ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2014, том 456, № 2, с. 143–145

МАТЕМАТИКА

УДК 510.6+510.633

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЭРРОУ

© 2014 г. Н. Л. Поляков, М. В. Шамолин

Представлено академиком В.В. Козловым 02.10.2013 г.

Поступило 07.10.2013 г.

DOI: 10.7868/S0869565214140059

Получена полная классификация симметричных классов функций выбора на r-элементных подмножествах произвольного конечного множества, обладающих свойством Эрроу. Этот результат усиливает теорему Шелаха о свойстве Эрроу и является обобщением теоремы Эрроу о невозможности.

Теорема Эрроу о невозможности (см. [1]) есть строгий математический результат, или, точнее, совокупность близких результатов, относящихся к теории коллективного выбора (social choice theory, см. [2]). Известные версии теоремы Эрроу различаются несущественными деталями. В работе [3] дана следующая формулировка.

Теорема 1 (Теорема Эрроу о невозможности). *Пусть дано конечное множество A, $|A| \geq 3$. Тогда каждое правило обобщения для полных предпорядков на множестве A, которое удовлетворяет условиям независимости от посторонних альтернатив и единогласия, является диктаторским правилом.*

Здесь используется следующая система понятий. Любой полный предпорядок $\pi \subseteq A \times A$, т.е. любое транзитивное бинарное отношение π на множестве A, удовлетворяющее условию $\pi \cup \pi^{-1} = A \times A$, называется отношением предпочтения на множестве A. Пусть фиксировано множество $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $n \geq 1$, элементы которого называются участниками. Произвольная n-ка отношений предпочтения называется профилем (участников). Для данного профиля $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1})$ каждое входящее в него отношение π_i, $i < n$, называется индивидуальным отношением предпочтения (участника i), а отношение $\pi_i \backslash \pi_i^{-1}$ называется индивидуальным отношением строгого предпочтения (участника i). Правилом обобщения (для полных предпорядков на множестве A; другие правила обобщения в работе [3] не рассматриваются) называется функция из множества всех профилей в множество всех отношений предпочтения на множестве A. Значение π правила обобщения на профиле Π называется коллективным отношением предпочтения (для профиля Π), а отношение $\pi \backslash \pi^{-1}$ называется строгим коллективным отношением предпочтения (для профиля Π).

Правило обобщения f удовлетворяет условиям:

1) независимости от посторонних альтернатив, если принадлежность любой пары альтернатив коллективному отношению предпочтения зависит только от принадлежности этой же пары индивидуальным отношениям предпочтения, иными словами, если для любых профилей $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1})$ и $\Pi' = (\pi'_0, \pi'_1, \ldots, \pi'_{n-1})$ и пары $(a, b) \in A \times A$ выполнено

$$((\forall i < n)\ (a, b) \in \pi_i \leftrightarrow (a, b) \in \pi'_i) \rightarrow$$
$$\rightarrow ((a, b) \in f(\Pi) \leftrightarrow (a, b) \in f(\Pi'));$$

2) единогласия, если каждая пара альтернатив, принадлежащая каждому строгому индивидуальному отношению предпочтения, принадлежит и строгому коллективному отношению предпочтения, т.е. если для любого профиля $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1})$ и пары $(a, b) \in A \times A$ выполнено

$$((\forall i < n)(a, b) \in \pi_i \backslash \pi_i^{-1}) \rightarrow (a, b) \in f(\Pi) \backslash f(\Pi)^{-1}.$$

Правило обобщения f называется диктаторским, если каждая пара альтернатив принадлежит строгому коллективному отношению предпочтения как только принадлежит строгому индивидуальному отношению предпочтения некоторого фиксированного участника (диктатора), т.е. если существует такой номер $i < n$, что для любого профиля $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1})$ и пары $(a, b) \in A \times A$ выполнено

$$(a, b) \in \pi_i \backslash \pi_i^{-1} \rightarrow (a, b) \in f(\Pi) \backslash f(\Pi)^{-1}.$$

Часто вместо правил обобщения для полных предпорядков рассматривают правила обобщения для строгих линейных порядков, определяемых как функции f: $(\mathrm{Ord}(A))^n \rightarrow \mathrm{Ord}(A)$, где $\mathrm{Ord}(A)$ есть множество всех строгих линейных по-

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

рядков на множестве A (см. [1, 4]). Условия независимости от посторонних альтернатив и единогласия, а также диктаторское правило в этом случае определяются аналогично (с естественными упрощениями формулировок, использующими равенство $\pi \cap \pi^{-1} = \phi$ для любого строгого линейного порядка π).

Легко показать (см. лемму о строгой нейтральности из [3]), что каждое правило обобщения, удовлетворяющее условиям теоремы 1, сохраняет строгие линейные порядки в том смысле, что бинарное отношение $f(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1})$ есть строгий линейный порядок для любых строгих линейных порядков $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$. Поэтому теорему 1 легко вывести из следующего предложения, которое известно как одна из версий теоремы Эрроу, см. [4].

Предложение 1. *Пусть дано конечное множество A, $|A| \geq 3$. Тогда каждое правило обобщения для строгих линейных порядков на множестве A, которое удовлетворяет условиям независимости от посторонних альтернатив и единогласия, является диктаторским правилом.*

Последнее предложение можно эквивалентным образом переформулировать на языке функций выбора (см. [2]), что позволяет рассмотреть естественное обобщение используемых понятий и получить аналогичный предложению 1 результат в гораздо более общей ситуации (см. [5]).

Нам потребуется следующая система определений.

Пусть дано множество (альтернатив) A и натуральное число r. Множество всех r-элементных подмножеств множества A обозначается символом $[A]^r$, а множество всех функций выбора, определенных на множестве $[A]^r$, обозначается символом $\mathfrak{C}_r(A)$, т.е.

$$[A]^r = \{B \subseteq A: |B| = r\} \text{ и}$$

$$\mathfrak{C}_r(A) = \left\{\mathfrak{c} \in {}^{[A]^r}A: (\forall p \in [A]^r)\mathfrak{c}(p) \in p\right\}.$$

Функция $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(A)$ называется рациональной, если она ставит в соответствие каждому множеству $p \in [A]^r$ максимальный элемент множества p при некотором линейном упорядочении множества A. Множество всех рациональных функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(A)$ мы будем обозначать символом $\mathfrak{R}_r(A)$. Пусть дано натуральное число $n \geq 1$. Не опасаясь разночтений, назовем любую функцию f: $(\mathfrak{C}_r(A))^n \to \mathfrak{C}_r(A)$ (n-местным) правилом обобщения. Множество всех n-местных правил обобщения обозначим символом $\mathfrak{O}(A, r)_{[n]}$ и положим $\mathfrak{O}(A, r) = \bigcup_{1 \leq n < \omega} \mathfrak{O}(A, r)_{[n]}$. Будем говорить, что правило обобщения $f \in \mathfrak{O}(A, r)_{[n]}$ сохраняет множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$, если

$$f(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}) \in \mathfrak{D} \text{ для всех}$$
$$\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1} \in \mathfrak{D}.$$

Множество всех правил обобщения $f \in \mathfrak{O}(A, r)$, которые сохраняют множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$, обозначается символом $\mathrm{pol}\,\mathfrak{D}$.

Правило обобщения $f \in \mathfrak{O}(A, r)_{[n]}$ назовем нормальным, если для каждого множества $p \in [A]^r$ существует функция f_p: $p^n \to p$, для которой:

1) $f(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1})(p) = f_p(\mathfrak{c}_0(p), \mathfrak{c}_1(p), \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}(p))$ для всех $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1} \in \mathfrak{C}_r(A)$;

2) $\bigvee_{i<n} f_p(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_i$ для всех $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in p$.

Множество всех нормальных правил обобщения $f \in \mathfrak{O}(A, r)$ обозначим символом $\mathcal{N}(A, r)$.

Правило обобщения $f \in \mathfrak{O}(A, r)_{[n]}$ назовем диктаторским, если оно есть проекция, т.е. если выполнено

$$\bigvee_{i<n} (\forall \mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1} \in \mathfrak{C}_r(A)) f(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}) = \mathfrak{c}_i.$$

Множество всех диктаторских правил обобщения $f \in \mathfrak{O}(A, r)$ обозначим символом $\mathcal{M}(A, r)$.

Будем говорить, что множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ обладает свойством Эрроу, если

$$\mathrm{pol}\,\mathfrak{D} \cap \mathcal{N}(A, r) = \mathcal{M}(A, r).$$

Легко проверить, что предложение 1 эквивалентно следующему предложению.

Предложение 2. *Множество $\mathfrak{R}_2(A)$ обладает свойством Эрроу для любого конечного множества A, $|A| \geq 3$.*

В работе [5] это предложение распространено на любые симметричные множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ при некоторых дополнительных условиях.

Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ называется симметричным, если для любой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ и перестановки σ множества A функция $\mathfrak{c}_\sigma$, определенная равенством

$$\mathfrak{c}_\sigma(p) = \sigma^{-1}\mathfrak{c}(\sigma p) \text{ для всех } p \in [A]^r,$$

принадлежит множеству $\mathfrak{D}$.

В [5] доказана следующая

Теорема 2 (Теорема Шелаха о свойстве Эрроу). *Существуют такие числа r_1^*, r_2^* (можно положить $r_1^* = r_2^* = 7$), что для каждого конечного множества A и натурального числа r, удовлетворяющего неравенствам $r_1^* \leq r \leq |A| - r_2^*$, любое симметричное непустое собственное подмножество $\mathfrak{D}$ множества $\mathfrak{C}_r(A)$ обладает свойством Эрроу.*

Мы уточняем этот результат и даем полное описание симметричных множеств $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$, которые обладают свойством Эрроу. В частности, при $|A| \geq 5$ теорема 2 верна, если положить $r_1^* = 3$ и $r_2^* = 0$. Для описания случаев $r = 2$ и $r = 3 \wedge |A| = 4$ определим следующие множества: $\mathfrak{C}_3^K(A)$, $\mathfrak{C}_2^0(A)$ и $\mathfrak{C}_2^1(A)$.

Пусть $|A| = 4$. Обозначим символом K четверную группу Клейна перестановок множества A. Для каждого из множеств $p, q \in [A]^3$ существует единственная перестановка $\sigma_{p,q} \in K$, для которой

$$q = \sigma_{p,q}p.$$

Символом $\mathfrak{C}_3^K(A)$ обозначим множество всех функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_3(A)$, для которых

$$\mathfrak{c}(q) = \sigma_{p,q}\mathfrak{c}(p) \text{ для всех } p, q \in [A]^3.$$

Легко проверить, что множество $\mathfrak{C}_3^K(A)$ симметрично, непусто и не совпадает со всем множеством $\mathfrak{C}_3(A)$.

Пусть теперь A есть произвольное конечное множество. Для каждой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$, элемента $a \in A$ и номера $i \in \{0, 1\}$ положим

$$Z_a^{\mathfrak{c}} = \{b \in A \backslash \{a\} : \mathfrak{c}(\{a, b\}) = a\},$$

$$W_i^{\mathfrak{c}} = \{a \in A : |Z_a^{\mathfrak{c}}| = i \ (\mathrm{mod} 2)\},$$

$$\mathfrak{C}_2^i(A) = \{\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A) : W_{(1-i)}^{\mathfrak{c}} = \phi\}.$$

З а м е ч а н и е. Каждое из множеств $\mathfrak{C}_2^0(A)$, $\mathfrak{C}_2^1(A)$ можно определить еще следующим образом. Каждой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$ можно поставить во взаимно-однозначное соответствие полный ориентированный граф (турнир) $\Gamma_{\mathfrak{c}} = (A, E)$, где $E = \{(a, b) \in A \times A : a \neq b \wedge \mathfrak{c}(\{a, b\}) = b\}$. Функция $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$ принадлежит множеству $\mathfrak{C}_2^0(A)$ (множеству $\mathfrak{C}_2^1(A)$) тогда и только тогда, когда каждая вершина графа $\Gamma_{\mathfrak{c}}$ имеет четную (соответственно, нечетную) степень захода.

Легко доказать следующее

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть дано конечное множество A. Тогда*:

1) *множества* $\mathfrak{C}_2^0(A)$, $\mathfrak{C}_2^1(A)$ *и* $\mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$ *симметричны*;

2) $\mathfrak{C}_2^0(A) \neq \phi$ *тогда и только тогда*, *когда* $|A|$ *равно* 0 *или* 1 (mod 4);

3) $\mathfrak{C}_2^1(A) \neq \phi$ *тогда и только тогда*, *когда* $|A|$ *равно* 0 *или* 3 (mod 4);

4) $\mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A) \neq \mathfrak{C}_2(A)$.

Теперь можно сформулировать основной результат.

Т е о р е м а 3. *Для любого конечного множества A и натурального числа r любое непустое собственное симметричное подмножество* $\mathfrak{D}$ *множества* $\mathfrak{C}_r(A)$ *не обладает свойством Эрроу в этих и только этих случаях*:

1) $r = 2$, $|A|$ *равно* 0 *или* 1 (mod 4) *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A)$;

2) $r = 2$, $|A|$ *равно* 0 *или* 3 (mod 4) *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^1(A)$;

3) $r = 2$, $|A| = 0$ (mod 4) *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$;

4) $r = 3$, $|A| = 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_3^K(A)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12–01–00020-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arrow K.* // J. Political Econ. 1950. V. 58. P. 328–346.
2. *Fishburn P.* The Theory of Social Choice. Princeton: Princeton Univ. Press, 1973.
3. *Geanakoplos J.* // Econ. Theory. 2005. V. 26. № 1. P. 211–215.
4. *Arrow K.* Social Choice and Individual Values, Second. Edition. N.Y.; L.; Sydney: Wiley, 1963.
5. *Shelah S.* // Adv. Appl. Math. 2005. V. 34. P. 217–251.