. 1986. Т. 287. № 5. С. 1105–1108.
4. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 3. С. 51–54; 105.
5. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 256 с.
6. *Шамолин М.В.* В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 2013. Т. 125. С. 5–254.
7. *Шамолин М.В.* // ДАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.
8. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.
9. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.
10. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.
11. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.
12. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49.
13. *Чаплыгин С.А.* В кн.: Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133–135.
14. *Шамолин М.В.* // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.