СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ПМТУКТ-2014)

СБОРНИК ТРУДОВ VII Международной найчной конференции
Воронеж, 14-21 сентября, 2014

2014

Министерство образования и науки РФ
Воронежский государственный технический университет
Санкт-Петербургский государственный университет
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Воронежский государственный университет
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Тамбовский государственный технический университет
Воронежский институт ГПС МЧС России

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

(ПМТУКТ-2014)

Сборник трудов
VII международной конференции
Воронеж, 14–21 сентября 2014 г.

Воронеж
Издательство "Научная книга"
2014

УДК 517.94 (95, 97, 62,63), 519.17 (67, 71, 977)
С568

С 568 **Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий:** сб. тр.VII междунар.конф. «ПМТУКТ-2014» / под ред. И.Л. Батаронова, А.П. Жабко, В.В. Провоторова; Воронеж. гос. техн. ун-т., Моск. гос. ун-т., С.- Петербург. гос. ун-т., Воронеж. гос. ун-т., Пермск. гос. нац. исслед. ун-т, Пермск. нац. исслед. политех. ун-т, Тамбов. гос. техн. ун-т., Воронеж. ин-т ГПС МЧС. – Воронеж: Издательство «Научная книга», 2014. – 474 с.

ISBN 978-5-98222-857-4

В сборнике представлены статьи по материалам докладов и лекций, включенных в программу VII Международной научной конференции ПМТУКТ-2014.

Тематика охватывает широкий спектр проблем прикладной математики, теории управления, дифференциальных игр, качественных методов математического моделирования в различных разделах естествознания (биология, медицина, химия), другие разделы современной прикладной математики (в том числе экономического характера). Представлены приближенные методы исследования математических моделей, компьютерные технологии в процессах управления, а также современные компьютерные технологии создания программных продуктов.

УДК 517.94 (95, 97, 62,63), 519.17 (67, 71, 977)
С 568

ISBN 978-5-98222-857-4

УДК 531.01+531.552

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ СРЕДЫ НА ТВЕРДОЕ ТЕЛО В УСЛОВИЯХ КВАЗИСТАЦИОНАРНОСТИ

Шамолин М.В.

Работа представляет собой исследование задачи движения симметричного твердого тела, взаимодействующего со средой лишь через плоский участок его поверхности. При построении силового поля используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности, при этом движение среды не изучается [1]. Применяется разработанная ранее методика полного нелинейного исследования диссипативных динамических систем определенного вида, благодаря чему получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов с предельными циклами на фазовом цилиндре, состоящее из бесконечного множества топологически неэквивалентных фазовых портретов, меняющих свой топологический тип при изменении параметров.

1. Постановка задачи. Пусть однородное твердое тело массы m совершает плоскопараллельное движение в среде, при этом передняя часть поверхности тела — плоская пластина (отрезок AB), находящаяся в условиях струйного обтекания. Это означает, что в отсутствие касательных сил воздействие среды на тело (пластину) сводится к силе **S** (приложенной в точке N), ортогональной к пластине. Остальная часть поверхности тела может быть размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края пластины, и не испытывает действия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа тела в воду [1]. Предполагается также, что сила тяжести пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления. Свяжем с пластиной правую систему координат Dxyz (ось z перпендикулярна плоскости движения) и для простоты будем считать Dzx плоскостью симметрии тела. Тогда существует режим невозмущенного движения, перпендикулярного пластине AB. При этом срединный перпендикуляр Dx, опущенный из центра масс C тела на плоскость пластины, принадлежит линии действия силы **S**, а при возмущении данного режима вектор скорости **v** точки D, вообще говоря, отклоняется от оси симметрии на угол α (атаки).

Введем первые три фазовые координаты: $\mathrm{v} = |\mathbf{v}|$, α, Ω – величина угловой скорости тела, $\mathrm{AB} = \Delta$. Примем, что величина силы **S** квадратично зависит от v с некоторым коэффициентом $\mathrm{s_1}$: $\mathrm{S} = \mathrm{s_1 v^2}$. Обычно принимают $\mathrm{s_1} = \rho \mathrm{P c_x}/2$, где ρ – плотность среды, P – площадь пластины. Безразмерный коэффициент лобового сопротивления $\mathrm{c_x}$ зависит от угла атаки, числа Струхаля и других величин, которые в статических моделях обычно считают параметрами. Мы же вводим безразмерную фазовую переменную «типа Струхаля» $\omega = \Omega\Delta/\mathrm{v}$, а также вспомогательную функцию $\mathrm{s} = \mathrm{s_1}\,\mathrm{sgn}\cos\alpha$. Ограничимся случаем зависимости $\mathrm{c_x}$ только от угла атаки, т. е. будем считать величину s функцией α, а $\mathrm{y_N} = \mathrm{DN}$ – функцией переменных α, ω.

При невозмущенном движении выполнены условия $\alpha(\mathrm{t}) \equiv 0, \omega(\mathrm{t}) \equiv 0$, поэтому функцию $\mathrm{y_N}(\alpha,\omega)$ при малых α,ω примем в виде

$$\mathrm{y_N} = \Delta(\mathrm{k}\alpha - \mathrm{h}\omega) \tag{1.1}$$

где k и h – некоторые постоянные. Зависимостью же s от α пренебрегаем. Поэтому линеаризованная модель содержит три параметра $s = s_1, k, h$, которые определяются формой пластины в плане.

Фазовое состояние системы будем определять через функции $(\mathrm{v}, \alpha, \Omega, \mathrm{x_0}, \mathrm{y_0}, \varphi)$, а первые три из них рассматривать в качестве квазискоростей. Уравнения движения образуют замкнутую систему (σ = DC, I — центральный момент инерции):

$$
\begin{aligned}
&v^{\bullet}\cos\alpha - \alpha^{\bullet} v\sin\alpha - \Omega v\sin\alpha + \sigma\Omega^2 = -s(\alpha)v^2/m \\
&v^{\bullet}\sin\alpha + \alpha^{\bullet} v\cos\alpha + \Omega v\cos\alpha - \sigma\Omega^{\bullet} = 0 \qquad (1.2)\\
&I\Omega^{\bullet} = y_N(\alpha,\omega)s(\alpha)v^2,\ \omega = \Omega\Delta/v
\end{aligned}
$$

2. Классы функций, определяющих воздействие среды. В систему (1.2) входят функции $y_N(\alpha,\omega)$ и $s(\alpha)$, определяющие воздействие среды. По аналогии с (1.1) функцию y_N берем в виде $y_N(\alpha,\omega) = y(\alpha) - H\Omega/v$, где H > 0, в силу эксперимента [1], а третье уравнение (1.2) будет

$$
I\Omega^{\bullet} = F(\alpha)v^2 - Hs(\alpha)\Omega v,\ F(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha) \qquad (2.1)
$$

Система уравнений движения содержит функции $F(\alpha)$, $s(\alpha)$, явный вид которых, даже для пластин простой формы, аналитически описать затруднительно, поэтому используется прием «погружения» задачи в более широкий класс задач. Построить классы $\{y\}$, $\{s\}$ помогает результат Чаплыгина, который для обтекания пластины бесконечной длины получил функции $y(\alpha)$, $s(\alpha)$ [2]: $y(\alpha) = y_0(\alpha) = A\sin\alpha \in \{y\}$, $A > 0$; $s(\alpha) = s_0(\alpha) = B\cos\alpha \in \{s\}$; $B > 0$.

Формально опишем данные классы, состоящие из гладких, 2π-периодических функций ($y(\alpha)$ – нечетная, а $s(\alpha)$ – четная), удовлетворяющих условиям: $y(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0,\pi)$, $y'(0) > 0, y'(\pi) < 0$ ($\{y\} = Y$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0,\pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2,\pi)$, $s(0) > 0, s'(\pi/2) < 0$ ($\{s\} = \Sigma$). Для простоты будем предполагать, что величины y и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$, поэтому $y \in Y$.

Видно, что введенная в (2.1) функция F – достаточно гладкая нечетная π-периодическая, такая, что $F(\alpha) > 0$, $\alpha \in (0,\pi/2)$, $F'(0) > 0, F'(\pi/2) < 0$ ($\{F\} = \Phi$).

3. Необходимость нелинейного исследования. В связи с отмеченной ранее [1] неустойчивостью невозмущенного движения можно поставить следующий вопрос: существуют ли угловые колебания оси симметрии тела конечной амплитуды? С практической точки зрения важен анализ уравнений лишь в окрестности невозмущенного движения, поскольку при некоторых критических углах атаки происходит замыв боковой поверхности, и модель воздействия среды на тело перестает быть достоверной. Но, во-первых, для тел, различающихся формой боковой поверхности, критические углы атаки, вообще говоря, различны и неизвестны. Во-вторых, исследуется система маятникового типа, обладающая нелинейными

4. Свободное торможение. Вводя новую независимую переменную dq = vdt, первые два уравнения системы (1.2) и уравнение (2.1) можно переписать так:

$$
v' = \Psi(\alpha,\omega)v \qquad (4.1)
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha' = -\omega + \sigma\omega^2\sin\alpha + \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\cos\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha - \frac{\sigma}{I}H\omega s(\alpha)\cos\alpha \\
&\omega' = \frac{1}{I}F(\alpha) + \sigma\omega^3\cos\alpha - \frac{\sigma}{I}\omega F(\alpha)\sin\alpha + \omega\frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha - \qquad (4.2)\\
&\qquad -\frac{1}{I}H\omega s(\alpha) + \frac{\sigma}{I}H\omega^2 s(\alpha)\sin\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\Psi(\alpha,\omega) = -\sigma\omega^2\cos\alpha + \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\sin\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha - \frac{\sigma}{I}H\omega s(\alpha)\sin\alpha
$$

где ()’ = d/dq, ω = dφ/dq. Система (4.2) образует независимую подсистему второго порядка на фазовом цилиндре $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$.

5. Многопараметрическое семейство фазовых портретов системы на двумерном цилиндре. Динамическая система (4.2) имеет на двумерном фазовом цилиндре следующие положения равновесия:

$$(0,0) \text{ и } (\pi,0),\ (\pi/2,0) \text{ и } (3\pi/2,0),\ (\pi/2,1/\sigma) \text{ и } (-\pi/2,-1/\sigma) \tag{5.1}$$

Теорема 1. В бесконечномерном пространстве параметров системы (4.2) имеется область J_2, которая соответствует следующему поведению траекторий: 1) других положений равновесия, кроме как (5.1), система (4.2) не имеет; 2) около положения равновесия (0,0) при изменении ее параметров может происходить бифуркация рождения устойчивого предельного цикла из слабого фокуса.

В данной работе рассматривается лишь следующая бесконечномерная область параметров системы (4.2):

$$J = J_1 \cap J_2 \tag{5.2}$$

Области параметров (5.2) соответствует следующее поведение траекторий возле положений равновесия (5.1): 1) положение равновесия $(\pi,0)$ является отталкивающим; 2) положение равновесия (0,0) является отталкивающим, если $\mu_1 > \mu_3 - \mu_2$, и притягивающим, если $\mu_1 \le \mu_3 - \mu_2$; если $\mu_1 = \mu_3 - \mu_2$, то оно является слабым притягивающим фокусом.

Замкнутые кривые, состоящие из траекторий системы (4.2), для области (5.2) могут существовать лишь в полосе Π. Рассмотрим ключевой вопрос – о глобальном поведении следующих сепаратрис: а) выходящей из точки $(\pi/2,0)$ в полосу Π'; б) входящей в точку $(-\pi/2,0)$ из полосы Π; в) выходящей из точки $(\pi/2,0)$ в полосу Π.

Теорема 2. Глобальное поведение любых двух сепаратрис из а)–в) независимо.

Выберем в качестве пары ключевых сепаратрисы а) и б).

Определение 1. Индексом k_1 сепаратрисы а) назовем рациональное число, выбираемое из множества $\{r \in Q : r = 1/4 + m, r = 1/2 + m, m \in N_0\}$. Скажем, что $k_1 = r$, если сепаратриса а) имеет в качестве ω–предельного множества точку $(2\pi r, 1/\sigma)$, если $r = 1/4 + m$, и точку $(2\pi r - 0, +\infty)$, если $r = 1/2 + m$.

Определение 2. Индексом k_2 сепаратрисы б) назовем натуральное число j, выбираемое из множества $\{j \in N : j = 1, 2, 3, 4, 5\}$. Скажем, что $k_2 = j$, если сепаратриса б) имеет в качестве α–предельного множества точку (0,0) или устойчивый предельный цикл ($j = 1$); точку $(\pi/2,0)$ ($j = 2$); точку $(\pi,0)$ ($j = 3$); точку $(-0,-\infty)$ ($j = 4$); точку $(-\pi,0)$ ($j = 5$).

Теорема 3. Для любого k из (возможно усеченной) области определения допустимо соответствующее глобальное поведение сепаратрис а) и б).

Таким образом, определения 1 и 2 корректны.

Литература

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Экзамен, 2007. 352 с.

2. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. – С. 133–135.