УДК 517.925+531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЕ

© 2014 Н.В. Походня[1], М.В. Шамолин[2]

Во многих задачах многомерной динамики возникают системы, пространствами положений которых являются сферы конечной размерности. Соответственно фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к сферам. В статье разобран индуктивный переход в системе на касательном расслоении к маломерной сфере при повышении ее размерности при отсутствии силового поля. При этом предъявляются неконсервативные силовые поля, при наличии которых системы обладают полным набором первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций и являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями своих переменных.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость в элементарных функциях, трансцендентный первый интеграл.

1. Предварительные сведения

Во многих задачах многомерной динамики возникают механические системы, пространствами положений которых являются сферы конечной размерности. Соответственно фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к сферам. Так, например, физический маятник на цилиндрическом шарнире в плоскопараллельном силовом поле может быть рассмотрен на своем фазовом цилиндре, а изучение пространственного (трехмерного) маятника на сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере. Рассматриваемые ранее авторами задачи из динамики n-мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле порождали системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. В статье будет тщательно разобран индуктивный переход от систем на касательных расслоениях к маломерным сферам до систем на касательных расслоениях к сферам произвольной размерности. При этом исследование начинается для систем при отсутствии силового поля и продолжается системами при наличии некоторых неконсервативных силовых полей.

[1]Походня Наталья Витальевна (shamolin@rambler.ru), кафедра математики и физики Московского государственного гуманитарного университета им. М.А. Шолохова, 109240, Российская Федерация, г. Москва, ул. Верхняя Радищевская, 16–18.

[2]Шамолин Максим Владимирович (shamolin@imec.msu.ru), Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

Поставим вопрос: как меняются коэффициенты соответствующих систем при индуктивном увеличении размерности $n-1$ сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$? Другими словами, системами какого вида описываются фазовые (геодезические) потоки на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ при соответствующем выборе координат $z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}$? Другими словами, полученные системы описывают динамику при отсутствии какого-либо силового поля. Таким образом, коэффициенты в правой части систем носят лишь геометрический смысл и порождаются выбором координат $z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}$ на касательном расслоении.

Выбор части координат $z_{n-1},\ldots,z_1$ касательного пространства не является случайным. В нее входят функции от естественных координат на алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$ группы вращений n-мерного пространства. В частности, функции от независимых компонент тензора угловой скорости n-мерного твердого тела [1–6].

2. Замечание об аналитических первых интегралах в системе при отсутствии силового поля

При построении систем на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ используется факт наличия в системе следующего набора аналитических первых интегралов:

$$
\begin{gathered}
\Phi_1=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}=C_1=\mathrm{const},\\
\Phi_2=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\sin\alpha=C_2=\mathrm{const},\\
\Phi_3=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\sin\alpha\sin\beta_1=C_3=\mathrm{const},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Phi_{n-2}=\sqrt{z_1^2+z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}=C_{n-2}=\mathrm{const},\\
\Phi_{n-1}=z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}=C_{n-1}=\mathrm{const}.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Первые интегралы (1) констатируют факт отсутствия внешнего поля сил. В частности, сохраняются $n-1$ (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости n-мерного твердого тела, а именно.

3. Структура уравнений на касательных расслоениях к конечномерной сфере

3.1. Начало при $n=2$

Итак, при $n=2$ следующая система задает геодезический поток на двумерном цилиндре $T_*\mathbf{S}^1\{z_1;\alpha\}$ как касательном расслоении одномерной сферы $\mathbf{S}^1\{\alpha\}$:

$$
\begin{aligned}
\alpha'&=-z_1,\\
z_1'&=0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

при этом, в силу замечания из п. 2, существует естественный первый интеграл

$$z_1=C_1=\mathrm{const}. \tag{3}$$

Уравнение $\dot{\alpha} = -z_1$ является кинематическим соотношением и задает координаты α, z_1 в фазовом пространстве системы (2) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^1\{z_1; \alpha\}$).

3.2. Переход по n: $2 \to 3$

При переходе от $n = 2$ к $n = 3$ производится переобозначение

$$z_1 \mapsto z_2,$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 1. *При $n = 3$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta_1\}$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\alpha, \beta_1\}$:*

$$\alpha' = -z_2, \tag{4}$$

$$z_2' = \underline{-z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}, \tag{5}$$

$$\underline{z_1' = z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}, \tag{6}$$

$$\underline{\beta_1' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}, \tag{7}$$

при этом, в силу замечания из п. 2, существуют первые интегралы

$$z_1^2 + z_2^2 = C_1 = \mathrm{const}, \tag{8}$$

$$z_1 \sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}. \tag{9}$$

Действительно, в силу (8) имеем:

$$z_1' z_1 + z_2' z_2 = 0,$$

поэтому существует такая функция $N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2)$, что

$$z_2' = -z_1 N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2), \;\; z_1' = z_2 N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2),$$

а в силу (9) должно выполняться равенство (в силу системы (4)–(7))

$$z_1' \sin\alpha + z_1 \alpha' \cos\alpha = z_2 N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2) \sin\alpha - z_1 z_2 \cos\alpha = 0,$$

откуда

$$N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2) = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

что и требовалось.

Уравнения (4), (7) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha, \beta_1, z_1, z_2$ в фазовом пространстве системы (4)–(7) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta_1\}$).

3.3. Переход по n: $3 \to 4$

При переходе от $n = 3$ к $n = 4$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_3 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 2. *При* $n = 4$ *следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ *трехмерной сферы* $\mathbf{S}^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$*:*

$$\alpha' = -z_3, \tag{10}$$

$$z_3' = -(z_2^2 + \underline{z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{11}$$

$$z_2' = z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \underline{z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}}, \tag{12}$$

$$\underline{z_1' = z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}}, \tag{13}$$

$$\beta_1' = z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{14}$$

$$\beta_2' = -z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{15}$$

при этом, в силу замечания из п. 2, существуют первые интегралы

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1 = \mathrm{const}, \tag{16}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{17}$$

$$z_1 \sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}. \tag{18}$$

Действительно, в силу (16), (17) аналогично доказательству предложения 1 находится подчеркнутый коэффициент в уравнении (11), а также делается вывод об уравнениях (12) и (13), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} z_2' &= z_2 z_3 \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + z_1^2 \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_2(\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1, z_2, z_3), \\ z_1' &= z_1 z_3 \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_2 \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_2(\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1, z_2, z_3). \end{aligned} \tag{19}$$

Далее, в силу (18) должно выполняться равенство (в силу системы (10)–(15))

$$z_1' \sin\alpha\sin\beta_1 + z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1 + z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1 =$$

$$= z_1 z_2 \cos\alpha[\cos\beta_1 - N_2(\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1, z_2, z_3)\sin\beta_1] = 0,$$

откуда

$$N_2(\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1, z_2, z_3) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$$

что и требовалось.

Уравнения (10), (14), (15) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1, z_2, z_3$ в фазовом пространстве системы (10)–(15) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$).

3.4. Переход по n: $4 \to 5$

При переходе от $n = 4$ к $n = 5$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_4 \\ z_3 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 3. *При $n = 5$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$:*

$$\alpha' = -z_4, \tag{20}$$

$$z_4' = -(z_3^2 + z_2^2 + \underline{z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{21}$$

$$z_3' = z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_2^2 + \underline{z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{22}$$

$$z_2' = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \underline{z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}}, \tag{23}$$

$$\underline{z_1' = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}}, \tag{24}$$

$$\beta_1' = z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{25}$$

$$\beta_2' = -z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{26}$$

$$\beta_3' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{27}$$

при этом, в силу замечания из п. 2, существуют первые интегралы

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = C_1 = \mathrm{const}, \tag{28}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{29}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{30}$$

$$z_1 \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}. \tag{31}$$

Действительно, в силу (28)–(30) аналогично доказательству предложений 2, 3 находятся подчеркнутые коэффициенты в уравнениях (21), (22), а также делается вывод об уравнениях (23) и (24), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{array}{c} z_2' = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_3(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4), \\ z_1' = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_3(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4). \end{array} \tag{32}$$

Далее, в силу (31) должно выполняться равенство (в силу системы (20)–(27))

$$z_1' \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 +$$

$$+ z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2 + z_1\beta_2'\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 =$$

$$= z_1 z_2 \cos\alpha[N_3(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4)\sin\beta_1\sin\beta_2 - \cos\beta_2] = 0,$$

откуда

$$N_3(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},$$

что и требовалось.

Уравнения (20), (25)–(27) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4$ в фазовом пространстве системы (20)–(27) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$).

3.5. Переход по n: $5 \to 6$

При переходе от $n = 5$ к $n = 6$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} z_4 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_5 \\ z_4 \\ z_3 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 4. *При $n = 6$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{z_5, z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ пятимерной сферы $\mathbf{S}^5\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$:*

$$\alpha' = -z_5, \tag{33}$$

$$z_5' = -(z_4^2 + z_3^2 + z_2^2 + \underline{z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{34}$$

$$z_4' = z_4 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_3^2 + z_2^2 + \underline{z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{35}$$

$$z_3' = z_3 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - (z_2 + \underline{z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{36}$$

$$\begin{gathered} z_2' = z_2 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ \underline{+ z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3}}, \end{gathered} \tag{37}$$

$$\begin{gathered} \underline{z_1' = z_1 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} -} \\ \underline{- z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3}}, \end{gathered} \tag{38}$$

$$\beta_1' = z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{39}$$

$$\beta_2' = -z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{40}$$

$$\beta_3' = z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{41}$$

$$\beta_4' = -z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3}, \tag{42}$$

при этом, в силу замечания из п. 2, существуют первые интегралы

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = C_1 = \mathrm{const}, \tag{43}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{44}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{45}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{46}$$

$$z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 = C_5 = \mathrm{const}. \tag{47}$$

Действительно, в силу (43)–(46) аналогично доказательству предложений 2–4 находятся подчеркнутые коэффициенты в уравнениях (34)–(36), а также делается вывод об уравнениях (37) и (38), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered} z_2' = z_2 z_5 \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_4 \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\tfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_2 z_3 \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\tfrac{1}{\sin\beta_1}\tfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + z_1^2 \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5), \\ z_1' = z_1 z_5 \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_4 \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\tfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_3 \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\tfrac{1}{\sin\beta_1}\tfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - \\ - z_1 z_2 \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5). \end{gathered} \tag{48}$$

Далее, в силу (47) должно выполняться равенство (в силу системы (33)–(42))

$$z_1' \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 +$$

$$+ z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 +$$

$$+ z_1\beta_2'\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3 + z_1\beta_3'\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 =$$

$$= z_1 z_2\cos\alpha[\cos\beta_3 - N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3] = 0,$$

откуда

$$N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5) = \frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3},$$

что и требовалось.

Уравнения (33), (39)–(42) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5$ в фазовом пространстве системы (33)–(42) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{z_5,z_4,z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$).

И только после последнего пункта выясняется общий индуктивный переход и можно предъявить полную систему уравнений на касательном расслоении к многомерной сфере.

3.6. Система уравнений на касательном расслоении к конечномерной сфере

Теорема 1. *1) при $n > 2$ и $F(\alpha) \equiv g(\alpha) \equiv 0$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$:*

$$\dot\alpha = -z_{n-1} + bg(\alpha), \tag{49}$$

$$\dot z_{n-1} = F(\alpha) - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{50}$$

$$\dot z_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{51}$$

$$\begin{gathered} \dot z_{n-3} = z_{n-3}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-3}z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ -(z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \end{gathered} \tag{52}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot z_1 = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{53}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{54}$$

$$\dot\beta_2 = -z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{55}$$

. . . .

$$\dot{\beta}_{n-3} = (-1)^n z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-4}}, \tag{56}$$

$$\dot{\beta}_{n-2} = (-1)^{n+1} z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}}; \tag{57}$$

2) если неравенства $F(\alpha)\sin\alpha\cos\alpha > 0$, $g(\alpha)\sin\alpha > 0$ выполнены почти всюду, то система (49)–(57) обладает переменной диссипацией с нулевым средним;

3) если $F(\alpha) \equiv \sin\alpha\cos\alpha$, $g(\alpha) \equiv \sin\alpha$, то система (49)–(57) обладает полным набором (в данном случае n штук) трансцендентных первым интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. также [7–10]).

Литература

[1] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // Journal of Mathematical Sciences. 2003. V. 114. № 1. P. 919–975.

[2] Shamolin M.V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium // Journal of Mathematical Sciences. 2002. V. 110. №2. P. 2526–2555.

[3] Shamolin M.V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // Journal of Mathematical Sciences. 2004. V. 122. №1. P. 2841–2915.

[4] Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. 2000. Т. 375. №3. С. 343–346.

[5] Походня Н.В., Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2012. № 9(100). С. 136–150.

[6] Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1(110). С. 35–41.

[7] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

[8] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.

[9] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. 2013. Сер.: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Динамические системы. Т. 125. С. 5–254.

[10] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.

References

[1] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, Vol. 114, no. 1, pp. 919–975.

[2] Shamolin M.V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium. *Journal of Mathematical Sciences*, 2002, Vol. 110, no. 2, pp. 2526–2555.

[3] Shamolin M.V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body, *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, Vol. 122, no. 1, pp. 2841–2915.

[4] Shamolin M.V. Jacobi integrability of problem of four-dimensional body motion in a resisting medium. *Doklady RAN* [*Reports of RAS*], 2000, Vol. 375, no. 3, pp. 343–346 (in Russian)

[5] Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. New case of integrability in dynamics of multi-dimensional body, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Esyestvennonauchnaya* [*Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series*], 2012. no. 9(100). pp. 136–150 (in Russian)

[6] Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. Certain conditions of integrability of dynamical systems in transcendental functions, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Estestvennonauchnaia* [*Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series*], 2013, no. 9/1(110), pp. 35–41 (in Russian)

[7] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. Mathematical aspect in classical and celestial mechanics. M., VINITI, 1985, 304 p. (in Russian)

[8] Trofimov V.V. Symplectic structures on symmetruc spaces automorphysm groups. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser.1. Matematika. Mekhanika* [*Bulletin of Moscow University*], 1984, no. 6, pp. 31–33 (in Russian)

[9] Shamolin M.V. Variety of cases of integrability in dynamics of lower-, and multi-dimensional body in nonconservative field, *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory. Dinamicheskie sistemy* [*Results of science and technology. Series: Contemporary Mathematics and its Applications. Subjects Reviews.Dynamical Systems*], Vol. 125, 2013, pp. 5–254 (in Russian)

[10] Shamolin M.V. Methods of analysis of various dissipation dynamical systems in dynamics of a rigid body. M., Ekzamen, 2007, 352 p. (in Russian)

Поступила в редакцию 29/*III*/2014;
в окончательном варианте — 29/*III*/2014.

INTEGRABLE SYSTEMS ON TANGENT BUNDLE OF MULTI-DIMENSIONAL SPHERE

© 2014 N.V. Pokhodnya[3] M.V. Shamolin[4]

The systems which have finite-dimensional spheres as the space of positions, are arising in many problems of multi-dimensional dynamics. Accordingly, tangent bundles of those spheres become phase spaces of such systems. In the article activity of inductive transition in the system on tangent bundle of low-dimensional sphere under increase of its dimension and absence of force field is analyzed. At that, nonconservative fields of forces are presented with the presence of which the systems possess the complete choice of first integrals expressing in terms of finite combination of elementary functions and are, in general, the transcendental functions of its variables.

Key words: dynamical system, integrability in terms of elementary functions, transcendental first integral.

Paper received 29/*III*/2014.
Paper accepted 29/*III*/2014.

[3]Pokhodnya Natalia Vitalievna (`shamolin@rambler.ru`), the Dept. of Mathematics and Physics, Sholokhov Moscow State University for Humanities, Moscow, 109240, Russian Federation

[4]Shamolin Maxim Vladimirovich (`shamolin@imec.msu.ru`), Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russian Federation.