ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2014, том 457, № 5, с. 542–545

МЕХАНИКА

УДК 517+531.01

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ МНОГОМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ ПРИ УЧЕТЕ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

© 2014 г.   М. В. Шамолин

Представлено академиком В.В. Козловым 17.02.2014 г.

Поступило 18.02.2014 г.

DOI: 10.7868/S0869565214230121

Построение неконсервативного силового поля в динамике многомерного твердого тела является важным моментом и опирается на результаты, взятые из динамики маломерных твердых тел, находящихся в поле силы сопротивления среды. Становится возможным обобщение динамической части уравнений на случай движения тела многомерного в аналогично построенном поле сил и получение полного списка, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты важны в смысле присутствия в системе неконсервативного момента, а ранее другими авторами использовалось поле сил потенциальное (см., например, [1–3]). Более того, при построении силового поля используется дополнительная зависимость от тензора угловой скорости, введение которой в систему априори не очевидно [4, 5].

В [5, 6] показана интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде, когда у системы динамических уравнений был найден в явном виде первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле комплексного анализа) функцией квазискоростей. При этом все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности, которая имеет форму (одномерной) пластины. Затем [5, 7, 8] задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений был найден в явном виде полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части его поверхности, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. В дальнейшем [9, 10] была исследована динамическая часть уравнений движения четырехмерных твердых тел различных типов динамической симметрии, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску.

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

УРАВНЕНИЯ НА АЛГЕБРЕ ЛИ so(n)

Рассмотрим движение однородного твердого тела массы m, частью поверхности которого является $(n-1)$-мерный диск, находящийся в некотором неконсервативном поле силы $\mathbf{S}$, с динамической симметрией следующего вида:

$$I_1,\ I_2 = \ldots = I_n. \qquad (1)$$

Здесь $I_1, \ldots, I_n$ – главные моменты инерции тела в некоторой связанной с ним системе координат $Dx_1\ldots x_n$, при этом $CD = Dx_1$ (C – центр масс, D – центр диска), а оси $Dx_2, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска. Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ – обобщенные сферические координаты вектора скорости v_D центра D диска такие, что α – угол между вектором v_D и прямой Dx_1.

Пусть $\mathbf{S} = \{-S, \ldots, 0\}$ в системе $Dx_1\ldots x_n$, при этом $S = s_1(\alpha)v^2$, $v = |\mathrm{v}_D|$, $s_1 \geq 0$, $s_1(\alpha) = s(\alpha)\,\mathrm{sign}\cos\alpha$. Если Ω – тензор угловой скорости твердого тела, $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, то та часть уравнений движения тела, которая отвечает алгебре Ли so(n), размерность которой равна $n(n-1)/2$, имеет следующий вид [9–12]:

$$\Omega^{\bullet}\Lambda + \Lambda\Omega^{\bullet} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = \mathrm{M}, \qquad (2)$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + \ldots + I_n)/2$, ..., $\lambda_n = (I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n)/2$, M – момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbf{R}^n$, спроектированный на “естественные” координаты в алгебре Ли so(n), $[\ldots]$ – коммутатор в so(n). Так, например, элемент $\Omega \in so(n)$ при $n = 5$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_{10}$ – компоненты "угловой скорости" в проекциях на естественные координаты в алгебре Ли so(5).

Если $N = (0, x_{2N}, \ldots, x_{nN})$ в системе $Dx_1 \ldots x_n$, то при вычислении момента силы **S** строится отображение

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to so(n), \tag{3}$$

переводящее пару векторов из $\mathbf{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли $so(n)$. Так, например, при $n = 5$ в проекциях на алгебру Ли so(5) момент силы сопротивления имеет следующий вид (ср. с [9–12]):

$$(0, 0, 0, -x_{5N}s(\alpha)v^2, 0, 0, x_{4N}s(\alpha)v^2, 0, -x_{3N}s(\alpha)v^2,$$
$$x_{2N}s(\alpha)v^2) \in \mathbf{R}^{10} \cong \mathrm{M} \in so(5),$$

при этом в общем случае элемент M будет иметь $(n-1)(n-2)/2$ нулевых компонент, поскольку вспомогательная матрица для построения отображения (3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -S & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

и именно $(n-1)(n-2)/2$ ее миноров второго порядка со знаком, которые и определяют элемент M, тождественно равны нулю.

Уравнения (2) можно переписать в виде системы $n(n-1)/2$ уравнений. Так, в частности, при $n = 5$ система на алгебре Ли so(5) примет вид

$$\begin{gathered}
(\lambda_4 + \lambda_5)\dot\omega_1 + (\lambda_4 - \lambda_5)(\omega_4\omega_7 + \omega_3\omega_6 + \omega_2\omega_5) = 0, \\
(\lambda_3 + \lambda_5)\dot\omega_2 + (\lambda_5 - \lambda_3)(\omega_1\omega_5 - \omega_3\omega_8 - \omega_4\omega_9) = 0, \\
(\lambda_2 + \lambda_5)\dot\omega_3 + (\lambda_2 - \lambda_5)(\omega_4\omega_{10} - \omega_2\omega_8 - \omega_1\omega_6) = 0, \\
(\lambda_1 + \lambda_5)\dot\omega_4 + (\lambda_5 - \lambda_1)(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) = -x_{5N}S, \\
(\lambda_3 + \lambda_4)\dot\omega_5 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_7\omega_9 + \omega_6\omega_8 + \omega_1\omega_2) = 0, \\
(\lambda_2 + \lambda_4)\dot\omega_6 + (\lambda_4 - \lambda_2)(\omega_5\omega_8 - \omega_7\omega_{10} - \omega_1\omega_3) = 0, \\
(\lambda_1 + \lambda_4)\dot\omega_7 + (\lambda_1 - \lambda_4)(\omega_1\omega_4 - \omega_6\omega_{10} - \omega_5\omega_9) = x_{4N}S, \\
(\lambda_2 + \lambda_3)\dot\omega_8 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_9\omega_{10} + \omega_5\omega_6 + \omega_2\omega_3) = 0, \\
(\lambda_1 + \lambda_3)\dot\omega_9 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) = -x_{3N}S, \\
(\lambda_1 + \lambda_2)\dot\omega_{10} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_8\omega_9 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) = x_{2N}S.
\end{gathered} \tag{4}$$

ДИНАМИКА В $\mathbf{R}^n$

По аналогии с трехмерным случаем можно вывести формулы, аналогичные формулам Эйлера и Ривальса, а именно, скорости и ускорения любых двух точек A и B многомерного твердого тела в любой декартовой системе координат связаны соотношениями

$$v_B = v_A + \Omega AB, \quad w_B = w_A + \Omega^2 AB + \mathrm{E}AB, \tag{5}$$

где $\Omega \in so(n)$, $\mathrm{E} = \dot\Omega \in so(n)$. Тензор E называется тензором углового ускорения.

Таким образом, уравнение движения центра масс в $\mathbf{R}^n$ запишется при помощи (5) уравнением Ньютона:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}. \tag{6}$$

Если правые части уравнений (2), (6) зависят лишь от квазискоростей в системе (т.е. от величин v, $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$, а также компонент тензора $\Omega \in so(n)$), то эти уравнения определяют замкнутую динамическую часть системы уравнений движения многомерного твердого тела на $so(n) \times \mathbf{R}^n$, которая имеет порядок $n(n-1)/2 + n = n(n+1)/2$.

ДВИЖЕНИЕ В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Рассмотрим такой класс движений тела, при котором выполнено следующее условие (неинтегрируемая связь):

$$v \equiv \mathrm{const}, \tag{7}$$

достаточное для преобразования полной системы динамических уравнений к системе с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [5]).

Таким образом, происходит понижение порядка системы (6) на единицу. Для достижения этого предположим, что по прямой $CD = Dx_1$ на тело действует некоторая следящая сила **T**, обеспечивающая выполнение условия (7) (ср. с маломерными случаями [5]). Определенным выбором величины следящей силы выполнение условия (7) может быть достигнуто [5], при этом $\mathbf{F} = \mathbf{T} + \mathbf{S} = \{T - S, 0, \ldots, 0\}$ в системе $Dx_1 \ldots x_n$.

Поскольку выполнены равенства (1), то существуют $(n-1)(n-2)/2$ циклических первых интегралов у уравнений (2):

$$\omega_{k_1} = \omega_{k_1}^0, \ldots, \omega_{k_s} = \omega_{k_s}^0, \tag{8}$$

где $s = (n-1)(n-2)/2$. При этом $k_1 = 1, \ldots, k_s$ – некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$. Рассмотрим набор (8) первых интегралов на своих нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = 0, \ldots, \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{9}$$

В частности, при $n = 5$ у системы (4) имеются шесть таких первых интегралов: $\omega_1 = \omega_1^0$, $\omega_2 = \omega_2^0$, $\omega_3 = \omega_3^0$, $\omega_5 = \omega_5^0$, $\omega_6 = \omega_6^0$, $\omega_8 = \omega_8^0$, рассматриваемых на нулевых уровнях: $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0$. Ненулевых компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось $p = n(n-1)/2 - (n-1)(n-2)/2 = n - 1$ штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ – оставшиеся p чисел из множества W, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

При выполнении условий (7)–(9) порядок общей системы (2), (6) опускается до $2(n-1)$. Если правые части уравнений (2), (6) зависят лишь от квазискоростей в системе, то справедлива

Т е о р е м а 1. *Система* (2), (6) *при выполнении условий* (7)–(9) *редуцируется к динамической системе на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^{n-1}$ $(n-1)$-*мерной сферы* $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, ..., \beta_{n-2}\}$.

МОМЕНТ, ЗАВИСЯЩИЙ ОТ ТЕНЗОРА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

Введем зависимость функций координат точки N от тензора угловой скорости Ω. Выберем функции $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ в следующем виде (гиперплоскость диска задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ \ldots \\ x_{nN} \end{pmatrix} = Q - \frac{1}{v}\Omega \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \ldots \\ h_n \end{pmatrix},$$

где Q – функции, не зависящие от тензора угловой скорости, $h_1, h_2 = ... = h_n > 0$ (ср. со случаями меньшей размерности [5–8]). При этом следует учесть, что если $(v, \alpha, \beta_1, ..., \beta_{n-2})$ – сферические координаты в $\mathbf{R}^n$, то

$$Q = R(\alpha) i_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}),$$
$$i_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = i_v(\pi/2, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}),$$

где

$$i_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Для построения силового поля используется пара функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. По аналогии с маломерными случаями без ограничения общности [5] можно считать, что

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A > 0, \quad s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad B > 0 \quad (10)$$

(функции типа Чаплыгина [13]).

ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

Преобразуем далее набор фазовых переменных $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2n-1}(-\beta_1) \circ T_{n-3n-2}(-\beta_2) \circ \ldots \circ T_{12}(-\beta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix},$$

где матрица $T_{kk+1}(\beta)$, $k = 1, ..., n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка M_{kk+1}:

$$T_{kk+1}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{kk+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{kk+1} = \begin{pmatrix} m_{kk} & m_{kk+1} \\ m_{k+1k} & m_{k+1k+1} \end{pmatrix}, \quad m_{kk} = m_{k+1k+1} = \cos\beta,$$
$$m_{k+1k} = -m_{kk+1} = \sin\beta.$$

Введем следующие безразмерные переменные, параметры и дифференцирование:

$$w_1 = \frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}}, \ldots, w_{n-4} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad w_{n-3} = \frac{z_2}{z_1},$$

$$w_{n-2} = w = \frac{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}}{n_0 v}, \quad w_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{n_0 v}, \quad (11)$$

$$n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad b = \sigma n_0, \quad \sigma = CD,$$

$$H_1 = \frac{Bh_2}{I_2 n_0}, \quad n_0 v\langle ' \rangle = \langle ^{\bullet} \rangle.$$

В результате совместные уравнения (2), (6) при условиях (7)–(9) примут следующий вид:

$$\alpha' = -(1 + bH_1)w_{n-1} + b\sin\alpha,$$

$$w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)w^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_{n-1}\cos\alpha, \quad (12)$$

$$w' = (1 + bH_1)ww_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w\cos\alpha,$$

$$w'_k = d_k\frac{1 + w_k^2}{w_k}\frac{\cos\beta_k}{\sin\beta_k}, \quad (13)$$

$$\beta'_k = d_k, \quad k = 1, \ldots, n-3,$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}(1 + bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\beta_{n-3}}, \quad (14)$$

где $Z_1(w_1, ..., w_{n-1}) = z_1$ в силу замены (11), d_k, $k = 1, ..., n-3$ – некоторые гладкие функции на своей области определения.

Видно, что система (12)–(14) порядка $2(n-1)$ распадается на совокупность независимых подсистем: система (12) третьего порядка, $n-3$ системы (13) (после замены независимого переменного) второго, при этом система (12), (13) – независимая подсистема порядка $2n-3$ (уравнение (14) отделяется).

Таким образом, для полного интегрирования системы (12)–(14) достаточно знать два независимых первых интеграла системы (12), $n-3$ независимых первых интеграла совокупности систем (13), а также одно инвариантное соотношение, “привязывающее” уравнение (14).

ПОЛНЫЙ СПИСОК ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Один из трансцендентных первых интегралов системы (12) имеет вид

$$\frac{(1+bH_1)w_{n-1}^2+(1+bH_1)w^2-(b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w\sin\alpha}= \\ = C_1 = \text{const}. \qquad (15)$$

И второй трансцендентный [5, 14] интеграл, имеющий громоздкий вид, выражается через конечную комбинацию элементарных функций и имеет следующий структурный вид:

$$\ln|\sin\alpha| + G_1\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \qquad (16)$$

Далее, распавшаяся система (13) имеет $n-3$ независимых первых интеграла

$$\frac{\sqrt{1+w_k^2}}{\sin\beta_k} = C_{k+2} = \text{const}, \quad k = 1, \ldots, n-3. \qquad (17)$$

А первый интеграл, “привязывающий” уравнение (14) на угол β_{n-2}, найдется из уравнения

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}} = -\frac{1}{w_{n-3}\sin\beta_{n-3}},$$

при этом, используя первый интеграл (17) при $k = n-3$, окончательно получим его вид:

$$\operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3}-C_{n-1}^2}} \pm \beta_{n-2} = C_n = \text{const}. \qquad (18)$$

Теорема 2 (основная). *Динамическая часть* (2), (6) *уравнений движения n-мерного твердого тела при условиях* (1), (7)–(9), (10) *обладает полным списком инвариантных соотношений, из которых одно* (7) *является аналитической неинтегрируемой связью*, $(n-1)(n-2)/2$ (*см.* (8)) *являются аналитическими функциями, а остальные* $n-1$ (*см.* (15)–(18)) – *трансцендентными функциями своих переменных* (*после их формального продолжения в комплексную область*), *выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций*.

В работах автора [9–12] уже рассматривались задачи о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы. Данная работа открывает новый цикл работ по интегрированию многомерного твердого тела в неконсервативном поле, поскольку ранее, как уже указывалось (см., например, [1–3]), рассматривались лишь такие движения тела, когда поле внешних сил было потенциальным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12–01–00020-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Манаков С.В.* // Функцион. анализ и его прил. 1976. Т. 10. № 4. С. 93–94.
2. *Веселов А.П.* // ДАН. 1983. Т. 270. № 6. С. 1298–1300.
3. *Богоявленский О.И.* // ДАН. 1986. Т. 287. № 5. С. 1105–1108.
4. *Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В.* Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1969. 349 с.
5. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 256 с.
6. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 3. С. 51–54. С. 105.
7. *Шамолин М.В.* // ДАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.
8. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.
9. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.
10. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.
11. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.
12. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49.
13. *Чаплыгин С.А.* В кн.: Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133–135.
14. *Шамолин М.В.* // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.