УДК 531.01

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ: КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

М.В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Россия, 119192, Москва, Мичуринский пр., 1

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Ключевые слова: твердое тело, сопротивляющаяся среда, устойчивость, качественный анализ, интегрируемость

Аннотация: В работе рассматривается пространственная задача о движении твердого тела с передним круглым торцом в сопротивляющейся среде в условиях квазистационарности. При этом в системе присутствует следящая сила, позволяющая рассматривать различные классы движения и тем самым редуцировать исходную систему динамических уравнений. Приведен такой вид следящей силы, при котором возможен не только обстоятельный качественный анализ, но и получение случая интегрируемости динамических уравнений в элементарных функциях.

1. Задача о движении со следящей силой

Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела с передним плоским торцом (двумерным диском) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [1–3]. Если (v, α, β_1) — сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр диска, лежащий на оси симметрии тела), $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — проекции его угловой скорости на оси системы координат $Dx_1x_2x_3$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2, Dx_3 лежат в гиперплоскости диска, $I_1,\ I_2,\ I_3 = I_2,\ m$ — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид:

$$\dot v\cos\alpha - \dot\alpha v\sin\alpha + \Omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \Omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \sigma(\Omega_2^2+\Omega_3^2) = \frac{F_x}{m},$$

$$\dot v\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \Omega_3 v\cos\alpha -$$
$$-\Omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \sigma\Omega_1\Omega_2 - \sigma\dot\Omega_3 = 0,$$

$$\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1+\dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1+\dot{\beta}_1v\sin\alpha\cos\beta_1+\Omega_1v\sin\alpha\cos\beta_1- \tag{1}$$
$$-\Omega_2v\cos\alpha-\sigma\Omega_1\Omega_3+\sigma\dot{\Omega}_2=0,$$
$$I_1\dot{\Omega}_1=0,$$
$$I_2\dot{\Omega}_2+(I_1-I_2)\Omega_1\Omega_3=-z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$
$$I_2\dot{\Omega}_3+(I_2-I_1)\Omega_1\Omega_2=y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

где $F_x=-S,\ S=s(\alpha)v^2,\ \sigma>0,\ v>0$.

Первые три уравнения (1) описывают движение центра масс в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^3$ в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3$. Вторые же три уравнения (1) получены из теоремы об изменении кинетического момента тела в осях Кенига.

Таким образом фазовым пространством системы (1) шестого порядка является прямое произведение $\mathbf{R}^1\times\mathbf{S}^2\times\mathrm{so}(3)$ трехмерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(3)$.

Сразу же заметим, что система (1), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2=I_3, \tag{2}$$

обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1\equiv\Omega_1^0=\mathrm{const}. \tag{3}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0=0. \tag{4}$$

Рассмотрим более общую задачу о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [1,7])

$$v\equiv\mathrm{const}, \tag{5}$$

то в системе (1) вместо F_x будет стоять величина

$$T-s(\alpha)v^2,\ \sigma=DC. \tag{6}$$

Случаи, когда следящая сила выбирается из условия

$$\mathbf{T}=-\mathbf{S}$$

(т.е. когда центр масс тела движется прямолинейно и равномерно), а также когда следящая сила отсутствует ($\mathbf{T}\equiv\mathbf{0}$) см. также в [4–6,8].

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (5). Действительно, формально выражая величину T в силу системы (1) получим при $\cos\alpha \neq 0$:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = m\sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) +$$

$$+s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma}{I_2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left[z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right]\right]. \tag{7}$$

При получении равенства (7) используются условия (3)–(5).

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (5). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (1) в результате действий порождает независимую систему четвертого порядка следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \Omega_3 v\cos\alpha - \sigma\dot\Omega_3 = 0,\\
&\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \Omega_2 v\cos\alpha + \sigma\dot\Omega_2 = 0,\\
&I_2\dot\Omega_2 = -z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
&I_2\dot\Omega_3 = y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{aligned} \tag{8}$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v.

Система (8) эквивалентна

$$\begin{aligned}
&\dot\alpha v\cos\alpha + v\cos\alpha\left[\Omega_3\cos\beta_1 - \Omega_2\sin\beta_1\right] + \sigma\left[-\dot\Omega_3\cos\beta_1 + \dot\Omega_2\sin\beta_1\right] = 0,\\
&\dot\beta_1 v\sin\alpha - v\cos\alpha\left[\Omega_2\cos\beta_1 + \Omega_3\sin\beta_1\right] + \sigma\left[\dot\Omega_2\cos\beta_1 + \dot\Omega_3\sin\beta_1\right] = 0,\\
&\dot\Omega_2 = -\frac{v^2}{I_2}z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\\
&\dot\Omega_3 = \frac{v^2}{I_2}y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha).
\end{aligned} \tag{9}$$

Введем новые квазискорости в системе:

$$z_1 = \Omega_2\cos\beta_1 + \Omega_3\sin\beta_1,\ \ z_2 = -\Omega_2\sin\beta_1 + \Omega_3\cos\beta_1. \tag{10}$$

Как видно из (9), на многообразии

$$O = \left\{(\alpha, \beta_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbf{R}^4 :\ \alpha = \frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \tag{11}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot\alpha$, $\dot\beta_1$. Формально, таким образом, на многообразии (11) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат (v, α, β_1), а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (9) вырождается.

Из этого следует, что система (9) вне и только вне многообразия (11) эквивалентна системе

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad & \dot\alpha = -z_2 + \frac{\sigma v}{I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right],\\
& \dot z_2 = \frac{v^2}{I_2}s(\alpha)\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right] -\\
& -z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma v}{I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}z_1\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right],\\
& \dot z_1 = z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left[-\frac{v^2}{I_2}s(\alpha) + \frac{\sigma v}{I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}z_2\right]\times\\
& \times\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right],\\
& \dot\beta_1 = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma v}{I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right].
\end{aligned}
$$

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,z_1/v,z_2/v)$ в силу (10).

Нарушение теоремы единственности для системы (9) на многообразии (11) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (11) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (12), пересекая многообразие (11) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (5) необходимо выбрать значение T при $\cos\alpha \neq 0$ в виде (7).

Пусть

$$(13)\qquad \lim_{\alpha\to\pi/2}\frac{\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right]s(\alpha)}{\cos\alpha} = L\left(\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right).$$

Заметим, что $|L| < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$(14)\qquad \lim_{\alpha\to\pi/2}\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right]s(\alpha)\right)\right| < +\infty.$$

При $\alpha = \pi/2$ нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$(15)\qquad T = T_v\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\Omega\right) = m\sigma(\Omega_2^2+\Omega_3^2) - \frac{m\sigma L v^2}{I_2}.$$

где значения Ω_2,Ω_3 — произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W, необходимо выбрать следящую силу в виде

$$(16)\qquad T = T_v\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\Omega\right) = \frac{mv^2}{R_0},$$

где R_0 — расстояние CW.

Равенства (7) и (16) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (11), что и доказывает сделанное замечание.

2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

2.1. Введение зависимости от угловой скорости

Введем зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на двумерный диск, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}) = (x_N, y_N, z_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [7, 9].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{17}$$

где $R = (R_1, R_2, R_3)$ — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции R от угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Здесь (h_1, h_2, h_3) — некоторые положительные параметры (ср. с [7]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то

$$x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1 \frac{\Omega_3}{v}, \ x_{3N} = z_N = Q_3 + h_1 \frac{\Omega_2}{v}. \tag{19}$$

2.2. Приведенная система

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [2]

$$Q_2 = A \sin\alpha \cos\beta_1, \ Q_3 = A \sin\alpha \sin\beta_1, \ A > 0, \tag{20}$$

динамические функции s, y_N и z_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \ B > 0,$$

$$y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin\alpha \cos\beta_1 - h\frac{\Omega_3}{v}, \ h = h_1 > 0, \ v \neq 0, \tag{21}$$

$$z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin\alpha \sin\beta_1 + h\frac{\Omega_2}{v}, \ h = h_1 > 0, \ v \neq 0,$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости). Причем $h_2 = h_3$ в силу динамической симметрии тела.

Тогда, благодаря неинтегрируемой связи (5), вне и только вне многообразия (11) динамическая часть уравнений движения (система (12)) примет вид аналитической системы

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= -\left(1+\frac{\sigma Bh}{I_2}\right) z_2 + \frac{\sigma ABv}{I_2}\sin\alpha,\\
\dot{z_2} &= \frac{ABv^2}{I_2}\sin\alpha\cos\alpha - \left(1+\frac{\sigma Bh}{I_2}\right) z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{Bhv}{I_2} z_2\cos\alpha,\\
\dot{z_1} &= \left(1+\frac{\sigma Bh}{I_2}\right) z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{Bhv}{I_2} z_1\cos\alpha,\\
\dot{\beta_1} &= \left(1+\frac{\sigma Bh}{I_2}\right) z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Вводя далее безразмерные переменные, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$
z_k \mapsto n_0 v z_k,\ k=1,2,\ n_0^2=\frac{AB}{I_2},\ b=\sigma n_0,\ H_1=\frac{Bh}{I_2 n_0},\ <\cdot>=n_0 v <'>, \tag{23}
$$

приведем систему (22) к виду

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= -(1+bH_1) z_2 + b\sin\alpha,\\
z_2' &= \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1) z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 z_2\cos\alpha,\\
z_1' &= (1+bH_1) z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 z_1\cos\alpha,
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$
\beta_1' = (1+bH_1) z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{25}
$$

Видно, что в системе четвертого порядка (24), (25) которую, как будет показано далее, можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbf{S}^2$, образовалась независимая система третьего порядка (24) на своем трехмерном многообразии.

2.3. Полный список инвариантных соотношений

Для начала сопоставим системе третьего порядка (24) неавтономную систему второго порядка

$$
\begin{aligned}
\frac{dz_2}{d\alpha} &= \frac{\sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)z_1^2\cos\alpha/\sin\alpha - H_1 z_2\cos\alpha}{-(1+bH_1)z_2 + b\sin\alpha},\\
\frac{dz_1}{d\alpha} &= \frac{(1+bH_1)z_1 z_2\cos\alpha/\sin\alpha - H_1 z_1\cos\alpha}{-(1+bH_1)z_2 + b\sin\alpha}.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Используя замену $\tau=\sin\alpha$, перепишем систему (26) в алгебраическом виде

$$
\begin{aligned}
\frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{\tau - (1+bH_1)z_1^2/\tau - H_1 z_2}{-(1+bH_1)z_2 + b\tau},\\
\frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{(1+bH_1)z_1 z_2/\tau - H_1 z_1}{-(1+bH_1)z_2 + b\tau}.
\end{aligned} \tag{27}
$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z_k = u_k \tau, \ \ k = 1, 2, \tag{28}$$

приводим систему (27) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - (1 + bH_1)u_1^2 - H_1 u_2}{-(1 + bH_1)u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{(1 + bH_1)u_1 u_2 - H_1 u_1}{-(1 + bH_1)u_2 + b}, \end{aligned} \tag{29}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} \tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{(1 + bH_1)(u_2^2 - u_1^2) - (b + H_1)u_2 + 1}{-(1 + bH_1)u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}{-(1 + bH_1)u_2 + b}. \end{aligned} \tag{30}$$

Сопоставим системе второго порядка (30) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (1 + bH_1)(u_1^2 - u_2^2) - (b + H_1)u_2}{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}, \tag{31}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1 + bH_1)(u_2^2 + u_1^2) - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{32}$$

Итак, уравнение (31) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1 + bH_1)(u_2^2 + u_1^2) - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{33}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\frac{(1 + bH_1)(z_2^2 + z_1^2) - (b + H_1)z_2 \sin\alpha + \sin^2\alpha}{z_1 \sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{34}$$

Замечание 1. *Рассмотрим систему (24) с переменной диссипацией с нулевым средним [7], становящейся консервативной при $b = H_1$:*

$$\begin{aligned} \alpha' &= -(1 + b^2)z_2 + b\sin\alpha, \\ z_2' &= \sin\alpha\cos\alpha - (1 + b^2)z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - bz_2\cos\alpha, \\ z_1' &= (1 + b^2)z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - bz_1\cos\alpha. \end{aligned} \tag{35}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b^2)(z_2^2 + z_1^2) - 2bz_2\sin\alpha + \sin^2\alpha = C_1^* = const, \tag{36}$$

$$z_1 \sin\alpha = C_2^* = const. \tag{37}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (36), (37) также является первым интегралом системы (35). Но при $b \neq H_1$ каждая из функций

$$(1 + bH_1)(z_2^2 + z_1^2) - (b + H_1)z_2 \sin\alpha + \sin^2\alpha \tag{38}$$

и (37) по отдельности не является первым интегралом системы (24). Однако отношение функций (38), (37) является первым интегралом системы (24) при любых b, H_1.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (24). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (33) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 = \frac{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + bH_1)^2}. \tag{39}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{40}$$

и фазовое пространство системы (24) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (39).

Таким образом, в силу соотношения (33) первое уравнение системы (30) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 + bH_1)u_2^2 - 2(b + H_1)u_2 + 2 - C_1U_1(C_1, u_2)}{b - (1 + bH_1)u_2}, \tag{41}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2(1 + bH_1)}\{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}, \tag{42}$$

$$U_2(C_1, u_2) = \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1)(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2)},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (40).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (24) примет вид

$$\int\frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= \int\frac{(b - (1 + bH_1)u_2)du_2}{2(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2) - C_1\{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}/(2(1 + bH_1))}. \tag{43}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\alpha|. \tag{44}$$

Если

$$u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)} = w_1,\ \ b_1^2 = (b - H_1)^2 + C_1^2 - 4, \tag{45}$$

то правая часть равенства (43) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2-4(1+bH_1)w_1^2)}{(b_1^2-4(1+bH_1)w_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)w_1^2}}-$$

$$-(b-H_1)(1+bH_1)\int \frac{dw_1}{(b_1^2-4(1+bH_1)w_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)w_1^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)w_1^2}}{C_1}\pm 1\right|\pm\frac{b-H_1}{2}I_1, \tag{46}$$

где

$$I_1=\int\frac{dw_3}{\sqrt{b_1^2-w_3^2}(w_3\pm C_1)},\quad w_3=\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)w_1^2}. \tag{47}$$

При вычислении интеграла (47) возможны три случая.

I. $|b-H_1|>2$.

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4}+\sqrt{b_1^2-w_3^2}}{w_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4}-\sqrt{b_1^2-w_3^2}}{w_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right|+\mathrm{const}. \tag{48}$$

II. $|b-H_1|<2$.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4-(b-H_1)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1w_3+b_1^2}{b_1(w_3\pm C_1)}+\mathrm{const}. \tag{49}$$

III. $|b-H_1|=2$.

$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-w_3^2}}{C_1(w_3\pm C_1)}+\mathrm{const}. \tag{50}$$

Возвращаясь к переменной

$$w_1=\frac{z_2}{\sin\alpha}-\frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}, \tag{51}$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $|b-H_1|>2$.

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4}\pm 2(1+bH_1)w_1}{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2w_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4}\mp 2(1+bH_1)w_1}{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2w_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right|+\mathrm{const}. \tag{52}$$

II. $|b - H_1| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-(b-H_1)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)^2w_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)^2w_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{53}$$

III. $|b - H_1| = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2(1+bH_1)w_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)^2w_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{54}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (24) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 2. *В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (33).*

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{z_2}{\sin\alpha}, \frac{z_1}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{55}$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (24), (25) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, "привязывающий" уравнение (25).

Поскольку

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{u_1(2(1+bH_1)u_2 - (b+H_1))}{(b-(1+bH_1)u_2)\tau}, \quad \frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{(1+bH_1)u_1}{(b-(1+bH_1)u_2)\tau}, \tag{56}$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta_1} = 2u_2 - \frac{b+H_1}{1+bH_1}. \tag{57}$$

Очевидно, что при $u_1 \neq 0$ выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2(1+bH_1)}\left((b+H_1) \pm \sqrt{b_1^2 - (2(1+bH_1)u_1 - C_1)^2}\right), \tag{58}$$

$$b_1^2 = (b-H_1)^2 + C_1^2 - 4,$$

тогда интегрирование следующей квадратуры:

$$\beta_1 + \mathrm{const} = \pm(1+bH_1)\int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - (2(1+bH_1)u_1 - C_1)^2}} \tag{59}$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm\arcsin\frac{2(1+bH_1)u_1 - C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \mathrm{const}. \tag{60}$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm\frac{2(1 + bH_1)u_1 - C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}} \tag{61}$$

или, при переходе к старым переменным

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm\frac{2(1 + bH_1)z_1 - C_1 \sin\alpha}{\sqrt{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}\sin\alpha}. \tag{62}$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, "привязывающего" уравнение (25), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому то, что в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (33).

Но мы проведем некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (33)):

$$\operatorname{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] =$$

$$= \frac{((1 + bH_1)u_1^2 - (1 + bH_1)u_2^2 + (b + H_1)u_2 - 1)^2}{u_1^2(2(1 + bH_1)u_2 - (b + H_1))^2}. \tag{63}$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\operatorname{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] =$$

$$= \frac{((1 + bH_1)z_1^2 - (1 + bH_1)z_2^2 + (b + H_1)z_2\sin\alpha - \sin^2\alpha)^2}{z_1^2(2(1 + bH_1)z_2 - (b + H_1)\sin\alpha)^2}, \tag{64}$$

или окончательно

$$-\beta_1 \pm \frac{1}{2}\times$$

$$\times\operatorname{arctg}\frac{(1 + bH_1)z_1^2 - (1 + bH_1)z_2^2 + (b + H_1)z_2\sin\alpha - \sin^2\alpha}{z_1(2(1 + bH_1)z_2 - (b + H_1)\sin\alpha)} = C_3 = \mathrm{const}. \tag{65}$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1) при условии (21) имеет пять инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (5), циклический первый интеграл вида (3), (4), первый интеграл вида (34), также имеется первый интеграл, выражающийся соотношениями (48)–(55), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, наконец трансцендентный первый интеграл вида (65).

Теорема 1. *Система (1) при условиях (5), (3), (4), (21) обладает пятью инвариантными соотношениями (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

3. Заключение

В ряде работ автора введено понятие системы с переменной диссипацией с нулевым или ненулевым средним по периоду имеющейся фазовой координаты. При этом, рассматривая случай пространственного движения тела с передним круглым торцом и отключенной следящей силой, получаем систему с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. в среднем энергия в системе рассеивается). Тогда не удается проинтегрировать в явном виде приведенную систему динамических уравнений.

Если же следящая сила выбрана специальным образом (как в данной работе и ряде других работ автора), то система становится системой с переменной диссипацией с нулевым средним, а именно: в среднем по периоду угла α полная энергия сохраняется (хотя в разных частях многомерного фазового пространства энергия может как рассеиваться, так и подкачиваться). В этом случае возможен не только обстоятельный качественный анализ, но и получение случая интегрируемости динамических уравнений в элементарных функциях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-01-00020а).

Список литературы

1. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 3. С. 51-54.
2. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133-135.
3. Чаплыгин С.А. Избранные труды. М.: Наука, 1976. 495 с.
4. Шамолин М.В. Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 9. С. 52-56.
5. Шамолин М.В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1996. № 4. С. 57-69.
6. Шамолин М.В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН. 1999. Т. 364, № 5. С. 627-629.
7. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 256 с.
8. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 173-190.
9. Шамолин М.В. Об интегрируемости в задачах динамики твердого тела, взаимодействующего со средой // Прикладная механика. 2013. Т. 49, № 6. С. 44-54.