$$u\ (0,t)=u\ (1,t),\ \int_0^1 u(x,t)dx=0\ (0\le t\le T),\qquad (3)$$

где $f(x,t),\varphi(x),\psi(x),q(t)$ -заданные функции, а $u(x,t)$ - искомая функция.

Определение. Под классическим решением задачи (1) – (3) понимаем функции $u(x,t)$ непрерывного в замкнутой области D_T - вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1) и удовлетворяющую всем условиям (1) – (3) в обычном смысле.

Сначала исходная задача сводится к эквивалентной (в определенном смысле) задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Abstract

Boundary value problem for second order elliptic equation with integral condition

An boundary value problem for the second order elliptic equation with an integral condition of the first kind is investigated. We introduce the definition of a classical solution for the considered boundary value problem reduced to solving of the system of integral equations by the use of the Fourier method. First, the existence and uniqueness of solutions of the system of integral equations are proved by using the method of contraction mappings; and then the existence and uniqueness of classical solutions of the original problem are proved.

Литература

1. Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды. // Математическое моделирование. 2000. т.12., №1, с. 94 - 103
2. Бицадзе А.В., Самарский А.А., О некоторых простейших обобщенных линейных эллиптических задач. -ДАН СССР,1969, т.85, №4, с.739-740.
3. Гордезиани Д.Г. Об одном методе решения краевой Бицадзе – Самарского.- Докл. семин. ИПМ Тбил.госуниверситета, 1970, №2, с.38-40.
4. Гордезиани Д.Г., Джуаев Д.З. О разрешимости одной краевой задачи для нелинейного уравнения эллиптического типа.- Сообщ. АН ГССР, 1972, т.68, №4, с.289-292.

ДИАГНОСТИКА НЕКОТОРОЙ СИСТЕМЫ ПРЯМОГО УПРАВЛЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Селиванова Н.Ю., Шамолин М.В., доктор физ.-мат. наук
(ВИНИТИ РАН, МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия)

Ключевые слова: задача дифференциальной диагностики, диагностирование, асимптотическая устойчивость

В настоящей работе движение летательного аппарата описывается нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. На базе этих уравнений дается классификация возможных неисправностей в системе управления движением. Вводятся понятия опорных неисправностей и их окрестностей, дается математическое моделирование этих неисправностей и их окрестностей, вводится понятие диагностического пространства и его математической структуры.

1. Введение. Как уже отмечалось ранее [1–3], задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: задаче контроля, т.е. установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования, т.е. поиску происшедшей неисправности. Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Задача диагностирования может быть решена путем последующего слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма краткого интервала времени.

1. Уравнения движения. Рассмотрим летательный аппарат с прямым управлением, движение которого может быть описано дифференциальными уравнениями второго порядка

$$x' = Ax - b\delta,\ \ \delta = \Phi(\zeta),\ \ \zeta = r^T x + h\varphi(x,\delta,f(\eta)). \tag{1}$$

Здесь $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — вектор, характеризующий состояние летательного аппарата; δ — координата управления; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — постоянная устойчивая матрица; $\varphi(x,\delta,f(\eta)) = \int\limits_{t_0}^{t}(p^T x + q\delta - f(\eta))dt$, а $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ — постоянные матрицы; q и h — постоянные скалярные величины; T — символ транспонирования матрицы.

Функции $\Phi(\zeta)$ и $f(\eta)$ (η — формируемый сигнал обратной связи) принадлежат к классу допустимых функций: они определены и непрерывны при всех значениях ζ и η и удовлетворяют условиям $\Phi(\zeta) = 0, \zeta = 0; \zeta\Phi(\zeta) > 0,\ \zeta \neq 0;\ \ f(\eta) = 0,\ \eta = 0;\ \eta\Phi(\eta) > 0,\ \eta \neq 0.$

Первая задача ставится следующим образом: найти такое формируемое η, которое не доставляет неустойчивости аппарату и обеспечивает выполнение цели управления.

2. Достаточные условия устойчивости. В силу системы (1) выполнены равенства

$$\zeta' = r^T x' + h\varphi' = c^T x - \rho\Phi(\zeta) - hf(\eta), \tag{2}$$

где $c = r^T A + hp^T = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{22} \end{pmatrix}, \rho = r^T b + hq.$

Функцию Ляпунова выберем в виде Лурье и Постникова $V = x^T Bx + \int\limits_0^{\zeta}\Phi(\zeta)d\zeta.$ Производная по времени вдоль траектории системы (1) представится в следующем виде: $V' = x'^T Bx + x^T Bx' + \Phi(\zeta)\zeta'$. В силу (1) и (2) производная вдоль траектории будет равна $-V' = \begin{pmatrix} x^T & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d^T & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \Phi \end{pmatrix} + \Phi(\zeta)hf(\eta)$, где

$$-C = A^T B + BA,\ d = Bb - \frac{1}{2}c. \tag{3}$$

Для положительной определенности величины $-V'$ как квадратичной формы от x, Φ и f потребуем выполнение условий

$$C > 0, \quad \rho > d^T C^{-1} d, \tag{4}$$

$$h > 0, \tag{5}$$

$$\Phi(\zeta) f(\eta). \tag{6}$$

В дальнейшем воспользуемся модификацией Лурье. Положительную определенность величины $-V'$ гарантировать проще, положив

$$d = Bb - \frac{1}{2}c = 0. \tag{7}$$

В силу (7) из (4) следует, что

$$\rho = r_1 b_1 + r_2 b_2 + hq > 0. \tag{8}$$

Перейдем теперь к совместному решению уравнений Ляпунова (3) и неравенств (4). С этой целью выберем матрицы B и C в следующем виде:

$$B = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \\ q_0 & r_0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Если в (9) принять, что

$$p > 0, r > 0, \tag{10}$$

то матрица C положительно определена.

С учетом (9) и уравнения Ляпунова (3) получим следующую систему уравнений ($a_{11} + a_{22} \neq 0$):

$$-p = 2\left(\left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22}}\right)p_0 - \frac{a_{21}^2}{a_{11} + a_{22}} r_0\right), \ -r = 2\left(\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22}}\right)r_0 + \frac{a_{12}^2}{a_{11} + a_{22}} p_0\right).$$

(11)

Если определитель системы алгебраических уравнений (11) относительно неизвестных p_0, r_0

$$\Delta = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \tag{12}$$

отличен от нуля, то система (11) будет иметь единственное решение. Предположим, что определитель (12) не равен нулю, и выпишем решение системы уравнений (11):

$$p_0 = \frac{2}{\Delta}\left(-\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22}}\right)p - \frac{a_{21}^2}{a_{11} + a_{22}} r\right), \ r_0 = \frac{2}{\Delta}\left(-\left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22}}\right)r - \frac{a_{12}^2}{a_{11} + a_{22}} p\right), \tag{13}$$

$$q_0 = \frac{2}{\Delta}\frac{1}{a_{11} + a_{22}}(a_{12}a_{22}p + a_{21}a_{11}r). \tag{14}$$

Выпишем, далее, учитывая (9), решение уравнения (7). Имеем:

$$p_0 b_1 + q_0 b_2 = \frac{1}{2}c_{11}, \ q_0 b_1 + r_0 b_2 = \frac{1}{2}c_{22}. \tag{15}$$

А теперь перепишем уравнения (15) с учетом (13) и (14):

$$\frac{2}{\Delta}\left\{\left(-b_1\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22}}\right) + b_2\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11} + a_{22}}\right)p + \left(-b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11} + a_{22}} + b_2\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11} + a_{22}}\right)r\right\} = \frac{1}{2}c_{11},$$

$$\frac{2}{\Delta}\left\{\left(b_1\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}-b_2\frac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}}\right)p+\left(b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}-b_2\left(a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)r\right\}=\frac{1}{2}c_{22}. \qquad (16)$$

Тогда решение системы алгебраических уравнений (16) примет вид:

$$p=\frac{1}{\Delta\overline{\Delta}}\left\{\left(b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}-b_2\left(a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{11}-\frac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_2a_{21}a_{11}-b_1a_{21}^2)c_{22}\right\},$$

$$r=\frac{1}{\Delta\overline{\Delta}}\left\{\left(b_2\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}-b_1\left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{22}-\frac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_1a_{12}a_{22}-b_2a_{12}^2)c_{11}\right\}. \qquad (17)$$

Учитывая (10), из (17) получим следующие условия:

$$\left(b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}-b_2\left(a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{11}>\frac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_2a_{21}a_{11}-b_1a_{21}^2)c_{22},$$

$$\left(b_2\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}-b_1\left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{22}>\frac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_1a_{12}a_{22}-b_2a_{12}^2)c_{11}. \qquad (18)$$

Таким образом, если $a_{11}+a_{22}\neq 0, \Delta\neq 0, \overline{\Delta}\neq 0$, то выполняются условия (5), (8) и (18). Поэтому рассматриваемая система будет абсолютно устойчивой независимо от выбора допустимых функций Φ и f, удовлетворяющих условию (6), то есть все решения системы (1) будут сходиться к началу координат при $t\to+\infty$.

3. Априорный список неисправностей. Остановимся только на диагностировании отказов в системе управления летательным аппаратом (1). Рассмотрим отказы трех датчиков, так или иначе формирующих три обратные связи в системе управления объектом:

1) $r_1=0.$ (19)

2) $r_2=0, p_2=0, q=0.$ (20)

3) $\eta=0.$ (21)

4. Основная теорема. Сформируем следующие суммы:

$$S_j=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N}(x_{jk}(t_l)-x_{gk}(t_l))^2,\ j=0,\ldots,3, \qquad (22)$$

где $x_{jk}(t_l)$ являются значениями компонент вектора состояния рассматриваемой системы в момент $t_l, l=1,\ldots N$, рассчитанными для j-й траектории по уравнениям (1) для исходной системы и систем с параметрами (19)–(21); величины же $x_{gk}(t_l)$ в (22) являются компонентами действительного вектора состояния, измеренного в моменты времени $t_l, l=1,\ldots N$. Справедлива основная

Теорема. *Для конечного набора систем уравнений найдутся такие числа S_j и N ($j=0,\ldots,3$), что при некотором номере i величина $S_i=\min_j S_j$ возникшая в системе неисправность с неизвестным номером j в процессе движения объекта с помощью функционала (22) будет диагностирована однозначно (ср. с теоремами из [1–3]).*

Из этой теоремы и вытекает алгоритм диагностирования: из всех чисел S_j выбирается наименьшее и номер i такого числа S_i принимается за номер случившейся неисправности. Под номером «0» в априорный список включена исходная (исправная) система (1). Алгоритм диагностирования включается циклически и, если он обнаруживает нулевую неисправность, то моделируется дальнейшее функционирование системы. Если же номер j неисправности не был равен нулю, то выдается сигнал о возникновении j-й неисправности.

Summary

Keywords: differential diagnosis problem, diagnosing, asymptotical behavior

In this paper, the motion of an aircraft is described by nonlinear ordinary differential equations. Based on these equations, the probable malfunctions in the motion control system are classified, the concepts of reference malfunctions and their neighborhoods are introduced, the mathematical modeling of these malfunctions and their neighborhoods is carried out, the concept of diagnostic space is introduced, and the mathematical structure of this space is defined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. V. Shamolin*, Foundations of differential and topological diagnostics, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 114, No. 1, 2003, p.p. 976-1024.
2. *Шамолин М.В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Издание 2-е, переработанное и дополненное. – М.: Изд-во "Экзамен", 2007. – 320 с.
3. *Борисенок И.Т., Шамолин М.В.* Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундаментальная. и прикладная математика. — 1999. — **5**, Вып. 3. —С. 775–790.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ НОВЕЛЛ ИЛИ ЗАДАЧ-КОМИКСОВ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ СОЗНАТЕЛЬНОСТИ В УСВОЕНИИ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА ПО МАТЕМАТИКЕ

Фирстова Наталья Игоревна, к.п.н., доцент
(Московский педагогический государственный университет, Россия)

В условиях динамически развивающегося общества цели и задачи образования видоизменяются и дополняются в соответствии с потребностями социума и его особенностями. Это находит отражение в методах обучения, которые, в свою очередь, являются компонентами целостной методической системы. В связи с этим наблюдаются серьезные изменения в обучении математике, как прикладной науки. На первый план выходит именно применение полученных знаний в реальных ситуациях на практике. Однако на этот процесс накладывают особые сложности специфические особенности математики как науки: достаточно высокий уровень абстракции, сложности мотивирования обучения и т.п. Отдельной важной проблемой становится реализация принципа наглядности, а также обеспечение постоянной заинтересованности учащихся в том, что они делают. Учителя достаточно часто сталкиваются со сложностями именно в этом компоненте обучения. Свой отпечаток накладывает также реалии современного информационного общества и те его особенности, что во многом формируют мировоззрение школьников. Образность, яркость и динамичность визуального представления информации влияет во многом на формирование психики ребенка: наглядно-образное мышление требует получение соответствующих образов, требует визуализации информации, представленной в письменном или звуковом виде.