М. В. Шамолин, Многообразие случаев интегрируемости в пространственной динамике твердого тела в неконсервативном поле сил, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 2014, выпуск 30, 287–350

М. В. Шамолин*

МНОГООБРАЗИЕ СЛУЧАЕВ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ СИЛ**

ВВЕДЕНИЕ

Работа представляет собой развитие результатов по интегрированию динамической части уравнений движения трехмерного (3D-) твердого тела, находящегося в некотором поле сил, построенном при условии квазистационарного взаимодействия твердого тела со средой [38,45,74, 75]. Отметим также ряд работ автора по интегрированию аналогичных уравнений движения двумерного (2D-) [38] и четырехмерного (4D-) [74] твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил.

Изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря, неприменима. Таким образом, для таких систем необходимо в некотором смысле «в лоб» интегрировать основное уравнение динамики. При этом обобщены старые, а также получены новые случаи полной интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике 3D- (пространственного) твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил.

Работа посвящена качественным методам в теории неконсервативных систем, возникающих, например, в таких областях науки, как динамика твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой, теория колебаний и др. В принципе, данный материал может быть интересен специалистам как по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, динамике твердого тела, так и по механике жидкости и газа.

Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности)

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00020).

довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Получено целое семейство случаев интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обусловливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов или узлов, предельных циклов).

Обнаружены новые интегрируемые случаи движения твердого тела, в том числе в классической задаче о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды.

В § 1 приводятся предварительные суждения и кратко обсуждаются полученные ранее результаты. Далее конкретизируются так называемые динамические системы с переменной диссипацией. Данный класс характеризуется как класс систем, в ряде случаев допускающих полное интегрирование. Поскольку в системе присутствуют отталкивающие и притягивающие предельные множества, полное интегрирование если и может проводиться, так только в классе трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций.

Сначала рассказывается о наглядных характеристиках таких систем, а затем дается определение (или, точнее, одно из определений) системы с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним.

Рассматривается важный класс динамических систем с дополнительными симметриями. На самом деле вводимые симметрии вполне естественны, поскольку, в принципе, правую часть системы можно разложить в ряд Фурье, при этом часто бывает, что эти ряды конечны. Вводимый класс систем оказывается классом систем с переменной диссипацией с нулевым средним. Приводятся естественные примеры из динамики 2D- и 3D-твердого тела.

Изучаются также системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Приводится достаточно общий вид таких систем третьего порядка, которые допускают наличие трансцендентных первых интегралов.

В § 2 и 3 исследуются новые случаи интегрируемости пространственной (3D-) динамики твердого тела, взаимодействующего со средой, т. е. случаи, описываемые динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Подавляющая часть данного материала ранее не публиковалась. Его преимущество состоит в том, что практически все исследуемые системы описывают вполне конкретные движения и имеют соответствующие гидродинамические аналогии.

§ 1. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Результаты предлагаемой работы являются развитием предыдущих исследований, в том числе и некоторой прикладной задачи из динамики твердого тела [38, 45, 74, 75], где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Позднее данное обстоятельство позволило провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, которые обладают грубостью и сохраняются для систем более общего вида. Полная интегрируемость таких систем связана с симметриями скрытого типа.

Как известно, понятие интегрируемости, вообще говоря, достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать, в каком смысле оно понимается (имеется в виду некий критерий, по которому делается вывод о том, что траектории рассматриваемой динамической системы устроены особенно «привлекательно» и просто), в классе каких функций ищутся первые интегралы и т. д. (см. также [1, 6, 7, 10—14, 16, 21—23, 25, 27, 37, 47, 55, 57, 60, 64—67, 69—75]).

В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Здесь трансцендентность понимается не в смысле теории элементарных функций (например, тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки). При этом их необходимо формально продолжить в комплексную область. Вот такие системы являются, как правило, сильно неконсервативными (см. также [74, 75]).

1. Предварительные суждения и результаты. Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций [16, 21, 22, 37, 40—42, 47, 55, 57, 60, 78, 82, 85].

Предлагаемая работа возникла из плоской задачи движения в сопротивляющейся среде твердого тела, поверхностью контакта со средой которого является плоский участок его внешней поверхности. Силовое поле в этом случае строится из соображений воздействия среды на тело при струйном (или отрывном) обтекании в условиях квазистационарности. Оказывается, что изучение движения такого класса тел сводится к системам либо с рассеянием энергии ((чисто) диссипативные системы или системы в диссипативном силовом поле), либо с ее подкачкой (так называемые системы с антидиссипацией, или системы с разгоняющими силами). Отметим, что подобные задачи уже появлялись в прикладной аэродинамике [74, 75].

Рассматриваемые ранее задачи стимулируют развитие качественного аппарата исследования, который существенным образом дополняет качественную теорию неконсервативных систем с диссипацией обоих знаков (см. также [3, 4, 9, 17, 18, 20, 83]).

Были также качественно исследованы нелинейные эффекты от движения в плоской и пространственной динамике твердого тела. Проведено обоснование на качественном уровне необходимости введения определений относительной грубости и относительной негрубости различных степеней (см. также [2, 5, 19, 24, 26, 29—36, 39, 44]).

Следующий спектр результатов позволил подготовить данную работу:

- разработаны методы качественного исследования диссипативных систем и систем с антидиссипацией, позволившие получить условия бифуркации рождения устойчивых и неустойчивых автоколебаний, а также условия отсутствия любых особых траекторий. Метод исследования плоских топографических систем Пуанкаре и систем сравнения удалось распространить на высшие размерности. Получены достаточные условия устойчивости по Пуассону (всюду плотности возле себя) некоторых классов незамкнутых траекторий динамических систем [36, 37, 74, 75];
- в 2D- и 3D-динамике твердого тела обнаружены полные списки первых интегралов диссипативных систем и систем с антидиссипацией, являющихся трансцендентными (в смысле классификации их особенностей) функциями, выражающимися в ряде случаев через элементарные функции. Введены новые определения свойств относительной грубости и относительной негрубости

различных степеней, которыми обладают проинтегрированные системы [74, 75];

— получены многопараметрические семейства топологически неэквивалентных фазовых портретов, возникающие в чисто диссипативных системах (т. е. системах с переменной диссипацией с ненулевым (положительным) средним). Почти каждый портрет таких семейств (абсолютно) груб [51—54, 58, 59, 61—63];
— обнаружены новые качественные аналогии между свойствами движения свободных тел в сопротивляющейся среде, покоящейся на бесконечности, и тел закрепленных, находящихся в потоке набегающей среды [68, 74—76, 79—81, 84].

Многие результаты данной работы регулярно докладывались на множестве семинаров, в том числе и на семинаре «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени профессора В. В. Трофимова (см. [15]) под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина.

2. Динамические системы с переменной диссипацией как класс систем, допускающих полное интегрирование.

2.1. ***Наглядная характеристика динамических систем с переменной диссипацией.*** Поскольку при первоначальном моделировании воздействия среды на твердое тело использовалась экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания, возникла необходимость исследования класса динамических систем, которые обладают свойством (относительной) структурной устойчивости (относительной грубости) [74, 75]. Поэтому было вполне естественно ввести данные определения для таких систем. При этом многие из рассматриваемых систем получаются (абсолютно) грубыми по Андронову—Понтрягину [2, 8, 43, 77].

После некоторых упрощений (например, в 2D-динамике) динамическая часть общей системы уравнений плоскопараллельного движения может быть сведена к маятниковой системе второго порядка, в которой присутствует линейная неконсервативная (знакопеременная диссипативная) сила с коэффициентом, который при разных значениях имеющейся в системе периодической фазовой координаты имеет разный знак.

Таким образом, в данном случае будем говорить о системах с так называемой переменной диссипацией, где термин «переменный» относится не столько к величине коэффициента диссипации, сколько к возможной смене его знака (поэтому разумнее было бы употреблять термин «знакопеременный»).

В среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация может быть как положительной («чисто» диссипативные системы), так и отрицательной (системы с разгоняющими силами) или же равной нулю (при этом не равной нулю тождественно). В последнем случае будем говорить о системах с переменной диссипацией с нулевым средним (их можно ассоциировать с «полуконсервативными» системами).

Как уже отмечалось выше, были обнаружены важные механические аналогии, возникающие при сравнении качественных свойств стационарного движения свободного тела и равновесия маятника в потоке среды. Такие аналогии имеют глубокий опорный смысл, поскольку позволяют перенести свойства нелинейных динамических систем для маятника на динамические системы для свободного тела. И те и другие системы принадлежат к классу так называемых маятниковых динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним.

При дополнительных условиях вышеописанная эквивалентность распространяется и на случай пространственного движения, что позволяет говорить об общем характере симметрий, имеющихся в системе с переменной диссипацией с нулевым средним как при плоскопараллельном, так и при пространственном движении (о плоском и пространственном вариантах маятника в потоке среды см. также [74, 75]).

Ниже будут отмечены классы нелинейных систем, интегрируемых в трансцендентных (в смысле теории функций комплексного переменного) элементарных функциях. Например, такими являются динамические системы с пятипараметрической нелинейностью на двумерном цилиндре

$$\{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2 \colon \alpha \bmod 2\pi\}, \tag{1.1}$$

включающие большинство систем, исследовавшихся ранее в динамике маломерного (2D- и 3D-случаи) твердого тела, взаимодействующего со средой:

$$\begin{gathered}
\dot\alpha = a\sin\alpha + b\omega + \gamma_1\sin^5\alpha + \gamma_2\omega\sin^4\alpha + \gamma_3\omega^2\sin^3\alpha + \\
+ \gamma_4\omega^3\sin^2\alpha + \gamma_5\omega^4\sin\alpha, \\
\dot\omega = c\sin\alpha\cos\alpha + d\omega\cos\alpha + \gamma_1\omega\sin^4\alpha\cos\alpha + \gamma_2\omega^2\sin^3\alpha\cos\alpha + \\
+ \gamma_3\omega^3\sin^2\alpha\cos\alpha + \gamma_4\omega^4\sin\alpha\cos\alpha + \gamma_5\omega^5\cos\alpha.
\end{gathered}$$

Чисто диссипативные динамические системы (впрочем, как и (чисто) антидиссипативные), которые в нашем случае могут принадлежать к системам с переменной диссипацией с ненулевым средним, как правило, структурно-устойчивые ((абсолютно) грубые), а системы с переменной диссипацией с нулевым средним (которые обычно обладают дополнительными симметриями) либо структурно-неустойчивые (негрубые), либо только относительно структурно-устойчивые (относительно грубые). Хотя последнее утверждение доказать в общем случае затруднительно [74, 75, 84].

Например, динамическая система вида

$$\dot{\alpha} = \Omega + \beta \sin \alpha,$$
$$\dot{\Omega} = -\beta \sin \alpha \cos \alpha, \quad \beta > 0,$$

относительно структурно-устойчивая (относительно грубая) и топологически эквивалентна системе, описывающей закрепленный маятник, помещенный в поток набегающей среды [74,75]. У нее имеется первый интеграл, который является трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющих существенно особые точки после их продолжения в комплексную область) функцией фазовых переменных и выражается через конечную комбинацию элементарных функций [74,75]. Фазовый цилиндр (1.1) квазискоростей рассматриваемой системы имеет интересную топологическую структуру разбиения на траектории (рис. 1; подробнее см. в [28, 46, 48—50, 56]).

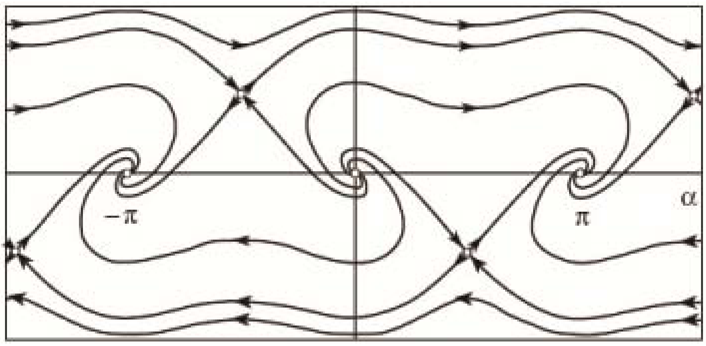

Рис. 1. Относительно грубая динамическая система

Хотя описываемая динамическая система и неконсервативна, во вращательной области (и только в ней) ее «фазовой» плоскости $\mathbf{R}^2\{\alpha, \Omega\}$ (данная плоскость и не является фазовой; фазовым является цилиндр (1.1)) она допускает сохранение инвариантной меры с переменной плотностью. Данное свойство характеризует рассматриваемую систему как систему с переменной диссипацией с нулевым средним.

2.2. *Одно из определений системы с переменной диссипацией с нулевым средним.* Будем изучать системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих периодическую фазовую координату. Исследуемые системы обладают такими симметриями, при которых в среднем за период по периодической координате сохраняется их фазовый объем. Так, например, следующая маятниковая система с гладкой и периодической по α периода T правой частью $\mathbf{V}(\alpha,\omega)$ вида

$$\dot\alpha = -\omega + f(\alpha), \quad \dot\omega = g(\alpha), \quad f(\alpha+T) = f(\alpha), \quad g(\alpha+T) = g(\alpha),$$

сохраняет свою фазовую площадь на фазовом цилиндре за период T:

$$\int\limits_0^T \operatorname{div}\mathbf{V}(\alpha,\omega)\,d\alpha = \int\limits_0^T \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\bigl(-\omega + f(\alpha)\bigr) + \frac{\partial}{\partial\omega}g(\alpha)\right)\,d\alpha = \int\limits_0^T f'(\alpha)\,d\alpha = 0.$$

Рассматриваемая система эквивалентна уравнению маятника

$$\ddot\alpha - f'(\alpha)\dot\alpha + g(\alpha) = 0,$$

в котором интеграл от коэффициента $f'(\alpha)$ при диссипативном члене $\dot\alpha$ в среднем за период равен нулю.

Видно, что рассматриваемая система имеет такие симметрии, при которых она становится так называемой системой *с переменной диссипацией с нулевым средним* в смысле следующего определения (см. также [74, 75]).

Определение 1.1. Рассмотрим гладкую автономную систему $(n+1)$-го порядка нормального вида, определенную с помощью векторного поля $\mathbf{V}(x,\alpha)$, заданную на цилиндре $\mathbf{R}^n\{x\} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$, где α — периодическая координата периода $T > 0$. Дивергенцию правой части (которая, вообще говоря, является функцией всех фазовых переменных и не равна тождественно нулю) данной системы обозначим через $\operatorname{div}\mathbf{V}(x,\alpha)$. Назовем такую систему системой с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним, если функция

$$\int\limits_0^T \operatorname{div}\mathbf{V}(x,\alpha)\,d\alpha$$

равна (не равна) тождественно нулю. При этом в некоторых случаях (например, когда в отдельных точках окружности $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$ возникают особенности) данный интеграл понимается в смысле главного значения.

Необходимо заметить, что дать общее определение системы с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним достаточно непросто. Приведенное только что определение использует понятие дивергенции (как известно, дивергенция правой части системы нормального вида характеризует изменение фазового объема в фазовом пространстве данной системы).

3. Системы с симметриями и переменной диссипацией с нулевым средним. Рассмотрим системы следующего вида (точкой обозначена производная по времени):

$$\dot{\alpha} = f_\alpha(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha), \quad \dot{\omega_k} = f_k(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

заданные на множестве $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus K \times \mathbf{R}^n\{\omega\}$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, где функции $f_\lambda(u_1, u_2, u_3)$, $\lambda = \alpha, 1, \ldots, n$, трех переменных u_1, u_2, u_3 таковы:

$$f_\lambda(-u_1, -u_2, u_3) = -f_\lambda(u_1, u_2, u_3), \quad f_\alpha(u_1, u_2, -u_3) = f_\alpha(u_1, u_2, u_3),$$
$$f_k(u_1, u_2, -u_3) = -f_k(u_1, u_2, u_3).$$

Множество K или пусто, или состоит из конечного числа точек окружности $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$.

Последние две переменные u_2, u_3 в функциях $f_\lambda(u_1, u_2, u_3)$ зависят от одного параметра α, но они выделены в разные группы по следующим причинам. Во-первых, не во всей области определения они однозначно выражаются относительно друг друга, во-вторых, первая из них нечетная, а вторая — четная функция α, что по-разному влияет на симметрии системы (1.2). Ей поставим в соответствие следующую уже неавтономную систему:

$$\frac{d\omega_k}{d\alpha} = \frac{f_k(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha)}{f_\alpha(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha)}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

подстановкой $\tau = \sin\alpha$ приводимую к виду

$$\begin{gathered} \frac{d\omega_k}{d\tau} = \frac{f_k(\omega, \tau, \varphi_k(\tau))}{f_\alpha(\omega, \tau, \varphi_\alpha(\tau))}, \\ \varphi_\lambda(-\tau) = \varphi_\lambda(\tau), \quad \lambda = \alpha, 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Последняя система может иметь, в частности, алгебраическую правую часть (т. е. быть отношением двух полиномов), что иногда помогает искать ее первые интегралы через конечную комбинацию элементарных функций.

Следующее утверждение «погружает» рассматриваемый класс систем (1.2) в класс динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним. Обратное вложение, вообще говоря, не выполняется.

Предложение 1.1. *Системы вида* (1.2) *являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним.*

Данное предложение доказывается с использованием вышеперечисленных симметрий системы (1.2).

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, поскольку можно предъявить множество динамических систем на двумерном цилиндре, являющихся системами с переменной диссипацией с нулевым средним, но они не будут обладать вышеперечисленными симметриями.

В данной работе в основном будет затронут случай, когда функции $f_\lambda\big(\omega,\tau,\varphi_k(\tau)\big)$ $(\lambda=\alpha,1,\ldots,n)$ — полиномы по ω, τ.

Важными примерами служат маятниковые системы на двумерном цилиндре $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}\times\mathbf{R}^1\{\omega\}$ с параметром $b>0$ из динамики твердого тела [74, 75]:

$$\dot\alpha=-\omega+b\sin\alpha,\quad \dot\omega=\sin\alpha\cos\alpha; \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered}\dot\alpha=-\omega+b\sin\alpha\cos^2\alpha+b\omega^2\sin\alpha,\\ \dot\omega=\sin\alpha\cos\alpha-b\omega\sin^2\alpha\cos\alpha+b\omega^3\cos\alpha,\end{gathered} \tag{1.5}$$

которым в переменных (ω,τ) можно ставить в соответствие уравнения с алгебраическими правыми частями

$$\frac{d\omega}{d\tau}=\frac{\tau}{-\omega+b\tau},$$
$$\frac{d\omega}{d\tau}=\frac{\tau+b\omega[\omega^2-\tau^2]}{-\omega+b\tau+b\tau[\omega^2-\tau^2]}$$

вида (1.3) соответственно. При этом данные системы являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним, что нетрудно проверить напрямую. Несложно видеть, что они попадают в класс систем (1.2). Более того, каждая из них обладает первым интегралом, являющимся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного) функцией, выражающейся через конечную комбинацию элементарных функций [55—57].

Приведем еще один пример системы более высокого порядка, обладающей только что перечисленными свойствами.

Исследуем систему с параметром b в трехмерном множестве

$$\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}\setminus\{\alpha=0,\ \alpha=\pi\}\times\mathbf{R}^2\{z_1,z_2\},$$

которую также можно рассматривать на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\alpha, \beta\}$:

$$\begin{gathered}
\dot{\alpha} = -z_2 + b\sin\alpha, \\
\dot{z}_2 = \sin\alpha\cos\alpha - z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\
\dot{z}_1 = z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},
\end{gathered} \tag{1.6}$$

дополнив формально ее уравнением

$$\dot{\beta} = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{1.7}$$

Такая система описывает пространственное движение твердого тела в неконсервативном поле сил [74]. Поставим ей в соответствие систему с алгебраической правой частью

$$\frac{dz_2}{d\tau} = \frac{\tau - z_1^2/\tau}{-z_2 + \beta\tau}, \quad \frac{dz_1}{d\tau} = \frac{z_1 z_2/\tau}{-z_2 + \beta\tau}. \tag{1.8}$$

И в данном случае видно, что система (1.6), (1.7) является системой с переменной диссипацией с нулевым средним; чтобы было полное соответствие с определением, достаточно ввести новую фазовую переменную

$$z_1^* = \ln|z_1|.$$

Далее будет показано, что она обладает двумя первыми интегралами (т. е. полным списком), являющимися трансцендентными функциями и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций [74], что, как указывалось выше, и стало возможным после постановки ей в соответствие (вообще говоря, неавтономной) системы уравнений с алгебраической (полиномиальной) правой частью (1.8).

Приведенные выше системы (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) не только попадают в класс систем (1.2) и обладают переменной диссипацией с нулевым средним, но и имеют полный список трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Итак, для поиска первых интегралов рассматриваемых систем лучше привести системы вида (1.2) к системам с полиномиальными правыми частями (1.3), от вида которых зависит возможность интегрирования в элементарных функциях исходной системы. Поэтому пойдем следующим путем: будем искать достаточные условия интегрируемости в элементарных функциях систем уравнений с полиномиальными правыми частями, исследуя при этом системы наиболее общего вида.

4. Системы на $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus \{\alpha = 0,\ \alpha = \pi\} \times \mathbf{R}^2\{z_1, z_2\}$. Исследуем для примера систему вида (1.6), которая сводится к (1.8), и систему, возникающую в 3D-динамике твердого тела, взаимодействующего со средой [74]:

$$\begin{gathered}\dot{\alpha} = -z_2 + \beta(z_1^2 + z_2^2)\sin\alpha + \beta\sin\alpha\cos^2\alpha,\\ \dot{z_2} = \sin\alpha\cos\alpha + \beta z_2(z_1^2 + z_2^2)\cos\alpha - \beta z_2\sin^2\alpha\cos\alpha - z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\ \dot{z_1} = \beta z_1(z_1^2 + z_2^2)\cos\alpha - \beta z_1\sin^2\alpha\cos\alpha + z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\end{gathered} \tag{1.9}$$

Она соответствует следующей системе с алгебраической правой частью:

$$\begin{aligned}\frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{\tau + \beta z_2(z_1^2 + z_2^2) - \beta z_2\tau^2 - z_1^2/\tau}{-z_2 + \beta\tau(z_1^2 + z_2^2) + \beta\tau(1 - \tau^2)},\\ \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{\beta z_1(z_1^2 + z_2^2) - \beta z_1\tau^2 + z_1 z_2/\tau}{-z_2 + \beta\tau(z_1^2 + z_2^2) + \beta\tau(1 - \tau^2)}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Итак, мы по-прежнему рассматриваем пару систем: первоначальную систему (1.9) и соответствующую ей алгебраическую систему (1.10).

Аналогичным образом производится переход к однородным координатам u_k, $k = 1, 2$, по формулам $z_k = u_k\tau$.

Система (1.8) приводится с помощью последней замены к виду

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{\tau - u_1^2\tau}{-u_2\tau + \beta\tau}, \quad \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{u_1 u_2\tau}{-u_2\tau + \beta\tau},$$

который, в свою очередь, соответствует уравнению

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - \beta u_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1 u_2 - \beta u_1}. \tag{1.11}$$

Данное уравнение интегрируется в элементарных функциях, поскольку интегрируется тождество

$$d\left(\frac{1 - \beta u_2 + u_2^2}{u_1}\right) + du_1 = 0,$$

и имеет в координатах (τ, z_1, z_2) первый интеграл вида (ср. с [74])

$$\frac{z_1^2 + z_2^2 - \beta z_2\tau + \tau^2}{z_1\tau} = \text{const}.$$

Система же (1.9) после ее приведения соответствует системе

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}+u_2=\frac{\tau+\beta u_2\tau^3(u_1^2+u_2^2)-\beta u_2\tau^3-u_1^2\tau}{-u_2\tau+\beta\tau^3(u_1^2+u_2^2)+\beta\tau(1-\tau^2)},$$
$$\tau\frac{du_1}{d\tau}+u_1=\frac{\beta u_1\tau^3(u_1^2+u_2^2)-\beta u_1\tau^3+u_1u_2\tau}{-u_2\tau+\beta\tau^3(u_1^2+u_2^2)+\beta\tau(1-\tau^2)},$$

которая также приводится к (1.11).

Система вида (1.6), (1.7) эквивалентна следующей системе на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2$ (здесь пара углов (α,β) эквивалентна паре углов (θ,ψ)):

$$\ddot\theta+\beta\dot\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta-\dot\psi^2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=0,$$
$$\ddot\psi+\beta\dot\psi\cos\theta+\dot\theta\dot\psi\left[\frac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right]=0.$$

Ее фазовый портрет можно найти в [74].

Возникает вопрос, каковы возможности интегрирования в элементарных функциях системы более общего вида, включающей рассмотренные выше системы (1.8), (1.10), в трехмерных фазовых областях

$$\frac{dz}{dx}=\frac{ax+by+cz+c_1z^2/x+c_2zy/x+c_3y^2/x}{dx+ey+fz},$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{gx+hy+iz+i_1z^2/x+i_2zy/x+i_3y^2/x}{dx+ey+fz},\tag{1.12}$$

имеющей особенность типа $1/x$.

Ранее уже был получен ряд результатов по данному вопросу [47—49, 74, 75]. Приведем краткое резюме по данным результатам, а также дополним материал оригинальными рассуждениями.

Вводя, как и ранее, подстановки $y=ux$, $z=vx$, получаем, что система (1.12) приводится к системе

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{ax+bux+cvx+c_1v^2x+c_2vux+c_3u^2x}{dx+eux+fvx},$$
$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{gx+hux+ivx+i_1v^2x+i_2vux+i_3u^2x}{dx+eux+fvx},$$

которой поставим в соответствие неавтономное уравнение с алгебраической правой частью

$$\frac{dv}{du}=\frac{a+bu+cv+c_1v^2+c_2vu+c_3u^2-v[d+eu+fv]}{g+hu+iv+i_1v^2+i_2vu+i_3u^2-u[d+eu+fv]}.\tag{1.13}$$

Интегрирование последнего уравнения сводится к интегрированию уравнения в полных дифференциалах:

$$[g + hu + iv + i_1v^2 + i_2vu + i_3u^2 - du - eu^2 - fuv]dv =$$
$$= [a + bu + cv + c_1v^2 + c_2vu + c_3u^2 - dv - euv - fv^2]\,du. \quad (1.14)$$

Имеем, вообще говоря, 15-параметрическое семейство уравнений вида (1.14). Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества, как однородного уравнения, достаточно наложить 6 условий:

$$g = 0, \quad i = 0, \quad i_1 = 0, \quad e = c_2, \quad h = c, \quad i_2 = 2c_1 - f. \quad (1.15)$$

Введем 9 параметров $\beta_1, \ldots, \beta_9$ и рассмотрим их в качестве независимых:

$$\beta_1 = a, \quad \beta_2 = b, \quad \beta_3 = c, \quad \beta_4 = c_1, \quad \beta_5 = c_2,$$
$$\beta_6 = c_3, \quad \beta_7 = d, \quad \beta_8 = f, \quad \beta_9 = i_3.$$

Таким образом, уравнение (1.14) при выполнении группы условий (1.15) сводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta_1 + \beta_2u + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_8)v^2 + \beta_6u^2}{(\beta_3 - \beta_7)u + 2(\beta_4 - \beta_8)vu + (\beta_9 - \beta_5)u^2}, \quad (1.16)$$

после чего исследуемое уравнение интегрируется в элементарных функциях.

Действительно, интегрируя тождество (1.14), получаем соотношение

$$d\left[\frac{(\beta_3 - \beta_7)v}{u}\right] + d\left[\frac{(\beta_4 - \beta_8)v^2}{u}\right] + d[(\beta_9 - \beta_5)v] +$$
$$+ d\left[\frac{\beta_1}{u}\right] - d[\beta_2 \ln|u|] - d[\beta_6u] = 0,$$

которое в координатах (x, y, z) позволяет получить первый интеграл в виде

$$\frac{(\beta_4 - \beta_8)z^2 - \beta_6y^2 + (\beta_3 - \beta_7)zx + (\beta_9 - \beta_5)zy + \beta_1x^2}{yx} -$$
$$- \beta_2 \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \text{const}. \quad (1.17)$$

Таким образом, можно сделать вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы третьего порядка, зависящей от 9 параметров:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 z^2/x + \beta_5 zy/x + \beta_6 y^2/x}{\beta_7 x + \beta_5 y + \beta_8 z},$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta_3 y + (2\beta_4 - \beta_8) zy/x + \beta_9 y^2/x}{\beta_7 x + \beta_5 y + \beta_8 z}.$$

Следствие 1.1. *Система третьего порядка на множестве*

$$\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus \{\alpha = 0,\ \alpha = \pi\} \times \mathbf{R}^2\{z_1, z_2\},$$

зависящая от 9 *параметров*

$$\begin{gathered}\dot\alpha = \beta_7 \sin\alpha + \beta_5 z_1 + \beta_8 z_2,\\ \dot z_2 = \beta_1 \sin\alpha\cos\alpha + \beta_2 z_1 \cos\alpha + \beta_3 z_2 \cos\alpha +\\ + \beta_4 z_2^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_5 z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_6 z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\ \dot z_1 = \beta_3 z_1 \cos\alpha + (2\beta_4 - \beta_8) z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_9 z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\end{gathered} \tag{1.18}$$

обладает, вообще говоря, трансцендентным первым интегралом, выражающимся через элементарные функции:

$$\frac{(\beta_4 - \beta_8) z_2^2 - \beta_6 z_1^2 + (\beta_3 - \beta_7) z_2 \sin\alpha + (\beta_9 - \beta_5) z_2 z_1 + \beta_1 \sin^2\alpha^2}{z_1 \sin\alpha} - \\ - \beta_2 \ln\left|\frac{z_1}{\sin\alpha}\right| = \mathrm{const}. \tag{1.19}$$

В частности, система (1.18) *при*

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_9 = 0, \quad \beta_6 = \beta_8 = -1, \quad \beta_7 = b$$

приводится к системе (1.6).

Для нахождения дополнительного первого интеграла неавтономной системы (1.12) *используется найденный первый интеграл* (1.17), *выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.*

Итак, рассматриваемые в данной работе динамические системы относятся к системам с переменной диссипацией с нулевым средним по имеющейся периодической координате. Более того, такие системы часто обладают полным списком первых интегралов, выражающихся через элементарные функции.

Метод приведения исходных систем уравнений с правыми частями, содержащими полиномы от тригонометрических функций, к системам с полиномиальными правыми частями позволяет искать (или же доказывать их отсутствие) первые интегралы для систем более общего вида, а не только тех, которые обладают указанными симметриями (см. также [74]).

§ 2. СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ СВЯЗИ

В данном параграфе систематизируются как некоторые опубликованные ранее, так и полученные новые результаты по исследованию уравнений движения осесимметричного трехмерного (3D-) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твердых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая величину скорости некоторой характерной точки твердого тела во все время движения оставаться постоянной во времени, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи (см. также [1, 6, 7, 10—14, 16, 21, 22, 27, 37, 47, 55, 57, 60, 64—67, 69—75]).

Ранее в [47] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющих существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [74] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В настоящем параграфе полученные ранее и в настоящее время результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

1. Более общая задача о движении со следящей силой. Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела с передним плоским торцом (двумерным диском) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [38]. Если (v, α, β_1) — полярные координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр диска, лежащий на оси симметрии тела), $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — проекции его угловой скорости на оси системы координат $Dx_1x_2x_3$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2, Dx_3 лежат в гиперплоскости диска, I_1, I_2, $I_3 = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [45], см. ниже), при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид

$$
\begin{gathered}
\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha + \Omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \Omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \\
+ \sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) = \frac{F_x}{m}, \\
\dot{v}\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \Omega_3 v\cos\alpha - \\
- \Omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \sigma\Omega_1\Omega_2 - \sigma\dot{\Omega}_3 = 0, \\
\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \Omega_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \\
- \Omega_2 v\cos\alpha - \sigma\Omega_1\Omega_3 + \sigma\dot{\Omega}_2 = 0, \qquad (2.1) \\
I_1\dot{\Omega}_1 = 0, \\
I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_3 = -z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \\
I_2\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered}
$$

где

$$
F_x = -S, \quad S = s(\alpha)v^2, \quad \sigma > 0, \quad v > 0. \qquad (2.2)
$$

Первые три уравнения (2.1) описывают движение центра масс в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^3$ в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3$, вторые же три получены из теоремы об изменении кинетического момента тела в осях Кенига.

Таким образом, фазовым пространством системы (2.1) шестого порядка является прямое произведение

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^2 \times \mathrm{so}(3) \tag{2.3}$$

трехмерного многообразия на алгебру Ли so(3).

Сразу же заметим, что система (2.1), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3, \tag{2.4}$$

обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \mathrm{const}. \tag{2.5}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \tag{2.6}$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [74])

$$v \equiv \mathrm{const}, \tag{2.7}$$

то в системе (2.1) вместо F_x будет стоять величина

$$T - s(\alpha)v^2, \quad \sigma = DC. \tag{2.8}$$

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (2.7). Действительно, формально выражая величину T, в силу системы (2.1) получим при $\cos\alpha \neq 0$

$$\begin{gathered} T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = m\sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) + s(\alpha)v^2 \times \\ \times \left[1 - \frac{m\sigma}{I_2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left[z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right]\right]. \end{gathered} \tag{2.9}$$

При получении равенства (2.9) используется условие (2.7).

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы по причине наличия в ней следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (2.7). Во-вторых, процедура позволяет понизить порядок системы. Действительно, система (2.1) в результате действий порождает независимую систему четвертого порядка вида

$$
\begin{gathered}
\dot{\alpha} v \cos\alpha \cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin\alpha \sin\beta_1 + \Omega_3 v \cos\alpha - \sigma\dot{\Omega}_3 = 0, \\
\dot{\alpha} v \cos\alpha \sin\beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin\alpha \cos\beta_1 - \Omega_2 v \cos\alpha + \sigma\dot{\Omega}_2 = 0, \\
I_2\dot{\Omega}_2 = -z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \\
I_2\dot{\Omega}_3 = y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2,
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v.

Система (2.10) эквивалентна следующей:

$$
\begin{gathered}
\dot{\alpha} v \cos\alpha + v\cos\alpha[\Omega_3\cos\beta_1 - \Omega_2\sin\beta_1] + \sigma[-\dot{\Omega}_3\cos\beta_1 + \dot{\Omega}_2\sin\beta_1] = 0, \\
\dot{\beta}_1 v \sin\alpha - v\cos\alpha[\Omega_2\cos\beta_1 + \Omega_3\sin\beta_1] + \sigma[\dot{\Omega}_2\cos\beta_1 + \dot{\Omega}_3\sin\beta_1] = 0, \\
\dot{\Omega}_2 = -\frac{v^2}{I_2} z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \\
\dot{\Omega}_3 = \frac{v^2}{I_2} y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha).
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

Введем новые квазискорости в системе:

$$
z_1 = \Omega_2\cos\beta_1 + \Omega_3\sin\beta_1, \quad z_2 = -\Omega_2\sin\beta_1 + \Omega_3\cos\beta_1. \tag{2.12}
$$

Как видно из (2.11), на многообразии

$$
O = \left\{(\alpha, \beta_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbf{R}^4 \colon \alpha = \frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \tag{2.13}
$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}_1$. Формально, таким образом, на многообразии (2.13) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат (v, α, β_1), а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (2.11) вырождается.

Отсюда следует, что система (2.11) вне и только вне многообразия (2.13) эквивалентна системе

$$
\begin{gathered}
\dot{\alpha} = -z_2 + \frac{\sigma v}{I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\left[z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right],\\
\dot{z}_2 = \frac{v^2}{I_2}s(\alpha)\left[z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right] -\\
- z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma v}{I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}z_1\left[z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right],\\
\dot{z}_1 = z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left[-\frac{v^2}{I_2}s(\alpha) + \frac{\sigma v}{I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}z_2\right]\times\\
\times\left[z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right],\\
\dot{\beta}_1 = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma v}{I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left[z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right].
\end{gathered}
\tag{2.14}
$$

Здесь и далее зависимость от пары переменных $(\alpha, \beta_1, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, z_1/v, z_2/v)$ в силу (2.12).

Нарушение теоремы единственности для системы (2.11) на многообразии (2.13) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (2.13) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (2.14), пересекая многообразие (2.13) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Убедимся в этом.

Как показано выше, для поддержания связи вида (2.7) необходимо выбрать значение T при $\cos\alpha \neq 0$ в виде (2.9).

Пусть

$$
\lim_{\alpha\to\pi/2}\frac{[z_N(\alpha, \beta_1, \Omega/v)\sin\beta_1 + y_N(\alpha, \beta_1, \Omega/v)\cos\beta_1]s(\alpha)}{\cos\alpha} = L\left(\frac{\Omega}{v}\right).
\tag{2.15}
$$

Заметим, что $|L| < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$
\lim_{\alpha\to\pi/2}\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\left[z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right]s(\alpha)\right)\right| < +\infty.
\tag{2.16}
$$

При $\alpha = \pi/2$ нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \Omega\right) = m\sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - \frac{m\sigma L v^2}{I_2}, \tag{2.17}$$

где значения Ω_2, Ω_3 произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W, необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \Omega\right) = \frac{mv^2}{R_0}, \tag{2.18}$$

где R_0 — расстояние CW.

Равенства (2.9) и (2.18) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (2.13), что и доказывает сделанное замечание.

2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости.

2.1. ***Приведенная система.*** В соответствии с выбором аналитических функций Чаплыгина [45] динамические функции s, y_N и z_N примем в виде

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = y_0(\alpha, \beta_1) = A\sin\alpha\cos\beta_1,$$
$$z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = z_0(\alpha, \beta_1) = A\sin\alpha\sin\beta_1, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0, \tag{2.19}$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от угла α).

Тогда, благодаря неинтегрируемой связи (2.7), вне и только вне многообразия (2.13) динамическая часть уравнений движения (системы (2.14)) примет вид аналитической системы

$$\begin{gathered}
\dot\alpha = -z_2 + \frac{\sigma A B v}{I_2}\sin\alpha,\\
\dot z_2 = \frac{ABv^2}{I_2}\sin\alpha\cos\alpha - z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
\dot z_1 = z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
\dot\beta_1 = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.
\end{gathered} \tag{2.20}$$

Вводя далее безразмерные переменные, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$z_k \mapsto n_0 v z_k, \quad k = 1, 2, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad b = \sigma n_0, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle ' \rangle, \tag{2.21}$$

приведем систему (2.20) к виду

$$\begin{gathered} \alpha' = -z_2 + b \sin\alpha, \\ z_2' = \sin\alpha\cos\alpha - z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ z_1' = z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \end{gathered} \tag{2.22}$$

$$\beta_1' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{2.23}$$

Видно, что в системе четвертого порядка (2.22), (2.23), которую, как будет показано далее, можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbf{S}^2$, образовалась независимая система третьего порядка (2.22) на своем трехмерном многообразии.

2.2. ***Полный список инвариантных соотношений.*** Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (2.22) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{gathered} \frac{dz_2}{d\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - z_1^2 \cos\alpha/\sin\alpha}{-z_2 + b\sin\alpha}, \\ \frac{dz_1}{d\alpha} = \frac{z_1 z_2 \cos\alpha/\sin\alpha}{-z_2 + b\sin\alpha}. \end{gathered} \tag{2.24}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (2.24) в алгебраическом виде:

$$\begin{gathered} \frac{dz_2}{d\tau} = \frac{\tau - z_1^2/\tau}{-z_2 + b\tau}, \\ \frac{dz_1}{d\tau} = \frac{z_1 z_2/\tau}{-z_2 + b\tau}. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z_k = u_k \tau, \quad k = 1, 2, \tag{2.26}$$

получаем из системы (2.25)

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau}+u_2&=\frac{1-u_1^2}{-u_2+b},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau}+u_1&=\frac{u_1u_2}{-u_2+b},
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

что эквивалентно следующей:

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau}&=\frac{1-u_1^2+u_2^2-bu_2}{-u_2+b},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau}&=\frac{2u_1u_2-bu_1}{-u_2+b}.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (2.28) неавтономное уравнение первого порядка

$$
\frac{du_2}{du_1}=\frac{1-u_1^2+u_2^2-bu_2}{2u_1u_2-bu_1},
\tag{2.29}
$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$
d\left(\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1}\right)=0.
\tag{2.30}
$$

Итак, уравнение (2.29) имеет следующий первый интеграл:

$$
\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const},
\tag{2.31}
$$

который в прежних переменных выглядит как

$$
\frac{z_2^2+z_1^2-bz_2\sin\alpha+\sin^2\alpha}{z_1\sin\alpha}=C_1=\mathrm{const}.
\tag{2.32}
$$

Замечание 2.1. Рассмотрим систему (2.22) с переменной диссипацией с нулевым средним [74], становящейся консервативной при $b=0$:

$$
\begin{aligned}
\alpha'&=-z_2,\\
z_2'&=\sin\alpha\cos\alpha-z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
z_1'&=z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$z_2^2 + z_1^2 + \sin^2\alpha = C_1^* = \mathrm{const}, \tag{2.34}$$

$$z_1 \sin\alpha = C_2^* = \mathrm{const}. \tag{2.35}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (2.34), (2.35) также является первым интегралом системы (2.33). Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$z_2^2 + z_1^2 - bz_2\sin\alpha + \sin^2\alpha \tag{2.36}$$

и (2.35) по отдельности не является первым интегралом системы (2.22). Однако отношение функций (2.36), (2.35) является первым интегралом системы (2.35) при любом b.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (2.22). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (2.31) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{2.37}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0 \tag{2.38}$$

и фазовое пространство системы (2.22) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (2.37).

Таким образом, в силу соотношения (2.31) первое уравнение системы (2.28) можно записать в виде

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \tag{2.39}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\Big\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\Big\}, \tag{2.40}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (2.38). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (2.22) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(b - u_2)du_2}{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\}/2}. \tag{2.41}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\alpha|. \tag{2.42}$$

Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = w_1, \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4, \tag{2.43}$$

то правую часть равенства (2.41) можно записать в форме

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4w_1^2)}{(b_1^2 - 4w_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}} - b\int \frac{dw_1}{(b_1^2 - 4w_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{b}{2}I_1, \tag{2.44}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dw_3}{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}(w_3 \pm C_1)}, \quad w_3 = \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}. \tag{2.45}$$

При вычислении интеграла (2.45) возможны три случая.

I. При $b > 2$

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4} + \sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right| +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{b^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4} - \sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right| + \mathrm{const}. \tag{2.46}$$

II. При $b < 2$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}}\arcsin\frac{\pm C_1 w_3 + b_1^2}{b_1(w_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{2.47}$$

III. При $b = 2$

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{C_1(w_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{2.48}$$

Возвращаясь к переменной

$$w_1 = \frac{z_2}{\sin\alpha} - \frac{b}{2}, \tag{2.49}$$

имеем окончательный вид для величины I_1.

I. При $b > 2$

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} \pm 2w_1}{\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} \mp 2w_1}{\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \mathrm{const}. \tag{2.50}$$

II. При $b < 2$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{2.51}$$

III. При $b = 2$

$$I_1 = \mp \frac{2w_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{2.52}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (2.22) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 2.2. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (2.31). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{z_2}{\sin\alpha}, \frac{z_1}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{2.53}$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (2.22), (2.23) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.23).

Поскольку

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{u_1(2u_2 - b)}{(b-u_2)\tau}, \quad \frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{u_1}{(b-u_2)\tau}, \tag{2.54}$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta_1} = 2u_2 - b. \tag{2.55}$$

Очевидно, что при $u_1 \neq 0$ выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(b \pm \sqrt{b_1^2 - 4\left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2}\right), \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4. \tag{2.56}$$

Тогда интегрирование квадратуры

$$\beta_1 + \mathrm{const} = \pm \int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(u_1 - C_1/2)^2}} \tag{2.57}$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm \arcsin \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \mathrm{const}. \tag{2.58}$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}}, \tag{2.59}$$

или, при переходе к старым переменным,

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2z_1 - C_1 \sin\alpha}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}\sin\alpha}. \tag{2.60}$$

В принципе, для получения дополнительного инвариантного соотношения, «привязывающего» уравнение (2.23), на последнем равенстве можно остановиться, при этом в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (2.31). Но мы проведем некоторые преобразования для получения следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (2.31)):

$$\mathrm{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \frac{(u_1^2 - u_2^2 + bu_2 - 1)^2}{u_1^2(4u_2^2 - 4bu_2 + b^2)}. \tag{2.61}$$

Возвращаясь к старым координатам, получаем дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\mathrm{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \frac{(z_1^2 - z_2^2 + bz_2\sin\alpha - \sin^2\alpha)^2}{z_1^2(4z_2^2 - 4bz_2\sin\alpha + b^2\sin^2\alpha)}, \tag{2.62}$$

или, окончательно,

$$-\beta_1 \pm \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{z_1^2 - z_2^2 + bz_2\sin\alpha - \sin^2\alpha}{z_1(2z_2 - b\sin\alpha)} = C_3 = \mathrm{const}. \tag{2.63}$$

Итак, в рассматриваемом случае в системе динамических уравнений (2.1) при условии (2.19) имеется пять инвариантных соотношений: аналитическая неинтегрируемая связь вида (2.7); циклический первый интеграл вида (2.5), (2.6); первый интеграл вида (2.32); первый интеграл, заданный соотношениями (2.46)—(2.53), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций; наконец, трансцендентный первый интеграл вида (2.63).

Теорема 2.1. *Система* (2.1) *при условиях* (2.7), (2.5), (2.6), (2.19) *обладает пятью инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

2.3. *Топологические аналогии.* Рассмотрим систему уравнений третьего порядка

$$\begin{gathered}\ddot{\xi} + b_*\dot{\xi}\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \dot{\eta}_1{}^2\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0,\\ \ddot{\eta}_1 + b_*\dot{\eta}_1\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_1\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} = 0, \quad b_* > 0,\end{gathered} \tag{2.64}$$

описывающую закрепленный сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости, т. е. механическую систему в неконсервативном поле сил [83]. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 4, но фазовая переменная η_1 — циклическая, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка.

Ее фазовым пространством является касательное расслоение

$$T\mathbf{S}^2\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \xi, \eta_1\} \tag{2.65}$$

к двумерной сфере $\mathbf{S}^2\{\xi, \eta_1\}$, при этом уравнение больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0 \tag{2.66}$$

задает семейство интегральных многообразий.

Нетрудно убедиться, что система (2.64) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (2.65) к двумерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Система* (2.1) *при условиях* (2.7), (2.5), (2.6), (2.19) *эквивалентна динамической системе* (2.64).

Действительно, достаточно положить $\alpha = \xi$, $\beta_1 = \eta_1$, $b = -b_*$.

О более общих топологических аналогиях см. также [74].

3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости.

3.1. *Введение зависимости от угловой скорости.* Данный раздел посвящен динамике трехмерного твердого тела в трехмерном пространстве. Но поскольку здесь исследуется случай движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций. К тому же данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на двумерный диск, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}) = (x_N, y_N, z_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [68].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{2.67}$$

где $R = (R_1, R_2, R_3)$ — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции R от угловой скорости гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \tag{2.68}$$

Здесь (h_1, h_2, h_3) — некоторые положительные параметры (ср. с [74]).

Поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то применительно к нашей задаче

$$x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1 \frac{\Omega_3}{v}, \quad x_{3N} = z_N = Q_3 + h_1 \frac{\Omega_2}{v}. \tag{2.69}$$

3.2. *Приведенная система.* В соответствии с выбором аналитических функций Чаплыгина [45]

$$Q_2 = A \sin\alpha \cos\beta_1, \quad Q_3 = A \sin\alpha \sin\beta_1, \quad A > 0, \tag{2.70}$$

динамические функции s, y_N и z_N примем в виде

$$
\begin{gathered}
s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad B > 0,\\
y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha\cos\beta_1 - h\frac{\Omega_3}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0,\\
z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha\sin\beta_1 + h\frac{\Omega_2}{v}, \quad h = h_2 > 0, \quad v \neq 0,
\end{gathered}
\tag{2.71}
$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т. е. присутствует зависимость момента от угловой скорости). Причем $h_1 = h_2$ в силу динамической симметрии тела.

Тогда, благодаря неинтегрируемой связи (2.7), вне и только вне многообразия (2.13) динамическая часть уравнений движения (система (2.14)) примет вид аналитической системы

$$
\begin{gathered}
\dot\alpha = -\left(1 + \frac{\sigma Bh}{I_2}\right)z_2 + \frac{\sigma ABv}{I_2}\sin\alpha,\\
\dot z_2 = \frac{ABv^2}{I_2}\sin\alpha\cos\alpha - \left(1 + \frac{\sigma Bh}{I_2}\right)z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{Bhv}{I_2}z_2\cos\alpha,\\
\dot z_1 = \left(1 + \frac{\sigma Bh}{I_2}\right)z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{Bhv}{I_2}z_1\cos\alpha,\\
\dot\beta_1 = \left(1 + \frac{\sigma Bh}{I_2}\right)z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.
\end{gathered}
\tag{2.72}
$$

Вводя далее безразмерные переменную, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$
z_k \mapsto n_0 v z_k, \quad k = 1, 2, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad b = \sigma n_0, \quad H_1 = \frac{Bh}{I_2 n_0}, \quad \langle\cdot\rangle = n_0 v\langle{}'\rangle,
\tag{2.73}
$$

приведем систему (2.72) к виду

$$
\begin{gathered}
\alpha' = -(1 + bH_1)z_2 + b\sin\alpha,\\
z_2' = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 z_2\cos\alpha,\\
z_1' = (1 + bH_1)z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 z_1\cos\alpha;
\end{gathered}
\tag{2.74}
$$

$$
\beta_1' = (1 + bH_1)z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.
\tag{2.75}
$$

Видно, что в системе четвертого порядка (2.74), (2.75), которую, как будет показано ниже, можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbf{S}^2$, образовалась независимая система третьего порядка (2.74) на своем трехмерном многообразии.

3.3. ***Полный список инвариантных соотношений.*** Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (2.74) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{gathered}\frac{dz_2}{d\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)z_1^2\cos\alpha/\sin\alpha - H_1z_2\cos\alpha}{-(1+bH_1)z_2 + b\sin\alpha},\\ \frac{dz_1}{d\alpha} = \frac{(1+bH_1)z_1z_2\cos\alpha/\sin\alpha - H_1z_1\cos\alpha}{-(1+bH_1)z_2 + b\sin\alpha}.\end{gathered} \tag{2.76}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (2.76) в алгебраическом виде:

$$\begin{gathered}\frac{dz_2}{d\tau} = \frac{\tau - (1+bH_1)z_1^2/\tau - H_1z_2}{-(1+bH_1)z_2 + b\tau},\\ \frac{dz_1}{d\tau} = \frac{(1+bH_1)z_1z_2/\tau - H_1z_1}{-(1+bH_1)z_2 + b\tau}.\end{gathered} \tag{2.77}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z_k = u_k\tau, \quad k = 1, 2, \tag{2.78}$$

получаем из системы (2.77)

$$\begin{gathered}\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{1 - (1+bH_1)u_1^2 - H_1u_2}{-(1+bH_1)u_2 + b},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{(1+bH_1)u_1u_2 - H_1u_1}{-(1+bH_1)u_2 + b},\end{gathered} \tag{2.79}$$

что эквивалентно следующей:

$$\begin{gathered}\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{(1+bH_1)(u_2^2 - u_1^2) - (b+H_1)u_2 + 1}{-(1+bH_1)u_2 + b},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2(1+bH_1)u_1u_2 - (b+H_1)u_1}{-(1+bH_1)u_2 + b}.\end{gathered} \tag{2.80}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (2.80) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (1+bH_1)(u_1^2 - u_2^2) - (b+H_1)u_2}{2(1+bH_1)u_1u_2 - (b+H_1)u_1}, \tag{2.81}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1+bH_1)(u_2^2+u_1^2)-(b+H_1)u_2+1}{u_1}\right)=0. \qquad (2.82)$$

Итак, уравнение (2.81) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1+bH_1)(u_2^2+u_1^2)-(b+H_1)u_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \qquad (2.83)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\frac{(1+bH_1)(z_2^2+z_1^2)-(b+H_1)z_2\sin\alpha+\sin^2\alpha}{z_1\sin\alpha}=C_1=\mathrm{const}. \qquad (2.84)$$

Замечание 2.3. Рассмотрим систему (2.74) с переменной диссипацией с нулевым средним [74], становящейся консервативной при $b=H_1$:

$$\begin{gathered}\alpha'=-(1+b^2)z_2+b\sin\alpha,\\ z_2'=\sin\alpha\cos\alpha-(1+b^2)z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-bz_2\cos\alpha,\\ z_1'=(1+b^2)z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-bz_1\cos\alpha.\end{gathered} \qquad (2.85)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1+b^2)(z_2^2+z_1^2)-2bz_2\sin\alpha+\sin^2\alpha=C_1^*=\mathrm{const}, \qquad (2.86)$$

$$z_1\sin\alpha=C_2^*=\mathrm{const}. \qquad (2.87)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (2.86), (2.87) также является первым интегралом системы (2.85). Но при $b\neq H_1$ каждая из функций

$$(1+bH_1)(z_2^2+z_1^2)-(b+H_1)z_2\sin\alpha+\sin^2\alpha \qquad (2.88)$$

и (2.87) по отдельности не является первым интегралом системы (2.74). Однако отношение функций (2.88), (2.87) является первым интегралом системы (2.87) при любых b, H_1.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (2.74). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (2.83) при $u_1\neq 0$:

$$\left(u_2-\frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2(1+bH_1)}\right)^2=\frac{(b-H_1)^2+C_1^2-4}{4(1+bH_1)^2}. \qquad (2.89)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0 \tag{2.90}$$

и фазовое пространство системы (2.74) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (2.89).

Таким образом, в силу соотношения (2.83) первое уравнение системы (2.80) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1+bH_1)u_2^2 - 2(b+H_1)u_2 + 2 - C_1U_1(C_1,u_2)}{b-(1+bH_1)u_2}, \tag{2.91}$$

где

$$U_1(C_1,u_2) = \frac{1}{2(1+bH_1)}\{C_1 \pm U_2(C_1,u_2)\}, \tag{2.92}$$

$$U_2(C_1,u_2) = \sqrt{C_1^2 - 4(1+bH_1)(1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2)},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (2.90). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (2.74) примет вид

$$\int\frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= \int\frac{(b-(1+bH_1)u_2)du_2}{2(1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2)-C_1\{C_1 \pm U_2(C_1,u_2)\}/(2(1+bH_1))}. \tag{2.93}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\alpha|. \tag{2.94}$$

Если

$$u_2 - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)} = w_1, \quad b_1^2 = (b-H_1)^2 + C_1^2 - 4, \tag{2.95}$$

то правая часть равенства (2.93) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2-4(1+bH_1)w_1^2)}{(b_1^2-4(1+bH_1)w_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)w_1^2}} - (b-H_1)\times$$

$$\times(1+bH_1)\int\frac{dw_1}{(b_1^2-4(1+bH_1)w_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)w_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)w_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{b-H_1}{2} I_1, \tag{2.96}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dw_3}{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}(w_3 \pm C_1)}, \quad w_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)w_1^2}. \tag{2.97}$$

При вычислении интеграла (2.97) возможны три случая.

I. При $|b - H_1| > 2$

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2 - 4}} \times$$
$$\times \ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} + \sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right| +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2 - 4}} \times$$
$$\times \ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} - \sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right| + \mathrm{const}. \tag{2.98}$$

II. При $|b - H_1| < 2$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b-H_1)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 w_3 + b_1^2}{b_1(w_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{2.99}$$

III. При $|b - H_1| = 2$

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{C_1(w_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{2.100}$$

Возвращаясь к переменной

$$w_1 = \frac{z_2}{\sin\alpha} - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}, \tag{2.101}$$

имеем окончательный вид для величины I_1.

I. При $|b - H_1| > 2$

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2 - 4}} \times$$
$$\times \ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} \pm 2(1+bH_1)w_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)^2 w_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\times$$
$$\times\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4}\mp 2(1+bH_1)w_1}{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2w_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right|+\mathrm{const}. \tag{2.102}$$

II. При $|b-H_1|<2$

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4-(b-H_1)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2w_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2w_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}. \tag{2.103}$$

III. При $|b-H_1|=2$

$$I_1=\mp\frac{2(1+bH_1)w_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2w_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}. \tag{2.104}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (2.74) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 2.4. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (2.83). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln|\sin\alpha|+G_2\left(\sin\alpha,\frac{z_2}{\sin\alpha},\frac{z_1}{\sin\alpha}\right)=C_2=\mathrm{const}. \tag{2.105}$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (2.74), (2.75) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.75).

Поскольку

$$\frac{du_1}{d\tau}=\frac{u_1(2(1+bH_1)u_2-(b+H_1))}{(b-(1+bH_1)u_2)\tau},\quad \frac{d\beta_1}{d\tau}=\frac{(1+bH_1)u_1}{(b-(1+bH_1)u_2)\tau}, \tag{2.106}$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta_1}=2u_2-\frac{b+H_1}{1+bH_1}. \tag{2.107}$$

Очевидно, что при $u_1 \neq 0$ выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2(1+bH_1)}\Big((b+H_1) \pm \sqrt{b_1^2 - (2(1+bH_1)u_1 - C_1)^2}\Big), \quad (2.108)$$
$$b_1^2 = (b-H_1)^2 + C_1^2 - 4.$$

Тогда интегрирование квадратуры

$$\beta_1 + \mathrm{const} = \pm(1+bH_1)\int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - (2(1+bH_1)u_1 - C_1)^2}} \quad (2.109)$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm \arcsin \frac{2(1+bH_1)u_1 - C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \mathrm{const}. \quad (2.110)$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2(1+bH_1)u_1 - C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}}, \quad (2.111)$$

или, при переходе к старым переменным,

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2(1+bH_1)z_1 - C_1 \sin\alpha}{\sqrt{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}\,\sin\alpha}. \quad (2.112)$$

В принципе, для получения дополнительного инвариантного соотношения, «привязывающего» уравнение (2.75), на последнем равенстве можно остановиться, при этом в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (2.83). Но мы проведем некоторые преобразования для получения следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (2.83)):

$$\operatorname{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] =$$
$$= \frac{((1+bH_1)u_1^2 - (1+bH_1)u_2^2 + (b+H_1)u_2 - 1)^2}{u_1^2(2(1+bH_1)u_2 - (b+H_1))^2}. \quad (2.113)$$

Возвращаясь к старым координатам, получаем дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\operatorname{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] =$$
$$= \frac{((1+bH_1)z_1^2 - (1+bH_1)z_2^2 + (b+H_1)z_2 \sin\alpha - \sin^2\alpha)^2}{z_1^2(2(1+bH_1)z_2 - (b+H_1)\sin\alpha)^2}, \quad (2.114)$$

или, окончательно,

$$-\beta_1 \pm \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{(1+bH_1)z_1^2-(1+bH_1)z_2^2+(b+H_1)z_2\sin\alpha-\sin^2\alpha}{z_1(2(1+bH_1)z_2-(b+H_1)\sin\alpha)} = \\ = C_3 = \text{const}. \tag{2.115}$$

Итак, в рассматриваемом случае в системе динамических уравнений (2.1) при условии (2.71) имеется пять инвариантных соотношений: аналитическая неинтегрируемая связь вида (2.7); циклический первый интеграл вида (2.5), (2.6); первый интеграл вида (2.84); первый интеграл, заданный соотношениями (2.98)—(2.105), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций; наконец, трансцендентный первый интеграл вида (2.115).

Теорема 2.3. *Система* (2.1) *при условиях* (2.7), (2.5), (2.6), (2.71) *обладает пятью инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

3.4. *Топологические аналогии.* Рассмотрим систему уравнений третьего порядка

$$\begin{gathered} \ddot\xi + (b_* - H_1^*)\dot\xi\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \dot\eta_1{}^2\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\ \ddot\eta_1 + (b_* - H_1^*)\dot\eta_1\cos\xi + \dot\xi\dot\eta_1\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} = 0, \quad b_* > 0, \quad H_1^* > 0, \end{gathered} \tag{2.116}$$

описывающую закрепленный сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды при наличии зависимости момента сил от угловой скорости, т. е. механическую систему в неконсервативном поле сил [74]. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 4, но фазовая переменная η_1 — циклическая, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка.

Ее фазовым пространством является касательное расслоение

$$T\mathbf{S}^2\{\dot\xi, \dot\eta_1, \xi, \eta_1\} \tag{2.117}$$

к двумерной сфере $\mathbf{S}^2\{\xi, \eta_1\}$, при этом уравнение больших кругов

$$\dot\eta_1 \equiv 0 \tag{2.118}$$

задает семейство интегральных многообразий.

Нетрудно убедиться, что система (2.116) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (2.117) к двумерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. *Система* (2.1) *при условиях* (2.7), (2.5), (2.6), (2.71) *эквивалентна динамической системе* (2.116).

Действительно, достаточно положить $\alpha = \xi$, $\beta_1 = \eta_1$, $b = -b_*$, $H_1 = -H_1^*$.

О более общих топологических аналогиях см. также [74].

§ 3. СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ЦЕНТРА МАСС

В данном параграфе систематизируются как некоторые опубликованные ранее, так и полученные новые результаты по исследованию уравнений движения осесимметричного трехмерного (3D-) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твердых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая во все время движения центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил (см. также [1, 6, 7, 10—14, 16, 21, 22, 27, 37, 47, 55, 56, 60, 64—67, 69—75]).

Ранее в [38] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющих существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [74] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данном параграфе полученные новые результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

1. Более общая задача о движении со следящей силой. Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела с передним плоским торцом (двумерным диском) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [74]. Если (v, α, β_1) — сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр диска, лежащий на оси симметрии тела), $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — компоненты его угловой скорости в системе координат $Dx_1x_2x_3$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2, Dx_3 лежат в гиперплоскости диска, I_1, I_2, $I_3 = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [45], см. ниже), при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид

$$
\begin{gathered}
\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha + \Omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \\
- \Omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) = \frac{F_x}{m}, \\
\dot{v}\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \Omega_3 v\cos\alpha - \\
- \Omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \sigma\Omega_1\Omega_2 - \sigma\dot{\Omega}_3 = 0, \\
\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \Omega_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \\
- \Omega_2 v\cos\alpha - \sigma\Omega_1\Omega_3 + \sigma\dot{\Omega}_2 = 0, \qquad (3.1) \\
\dot{\Omega}_1 = 0, \\
I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_3 = -z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \\
I_2\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered}
$$

где

$$
F_x = -S, \quad S = s(\alpha)v^2, \quad \sigma > 0, \quad v > 0. \qquad (3.2)
$$

Первые три уравнения (3.1) описывают движение центра масс в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^3$ в проекциях на систему координат

$Dx_1x_2x_3$. Вторые же три уравнения (3.1) получены из теоремы об изменении кинетического момента тела в осях Кенига.

Таким образом, фазовым пространством системы (3.1) шестого порядка является прямое произведение

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^2 \times \mathrm{so}(3) \tag{3.3}$$

трехмерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(3)$.

Сразу же заметим, что система (3.1) в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3 \tag{3.4}$$

обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \mathrm{const}. \tag{3.5}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \tag{3.6}$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [47])

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathrm{const}, \tag{3.7}$$

то в системе (3.1) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0, \quad \sigma = DC. \tag{3.8}$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{3.9}$$

Случай (3.9) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы пятого порядка после некоторого преобразования системы шестого порядка (3.1).

Действительно, пусть выполнено условие на величину T

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = \sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{3} \tau_{i,j}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\Omega_i\Omega_j = T_1\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)v^2,$$
$$\Omega_0 = v. \tag{3.10}$$

Введем для начала квазискорости:

$$z_1 = \Omega_2\cos\beta_1 + \Omega_3\sin\beta_1, \quad z_2 = -\Omega_2\sin\beta_1 + \Omega_3\cos\beta_1. \tag{3.11}$$

Систему (3.1) в случаях (3.5), (3.6) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}
\dot v + \sigma(z_1^2 + z_2^2)\cos\alpha - \\
- \sigma\frac{v^2}{I_2}s(\alpha)\sin\alpha\left[y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 + z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right] = \\
= \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \Omega/v)\,v^2 - s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha, \\
\dot\alpha v + z_2 v - \sigma(z_1^2 + z_2^2)\sin\alpha - \\
-\sigma\frac{v^2}{I_2}s(\alpha)\cos\alpha\left[y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 + z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right] = \\
= \frac{s(\alpha)v^2 - T_1(\alpha, \beta_1, \Omega/v)\,v^2}{m}\sin\alpha, \\
\dot\Omega_3 = \frac{v^2}{I_2}y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \\
\dot\Omega_2 = -\frac{v^2}{I_2}z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \\
\dot\beta_1\sin\alpha - z_1\cos\alpha - \\
- \frac{\sigma v}{I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left[z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right] = 0.
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, 2, \quad \langle\cdot\rangle = n_1 v\langle'\rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \mathrm{const}, \tag{3.13}$$

систему (3.12) преобразуем к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \tag{3.14}$$

$$\alpha' = -Z_2 + \sigma n_1(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha +$$
$$+ \frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha)\cos\alpha[y_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\cos\beta_1 + z_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\sin\beta_1] -$$
$$- \frac{T_1(\alpha,\beta_1,n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1}\sin\alpha, \tag{3.15}$$

$$Z_2' = \frac{s(\alpha)}{I_2 n_1^2}[1 - \sigma n_1 Z_2 \sin\alpha] \times$$
$$\times [y_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\cos\beta_1 + z_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\sin\beta_1] -$$
$$- Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sigma n_1 Z_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha -$$
$$- \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}[z_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\cos\beta_1 - y_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\sin\beta_1] -$$
$$- Z_2\frac{T_1(\alpha,\beta_1,n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1}\cos\alpha, \tag{3.16}$$

$$Z_1' = \frac{1}{I_2 n_1^2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \times$$
$$\times [\sigma n_1 Z_2 \sin\alpha - 1]\,[z_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\cos\beta_1 - y_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\sin\beta_1] +$$
$$+ Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sigma n_1 Z_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha -$$
$$- \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 s(\alpha)\sin\alpha[z_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\sin\beta_1 + y_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\cos\beta_1] -$$
$$- Z_1\frac{T_1(\alpha,\beta_1,n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1}\cos\alpha, \tag{3.17}$$

$$\beta_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$
$$+ \frac{\sigma}{I_2 n_1}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}[z_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\cos\beta_1 - y_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\sin\beta_1], \tag{3.18}$$

$$\Psi(\alpha,\beta_1,Z_1,Z_2) = -\sigma n_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha +$$
$$+ \frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha)\sin\alpha[y_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\cos\beta_1 + z_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\sin\beta_1] +$$
$$+ \frac{T_1(\alpha,\beta_1,n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1}\cos\alpha.$$

Видно, что в системе пятого порядка (3.14)—(3.18) может быть выделена независимая подсистема четвертого порядка (3.15)—(3.18), рассматриваемая самостоятельно на своем четырехмерном фазовом пространстве.

В частности, при выполнении условия (3.9) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы четвертого порядка также возможен.

2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости.

2.1. ***Приведенная система.*** В соответствии с выбором аналитических функций Чаплыгина [45] динамические функции s и y_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = y_0(\alpha, \beta_1) = A\sin\alpha\cos\beta_1,$$
$$z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = z_0(\alpha, \beta_1) = A\sin\alpha\sin\beta_1, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0, \tag{3.19}$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от угла α).

Тогда благодаря условиям (3.7), (3.19) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (3.14)—(3.18)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2); \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered}\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha,\\ Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha,\\ Z_1' = Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha,\end{gathered} \tag{3.21}$$

$$\beta_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \tag{3.22}$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

где, как и выше, безразмерный параметр b и постоянная n_1 выбраны следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad n_1 = n_0. \tag{3.23}$$

Итак, система (3.20)—(3.22) может быть рассмотрена на своем фазовом пятимерном многообразии

$$W_1 = \mathbf{R}_+^1\{v\} \times T\mathbf{S}^2\{Z_1,\, Z_2,\, 0 \leqslant \alpha < 2\pi,\, 0 \leqslant \beta_1 < \pi\}, \tag{3.24}$$

т. е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к двумерной сфере $\mathbf{S}^2\{0 \leqslant \alpha < 2\pi,\ 0 \leqslant \beta_1 < \pi\}$.

2.2. *Полный список первых интегралов.* От системы (3.20)—(3.22) отделилась независимая система четвертого порядка (3.21), (3.22).

Заметим, что в силу (3.7) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (3.1), а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \beta_1, z_1, z_2) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + z_2^2) - 2\sigma z_2 v \sin\alpha = V_C^2 \tag{3.25}$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины z_1, z_2 выбираются в соответствии с (3.11)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (3.20)—(3.22) также существует аналитический интеграл, а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + Z_2^2) - 2bZ_2 \sin\alpha) = V_C^2 \tag{3.26}$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (3.26) позволяет, не решая системы (3.20)—(3.22), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + Z_2^2) - 2bZ_2 \sin\alpha}. \tag{3.27}$$

Поскольку фазовое пространство (3.24) системы (3.20)—(3.22) пятимерно, а в нем существуют асимптотические предельные множества, то равенство (3.26) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (3.20)—(3.22) во всем фазовом пространстве (ср. с [74]).

Разберем подробнее вопрос существования других (дополнительных) первых интегралов системы (3.20)—(3.22). Ее фазовое пространство расслаивается на поверхности

$$\{(v, \alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) \in W_1 \colon V_C = \mathrm{const}\}, \tag{3.28}$$

динамика на которых определяется с помощью первых интегралов системы (3.21), (3.22).

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (3.21) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{gathered}\frac{dZ_2}{d\alpha} = \\ = \frac{\sin\alpha\cos\alpha + bZ_2(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha - Z_1^2\cos\alpha/\sin\alpha}{-Z_2 + b(Z_1^2+Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}, \\ \frac{dZ_1}{d\alpha} = \frac{bZ_1(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + Z_1Z_2\cos\alpha/\sin\alpha}{-Z_2 + b(Z_1^2+Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}.\end{gathered} \tag{3.29}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (3.29) в алгебраическом виде:

$$\begin{gathered}\frac{dZ_2}{d\tau} = \frac{\tau + bZ_2(Z_1^2+Z_2^2) - bZ_2\tau^2 - Z_1^2/\tau}{-Z_2 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(Z_1^2+Z_2^2)}, \\ \frac{dZ_1}{d\tau} = \frac{bZ_1(Z_1^2+Z_2^2) - bZ_1\tau^2 + Z_1Z_2/\tau}{-Z_2 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(Z_1^2+Z_2^2)}.\end{gathered} \tag{3.30}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$Z_k = u_k\tau, \quad k = 1, 2, \tag{3.31}$$

получаем из системы (3.30)

$$\begin{gathered}\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2+u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{bu_1(u_1^2+u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)},\end{gathered} \tag{3.32}$$

что эквивалентно следующей:

$$\begin{gathered}\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)}.\end{gathered} \tag{3.33}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (3.33) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \tag{3.34}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1}\right)=0. \tag{3.35}$$

Итак, уравнение (3.34) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \tag{3.36}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\frac{Z_2^2+Z_1^2-bZ_2\sin\alpha+\sin^2\alpha}{Z_1\sin\alpha}=C_1=\mathrm{const}. \tag{3.37}$$

Замечание 3.1. Рассмотрим систему (3.21) с переменной диссипацией с нулевым средним [74], становящейся консервативной при $b=0$:

$$\begin{gathered}\alpha'=-Z_2,\\ Z_2'=\sin\alpha\cos\alpha-Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\ Z_1'=Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\end{gathered} \tag{3.38}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$Z_2^2+Z_1^2+\sin^2\alpha=C_1^*=\mathrm{const}, \tag{3.39}$$

$$Z_1\sin\alpha=C_2^*=\mathrm{const}. \tag{3.40}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.39), (3.40) также является первым интегралом системы (3.38). Но при $b\neq 0$ каждая из функций

$$Z_2^2+Z_1^2-bZ_2\sin\alpha+\sin^2\alpha \tag{3.41}$$

и (3.40) по отдельности не является первым интегралом системы (3.21). Однако отношение функций (3.41), (3.40) является первым интегралом системы (3.21) при любом b.

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.21). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.36) при $u_1\neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2-\frac{b}{2}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2}\right)^2=\frac{b^2+C_1^2}{4}-1. \tag{3.42}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0 \tag{3.43}$$

и фазовое пространство системы (3.21) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.42).

Таким образом, в силу соотношения (3.36) первое уравнение системы (3.33) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1-\tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)}, \tag{3.44}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\Big\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\Big\}, \tag{3.45}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.43), или вид уравнения Бернулли

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b-u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}. \tag{3.46}$$

Уравнение (3.46) (при помощи (3.45)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{3.47}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т. е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (3.47) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (3.47)), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет решение

$$p = p_0(u_2) = \\ = C\left[\sqrt{1-(u_2-1)^2} \pm 1\right] \exp\left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1-(u_2-1)^2}}{1 \pm \sqrt{1-(u_2-1)^2}}}\right], \quad C = \text{const}. \tag{3.48}$$

Замечание 3.2. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.36). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$K_1\left(\sin\alpha, Z_2, Z_1, \frac{Z_2}{\sin\alpha}, \frac{Z_1}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{3.49}$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (3.21), (3.22) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.22).

Поскольку

$$\frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{u_1}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2+u_2^2) + b\tau(1-\tau^2)}, \tag{3.50}$$

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{u_1(2u_2-b)}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2+u_2^2) + b\tau(1-\tau^2)}, \tag{3.51}$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta_1} = 2u_2 - b. \tag{3.52}$$

Очевидно, что при $u_1 \neq 0$ выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(b \pm \sqrt{b_1^2 - 4\left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2}\right), \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4. \tag{3.53}$$

Тогда интегрирование квадратуры

$$\beta_1 + \mathrm{const} = \pm\int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(u_1 - C_1/2)^2}} \tag{3.54}$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm\arcsin\frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \mathrm{const}. \tag{3.55}$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm\frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}}, \tag{3.56}$$

или, при переходе к старым переменным,

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm\frac{2Z_1 - C_1 \sin\alpha}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4\sin\alpha}}. \tag{3.57}$$

В принципе, для получения дополнительного инвариантного соотношения, «привязывающего» уравнение (3.22), на последнем равенстве можно остановиться, при этом в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.37). Но мы проведем некоторые преобразования для получения следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (3.36)):

$$\operatorname{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \frac{(u_1^2 - u_2^2 + bu_2 - 1)^2}{u_1^2(4u_2^2 - 4bu_2 + b^2)}. \tag{3.58}$$

Возвращаясь к старым координатам, получаем дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\operatorname{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \frac{(Z_1^2 - Z_2^2 + bZ_2\sin\alpha - \sin^2\alpha)^2}{Z_1^2(4Z_2^2 - 4bZ_2\sin\alpha + b^2\sin^2\alpha)}, \tag{3.59}$$

или, окончательно,

$$-\beta_1 \pm \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{Z_1^2 - Z_2^2 + bZ_2\sin\alpha - \sin^2\alpha}{Z_1(2Z_2 - b\sin\alpha)} = C_3 = \text{const}. \tag{3.60}$$

Итак, в рассматриваемом случае в системе динамических уравнений (3.1) при условии (3.19) имеется пять инвариантных соотношений: аналитическая неинтегрируемая связь вида (3.7); циклический первый интеграл вида (3.5), (3.6); первый интеграл вида (3.37); первый интеграл, заданный соотношением (3.47) ((3.49)), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа); наконец, трансцендентный первый интеграл вида (3.60).

Теорема 3.1. *Система* (3.1) *при условиях* (3.7), (3.5), (3.6), (3.19) *обладает пятью инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом по крайней мере четыре из пяти соотношений выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

2.3. *Топологические аналогии.* Покажем, что существует еще одна механическая и топологическая аналогия.

Теорема 3.2. *Первый интеграл* (3.37) *системы* (3.1) *при условиях* (3.7), (3.5), (3.6), (3.19) *постоянен на фазовых траекториях системы* (2.22), (2.23).

Доказательство. Действительно, первый интеграл (3.37) может быть получен заменой координат через соотношение (3.36), а первый интеграл (2.32) — заменой координат через соотношение (2.31). Но соотношения (3.36) и (2.31) совпадают. Теорема доказана. □

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1. Движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).
2. Движение закрепленного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).
3. Вращение твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [74].

3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости.

3.1. *Введение зависимости от угловой скорости и приведенная система.* Продолжаем изучать динамику трехмерного твердого тела в трехмерном пространстве. Данный раздел (подобно аналогичному разделу предыдущего параграфа) посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости. Поэтому введем такую же зависимость аналогичным образом. Напомним также, что данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на двумерный диск, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}) = (x_N, y_N, z_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [72].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{3.61}$$

где $R = (R_1, R_2, R_3)$ — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции R от угловой скорости гироскопическая (см. также предыдущий параграф):

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

Здесь (h_1, h_2, h_3) — по-прежнему некоторые положительные параметры (ср. с [74]).

Поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то применительно к нашей задаче

$$x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1 \frac{\Omega_3}{v}, \quad x_{3N} = z_N = Q_3 + h_1 \frac{\Omega_2}{v}. \tag{3.63}$$

В соответствии с выбором аналитических функций Чаплыгина [45]

$$Q_2 = A \sin\alpha \cos\beta_1, \quad Q_3 = A \sin\alpha \sin\beta_1, \quad A > 0, \tag{3.64}$$

динамические функции s, y_N и z_N примем в виде

$$\begin{gathered} s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad B > 0, \\ y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin\alpha \cos\beta_1 - h\frac{\Omega_3}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin\alpha \sin\beta_1 + h\frac{\Omega_2}{v}, \quad h = h_2 > 0, \quad v \neq 0, \end{gathered} \tag{3.65}$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т. е. присутствует зависимость момента от угловой скорости). Причем $h_1 = h_2$ в силу динамической симметрии тела.

Тогда благодаря условиям (3.7), (3.65) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (3.14)—(3.18)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2); \tag{3.66}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 Z_2\cos^2\alpha, \\ Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - \\ - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 Z_2^2 \sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_2\cos\alpha, \end{gathered} \tag{3.67}$$

$$
\begin{gathered}
Z_1' = (1 + bH_1)Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + \\
+ bH_1Z_1Z_2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_1\cos\alpha; \\
\beta_1' = (1 + bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (3.68) \\
\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1Z_2\sin\alpha\cos\alpha,
\end{gathered}
$$

при этом выбираем, как и выше, безразмерные параметры b, H_1 и постоянную n_1 следующим образом:

$$
b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad H_1 = \frac{Bh}{I_2 n_0}, \quad n_1 = n_0. \qquad (3.69)
$$

Видно, что в системе пятого порядка (3.66)—(3.68) образовалась независимая подсистема четвертого порядка (3.67), (3.68), которую, как будет показано далее, можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbf{S}^2$. При этом выделилась независимая система третьего порядка (3.67) на своем трехмерном многообразии.

3.2. *Полный список первых интегралов.* От системы (3.66)—(3.68) отделилась независимая система четвертого порядка (3.67), (3.68).

Заметим, что в силу (3.7) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (3.1), а именно функция фазовых переменных (3.25) постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины z_1, z_2 выбираются в силу (3.11)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (3.66)—(3.68) также существует аналитический интеграл, а именно функция фазовых переменных

$$
\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + Z_2^2) - 2bZ_2\sin\alpha) = V_C^2 \qquad (3.70)
$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (3.70) позволяет, не решая системы (3.66)—(3.68), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно при $V_C \neq 0$ выполнено равенство (3.27).

Поскольку фазовое пространство системы (3.66)—(3.68) пятимерно, а в нем существуют асимптотические предельные множества, то равенство (3.70) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (3.66)—(3.68) во всем фазовом пространстве (ср. с [38]).

Разберем подробнее вопрос существования других (дополнительных) первых интегралов системы (3.66)—(3.68). Ее фазовое пространство расслаивается на поверхности (3.28), динамика на которых определяется с помощью первых интегралов системы (3.67), (3.68).

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (3.67) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{gathered}
\frac{dZ_2}{d\alpha} = \frac{R_2(\alpha, Z_1, Z_2)}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1Z_2\cos^2\alpha},\\
\frac{dZ_1}{d\alpha} = \frac{R_1(\alpha, Z_1, Z_2)}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1Z_2\cos^2\alpha},
\end{gathered} \tag{3.71}$$

$$\begin{gathered}
R_2(\alpha, Z_1, Z_2) = \sin\alpha\cos\alpha + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha -\\
-(1 + bH_1)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1Z_2^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_2\cos\alpha,\\
R_1(\alpha, Z_1, Z_2) = bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha +\\
+(1 + bH_1)Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1Z_1Z_2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_1\cos\alpha.
\end{gathered}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (3.71) в алгебраическом виде:

$$\begin{gathered}
\frac{dZ_2}{d\tau} = \frac{\tau + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_2\tau^2 - (1 + bH_1)Z_1^2/\tau + bH_1Z_2^2\tau - H_1Z_2}{-Z_2 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) - bH_1Z_2(1 - \tau^2)},\\
\frac{dZ_1}{d\tau} = \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_1\tau^2 + (1 + bH_1)Z_1Z_2/\tau + bH_1Z_1Z_2\tau - H_1Z_1}{-Z_2 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) - bH_1Z_2(1 - \tau^2)}.
\end{gathered} \tag{3.72}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$Z_k = u_k\tau, \quad k = 1, 2, \tag{3.73}$$

получаем из системы (3.72)

$$\begin{gathered}
\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 =\\
+\frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - (1 + bH_1)u_1^2 - H_1u_2 + bH_1u_2^2\tau^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1u_2(1 - \tau^2)},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 =\\
= \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + (1 + bH_1)u_1u_2 - H_1u_1 + bH_1u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1u_2(1 - \tau^2)},
\end{gathered} \tag{3.74}$$

что эквивалентно

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)u_1^2}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}.
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (3.75) неавтономное уравнение первого порядка

$$
\frac{du_2}{du_1} = \frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)u_1^2}{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}, \tag{3.76}
$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$
d\left(\frac{(1+bH_1)u_2^2+(1+bH_1)u_1^2-(b+H_1)u_2+1}{u_1}\right)=0. \tag{3.77}
$$

Итак, уравнение (3.76) имеет следующий первый интеграл:

$$
\frac{(1+bH_1)u_2^2+(1+bH_1)u_1^2-(b+H_1)u_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \tag{3.78}
$$

который в прежних переменных выглядит как

$$
\frac{(1+bH_1)Z_2^2+(1+bH_1)Z_1^2-(b+H_1)Z_2\sin\alpha+\sin^2\alpha}{Z_1\sin\alpha}=C_1=\mathrm{const}. \tag{3.79}
$$

Замечание 3.3. Рассмотрим систему (3.67) с переменной диссипацией с нулевым средним [74], становящейся консервативной при $b=H_1$:

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= -Z_2+b(Z_1^2+Z_2^2)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha-b^2Z_2\cos^2\alpha,\\
Z_2' &= \sin\alpha\cos\alpha-(1+b^2)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bZ_2(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha-\\
&\quad -bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha+b^2Z_2^2\sin\alpha\cos\alpha-bZ_2\cos\alpha,\\
Z_1' &= (1+b^2)Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bZ_1(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha-bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha+\\
&\quad +b^2Z_1Z_2\sin\alpha\cos\alpha-bZ_1\cos\alpha.
\end{aligned}
\tag{3.80}
$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$
(1+b^2)(Z_2^2+Z_1^2)-2bZ_2\sin\alpha+\sin^2\alpha=C_1^*=\mathrm{const}, \tag{3.81}
$$

$$
Z_1\sin\alpha=C_2^*=\mathrm{const}. \tag{3.82}
$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.81), (3.82) также является первым интегралом системы (3.80). Но при $b \neq H_1$ каждая из функций

$$(1+bH_1)(Z_2^2+Z_1^2)-(b+H_1)Z_2\sin\alpha+\sin^2\alpha \tag{3.83}$$

и (3.82) по отдельности не является первым интегралом системы (3.67). Однако отношение функций (3.83), (3.82) является первым интегралом системы (3.67) при любых b, H_1.

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.67). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.78) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2-\frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2(1+bH_1)}\right)^2=\frac{(b-H_1)^2+C_1^2-4}{4(1+bH_1)^2}. \tag{3.84}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b-H_1)^2+C_1^2-4 \geqslant 0 \tag{3.85}$$

и фазовое пространство системы (3.67) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.84).

Таким образом, в силу соотношения (3.78) первое уравнение системы (3.75) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}{-u_2+b(1-\tau^2)+b\tau^2(U_1^2(C_1,u_2)+u_2^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}, \tag{3.86}$$

где

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\left\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(1+bH_1)(1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2)}\right\} \tag{3.87}$$

(при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.85)), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2}=\frac{(b-(1+bH_1)u_2)\tau-b\tau^3(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2-H_1u_2)}{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}. \tag{3.88}$$

Уравнение (3.88) (при помощи (3.87)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2}=\frac{2((1+bH_1)u_2-b)p+2b(1-H_1u_2-u_2^2-U_1^2(C_1,u_2))}{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)},\quad p=\frac{1}{\tau^2}. \tag{3.89}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т. е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (3.89) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (3.89)), даже в частном случае

$$|b-H_1|=2, \quad C_1=\frac{1-A_1^4}{1+A_1^4}, \quad A_1=\frac{1}{2}(b+H_1)$$

имеет следующее решение:

$$\begin{gathered} p=p_0(u_2)=C[1-A_1u_2]^{2/(1+A_1^4)}\times \\ \times\left|\frac{\sqrt{C_1^2-4A_1^2(1-A_1u_2)^2}\pm C_1}{\sqrt{C_1^2-4A_1^2(1-A_1u_2)^2}\mp C_1}\right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)}\times \\ \times\exp\frac{2(A_1-b)}{(1+A_1^4)A_1(A_1u_2-1)}, \quad C=\mathrm{const}. \end{gathered} \tag{3.90}$$

Замечание 3.4. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.78). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$K_1\left(\sin\alpha,\, Z_2,\, Z_1,\, \frac{Z_2}{\sin\alpha},\, \frac{Z_1}{\sin\alpha}\right)=C_2=\mathrm{const}. \tag{3.91}$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (3.67), (3.68) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.68).

Поскольку

$$\frac{d\beta_1}{d\tau}=\frac{(1+bH_1)u_1}{-u_2\tau+b\tau^3(u_1^2+u_2^2)+b\tau(1-\tau^2)-bH_1\tau u_2(1-\tau^2)}, \tag{3.92}$$

$$\frac{du_1}{d\tau}=\frac{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}{-u_2\tau+b\tau^3(u_1^2+u_2^2)+b\tau(1-\tau^2)-bH_1\tau u_2(1-\tau^2)}, \tag{3.93}$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta_1}=2u_2-\frac{b+H_1}{1+bH_1}. \tag{3.94}$$

Очевидно, что при $u_1 \neq 0$ выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2(1+bH_1)}\Big((b+H_1) \pm \sqrt{b_1^2 - (2(1+bH_1)u_1 - C_1)^2}\Big), \tag{3.95}$$
$$b_1^2 = (b-H_1)^2 + C_1^2 - 4.$$

Тогда интегрирование квадратуры

$$\beta_1 + \mathrm{const} = \pm(1+bH_1)\int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - (2(1+bH_1)u_1 - C_1)^2}} \tag{3.96}$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm \arcsin \frac{2(1+bH_1)u_1 - C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \mathrm{const}. \tag{3.97}$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm\frac{2(1+bH_1)u_1 - C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}}, \tag{3.98}$$

или, при переходе к старым переменным,

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm\frac{2(1+bH_1)Z_1 - C_1\sin\alpha}{\sqrt{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}\,\sin\alpha}. \tag{3.99}$$

В принципе, для получения дополнительного инвариантного соотношения, «привязывающего» уравнение (3.68), на последнем равенстве можно остановиться, при этом в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.78). Но мы проведем некоторые преобразования для получения следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (3.78)):

$$\mathrm{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \\ = \frac{((1+bH_1)u_1^2 - (1+bH_1)u_2^2 + (b+H_1)u_2 - 1)^2}{u_1^2(2(1+bH_1)u_2 - (b+H_1))^2}. \tag{3.100}$$

Возвращаясь к старым координатам, получаем дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\mathrm{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \\ = \frac{((1+bH_1)Z_1^2 - (1+bH_1)Z_2^2 + (b+H_1)Z_2\sin\alpha - \sin^2\alpha)^2}{Z_1^2(2(1+bH_1)Z_2 - (b+H_1)\sin\alpha)^2}, \tag{3.101}$$

или, окончательно,

$$-\beta_1 \pm \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{(1+bH_1)Z_1^2-(1+bH_1)Z_2^2+(b+H_1)Z_2\sin\alpha-\sin^2\alpha}{Z_1(2(1+bH_1)Z_2-(b+H_1)\sin\alpha)} = \\ = C_3 = \mathrm{const.} \qquad (3.102)$$

Итак, в рассматриваемом случае в системе динамических уравнений (3.1) при условии (3.65) имеется пять инвариантных соотношений: аналитическая неинтегрируемая связь вида (3.7); циклический первый интеграл вида (3.5), (3.6); первый интеграл вида (3.79); первый интеграл, выражающийся соотношениями (3.89), (3.91) и являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа); наконец, трансцендентный первый интеграл вида (3.102).

Теорема 3.3. *Система* (3.1) *при условиях* (3.7), (3.5), (3.6), (3.65) *обладает пятью инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом по крайней мере четыре из пяти соотношений выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

3.3. *Топологические аналогии.* Покажем, что существует еще одна механическая и топологическая аналогия.

Теорема 3.4. *Первый интеграл* (3.79) *системы* (3.1) *при условиях* (3.7), (3.5), (3.6), (3.65) *постоянен на фазовых траекториях системы* (2.74), (2.75).

Доказательство. Действительно, первый интеграл (3.79) может быть получен заменой координат через соотношение (3.78), а первый интеграл (2.84) — заменой координат через соотношение (2.83). Но соотношения (3.78) и (2.83) совпадают. Теорема доказана. □

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1. Движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).
2. Движение закрепленного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).
3. Вращение твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [74].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А. А.* Собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1956.
2. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247—250.
3. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.
4. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
5. *Арнольд В. И.* Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела в идеальной жидкости // УМН. 1969. Т. 24, № 3. С. 225—226.
6. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
7. *Арнольд В.И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985.
8. *Бендиксон И.* О кривых определяемых дифференциальными уравнениями // УМН. 1941. Т. 9.
9. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН СССР. 1986. Т. 287, № 5. С. 1105—1108.
10. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
11. *Бурбаки Н.* Интегрирование. М.: Наука, 1970.
12. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Докл. РАН. 2001. Т. 380, № 1. С. 47—50.
13. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Там же. 2002. Т. 383, № 5. С. 635—637.
14. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbf{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2003. № 5. С. 37—41.
15. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Валерий Владимирович Трофимов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 23 С. 5—6.
16. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
17. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.; Л.: Гостехиздат, 1953.
18. *Горячев Д. Н.* Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Варшав. унив. изв. 1916. Кн. 3. С. 1—15.
19. *Гробман Д. М.* Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве // Мат. сб. 1962. Т. 56, № 1. С. 77—94.

20. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Интегрируемые системы. I // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1985. Т. 4. С. 179—284.

21. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: МГУ, 1980.

22. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38, № 1. С. 3—67.

23. *Козлов В. В., Колесников Н. Н.* Об интегрируемости гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1979. № 6. С. 88—91.

24. *Колмогоров А. Н.* Общая теория динамических систем и классическая механика // Международный математический конгресс в Амстердаме. М.: Физматгиз, 1961. С. 187—208.

25. *Левшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1961.

26. *Ляпунов А. М.* Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. I. С. 320—324.

27. *Манин Ю. И.* Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки. Вып. 11. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1978. С. 5—112.

28. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1986.

29. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.

30. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.

31. *Новиков С. П., Шмельцер И.* Периодические решения уравнения Кирхгофа свободного движения твердого тела и идеальной жидкости и расширенная теория Люстерника—Шнирельмана—Морса (ЛМШ). I // Функцион. анализ и его прил. 1981. Т. 15, № 3, С. 54—66.

32. *Пали Дж., Смейл С.* Теоремы структурной устойчивости // Математика: Сб. пер. 1969. Т. 13, № 2. С. 145—155.

33. *Палис Ж., Ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. Введение. М.: Мир, 1986.

34. *Плисс В. А.* О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе // Вестн. ЛГУ, сер. матем., 1960. Т. 13. С. 15—23.

35. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1967.

36. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ОГИЗ, 1947.

37. *Пуанкаре А.* Новые методы в небесной механике: Избр. труды. М.: Наука, 1971, 1972. Т. 1, 2.

38. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 3. С. 51—54.
39. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, № 1. С. 113—185.
40. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893.
41. *Трофимов В. В.* Обобщенные классы Маслова лагранжевых поверхностей в симплектических многообразиях // УМН. 1988. Т. 43, № 4. С. 169—170.
42. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Динамические системы на орбитах линейных представлений и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем // Функцион. анализ и его прил. 1983. Т. 17, № 1. С. 31—39.
43. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Диссипативные системы с нетривиальными обобщенными классами Арнольда—Маслова (тез. докл. семинара по вектор. и тензор. анализу им. П. К. Рашевского) // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2000. № 2. С. 62.
44. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
45. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. М.: Наука, 1976.
46. *Шамолин М. В.* Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1992. № 2. С. 52—56.
47. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Там же. № 1. С. 52—58.
48. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента // Прикл. матем. и механ. 1993. Т. 57, вып. 4. С. 40—49.
49. *Шамолин М. В.* Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1993. № 2. С. 66—70.
50. *Шамолин М. В.* Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости // Там же. № 1. С. 68—71.
51. *Шамолин М. В.* Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 5. С. 611—614.
52. *Шамолин М. В.* Определение относительной грубости и двупараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела // УМН. 1996. Т. 51, вып. 1. С. 175—176.
53. *Шамолин М. В.* Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 2. С. 193—197.

54. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. механика. 1996. № 4. С. 57—69.
55. *Шамолин М. В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 65—68.
56. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // УМН. 1997. Т. 52, вып. 3. С. 177—178.
57. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // УМН. 1998. Т. 53, вып. 3. С. 209—210.
58. *Шамолин М. В.* Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 6. С. 29—37.
59. *Шамолин М. В.* Некоторые классы частных решений в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 178—189.
60. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. 1999. Т. 364, № 5. С. 627—629.
61. *Шамолин М. В.* О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией // УМН. 1999. Т. 54, вып. 5. С. 181—182.
62. *Шамолин М. В.* Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. 2000. Т. 371, № 4. С. 480—483.
63. *Шамолин М. В.* О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек // УМН. 2000. Т. 55, вып. 3. С. 187—188.
64. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Докл. РАН. 2000. Т. 375, № 3. С. 343—346.
65. *Шамолин М. В.* Случаи интегрируемости уравнений пространственной динамики твердого тела // Прикл. механика. 2001. Т. 37, № 6. С. 74—82.
66. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2001. № 5. С. 22—28.
67. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // УМН. 2002. Т. 57, вып. 1. С. 169—170.
68. *Шамолин М. В.* Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой // Прикл. механика. 2004. Т. 40, № 4. С. 137—144.
69. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращатель-

ных производных момента сил по угловой скорости // Докл. РАН. 2005. Т. 403, № 4. С. 482—485.

70. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании // Прикл. математика и механика. 2005. Т. 69, вып. 6. С. 1003—1010.
71. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^n$ // УМН. 2005. Т. 60, вып. 6. С. 233—234.
72. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке среды при учете вращательных производных момента силы ее воздействия // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 3. С. 187—192.
73. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // УМН. 2007. Т. 62, вып. 5. С. 169—170.
74. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.
75. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е перераб. и доп. М.: Экзамен, 2007.
76. *Шамолин М. В.* Трехпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. 2008. Т. 418, № 1. С. 46—51.
77. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986.
78. *Shamolin M. V.* Some classical problems in a three dimensional dynamics of a rigid body interacting with a medium // Proc. of ICTACEM'98, Kharagpur, India, Dec. 1—5, 1998. Aerospace Engineering Dep., Indian Inst. of Technology, Kharagpur, India, 1998. CD. Printed at Printek Point, Technology Market, KGP-2.
79. *Shamolin M. V.* Structural stability in 3D dynamics of a rigid // CD-Proc. of WCSMO-3, Buffalo, NY, May 17—21, 1999. Buffalo, NY, 1999.
80. *Shamolin M. V.* New families of many-dimensional phase portraits in dynamics of a rigid body interacting with a medium // CD-Proc. of 16th IMACS World Cong. 2000, Lausanne, Switzerland, August 21—25. Lausanne: EPFL, 2000.
81. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium // J. Math. Sci. 2002. V. 110, N 2. P. 2526—2555.
82. *Shamolin M. V.* New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // Ibid. 2003. V. 114, N 1. P. 919—975.
83. *Shamolin M. V.* Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // Ibid. 2004. Vol. 122, N 1. P. 2841—2915.
84. *Shamolin M. V.* Structural stable vector fields in rigid body dynamics // Proc. of 8th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2005), Lodz, Poland, Dec. 12—15, 2005. Tech. Univ. Lodz, 2005. V. 1. P. 429—436.

85. *Shamolin M. V.* The cases of integrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body interacting with a medium // Proc. of 9th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2007), Lodz, Poland, Dec. 17—20, 2007. Tech. Univ. Lodz, 2007. V. 1. P. 415—422.