

ГРНТИ 27.17.33  
РОССИЙСКАЯ  
АКАДЕМИЯ НАУК

ISSN 0233-6723  
МИНИСТЕРСТВО  
ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ  
ИНФОРМАЦИИ  
(ВИНИТИ)

## И Т О Г И   Н А У К И   И   Т Е Х Н И К И

### С Е Р И Я СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Т о м   125

Научный редактор серии  
академик РАН Р. В. Г а м к р е л и д з е

Серия издается с 1993 г.



МОСКВА 2013

УДК 517.9+531.01.+531.552+517.938

Главный редактор информационных изданий ВИНТИ  
*Ю. М. Арский*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
информационных изданий по математике

Главный редактор — *Р. В. Гамкрелидзе*  
Члены редколлегии: *А. А. Аграчев, С. А. Вахрамеев*  
*Е. С. Голод, А. Б. Жижченко, А. В. Миталев,*  
*И. Ю. Никольская, Н. Х. Розов, М. В. Шамолин*

Редакторы серии  
*Д. В. Аносов, А. В. Овчинников, В. Л. Попов, В. П. Сахарова*

Литературный редактор серии  
*Н. Ю. Селиванова*

# ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9+531.01+531.552

**МНОГООБРАЗИЕ СЛУЧАЕВ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ  
В ДИНАМИКЕ МАЛОМЕРНОГО  
И МНОГОМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА  
В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ СИЛ<sup>1</sup>**

*М. В. Шамолин*

**СОДЕРЖАНИЕ**

|                                                                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение . . . . .                                                                                               | 5  |
| Глава 1. Интегрируемость некоторых классов неконсервативных систем                                               |    |
| в элементарных функциях . . . . .                                                                                | 12 |
| § 1. Предварительные суждения и результаты . . . . .                                                             | 13 |
| § 2. Динамические системы с переменной диссипацией как класс систем, допускающих полное интегрирование . . . . . | 14 |
| § 3. Системы с симметриями и переменной диссипацией с нулевым средним . . . . .                                  | 18 |
| § 4. Системы на плоскости и двумерном цилиндре . . . . .                                                         | 23 |
| § 5. Системы на касательном расслоении к двумерной сфере                                                         | 25 |
| § 6. Некоторые обобщения . . . . .                                                                               | 28 |
| Глава 2. Случаи интегрируемости, соответствующие движению твердого тела на двумерной плоскости. I . . . . .      | 33 |
| § 1. Более общая задача о движении со следящей силой . . . . .                                                   | 34 |
| § 2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости . . . . .                    | 37 |

---

<sup>1</sup>РАБОТА ВЫПОЛНЕНА ПРИ ФИНАНСОВОЙ ПОДДЕРЖКЕ РФФИ (ГРАНТ 12-01-00020-А)

|                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от<br>угловой скорости . . . . .                                  | 40  |
| Глава 3. Случаи интегрируемости, соответствующие движению<br>твердого тела на двумерной плоскости. II . . . . .        | 44  |
| § 1. Более общая задача о движении со следящей силой . . . . .                                                         | 45  |
| § 2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных<br>сил от угловой скорости . . . . .                       | 48  |
| § 3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от<br>угловой скорости . . . . .                                  | 54  |
| Глава 4. Случаи интегрируемости, соответствующие движению<br>твердого тела в трехмерном пространстве. I . . . . .      | 61  |
| § 1. Более общая задача о движении со следящей силой . . . . .                                                         | 62  |
| § 2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных<br>сил от угловой скорости . . . . .                       | 67  |
| § 3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от<br>угловой скорости . . . . .                                  | 76  |
| Глава 5. Случаи интегрируемости, соответствующие движению<br>твердого тела в трехмерном пространстве. II . . . . .     | 86  |
| § 1. Более общая задача о движении со следящей силой . . . . .                                                         | 87  |
| § 2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных<br>сил от угловой скорости . . . . .                       | 92  |
| § 3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от<br>угловой скорости . . . . .                                  | 99  |
| Глава 6. Случаи интегрируемости, соответствующие движению<br>твердого тела в четырехмерном пространстве. I . . . . .   | 110 |
| § 1. Некоторые общие рассуждения . . . . .                                                                             | 111 |
| § 2. Более общая задача о движении со следящей силой . . . . .                                                         | 114 |
| § 3. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных<br>сил от угловой скорости . . . . .                       | 121 |
| § 4. Случай зависимости момента неконсервативных сил от<br>угловой скорости . . . . .                                  | 132 |
| Глава 7. Случаи интегрируемости, соответствующие движению<br>твердого тела в четырехмерном пространстве. II . . . . .  | 145 |
| § 1. Более общая задача о движении со следящей силой . . . . .                                                         | 146 |
| § 2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных<br>сил от угловой скорости . . . . .                       | 152 |
| § 3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от<br>угловой скорости . . . . .                                  | 162 |
| Глава 8. Случаи интегрируемости, соответствующие движению<br>твердого тела в четырехмерном пространстве. III . . . . . | 174 |
| § 1. Более общая задача о движении со следящей силой . . . . .                                                         | 175 |

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости . . . . . | 186 |
| § 3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости . . . . .            | 197 |
| Литература . . . . .                                                                          | 214 |

Светлой памяти профессора  
Владимира Александровича Кондратьева

«Единственное, чему научила меня моя долгая жизнь: что вся наша наука перед лицом реальности выглядит примитивно и по-детски наивно — и все же это самое ценное, что у нас есть.»

*Альберт Эйнштейн*

## Введение

Работа представляет собой обзор полученных ранее, а также новых случаев интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним.

При этом изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря, неприменима. Для таких систем необходимо в некотором смысле “напрямую” интегрировать основное уравнение динамики. При этом предлагается более универсальное изложение известных, а также полученных новых случаев полной интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике  $2D$ -,  $3D$ - и  $4D$ -твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил.

Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удастся найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций [72–74].

Получен целый спектр случаев полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область они имеют существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов).

Обнаружены новые интегрируемые случаи движения твердого тела, в том числе, в классической задаче о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды.

Первая глава посвящена общим вопросам интегрируемости так называемых динамических систем с переменной диссипацией. Для начала дается наглядная характеристика таких систем. При этом говорится о системах с переменной диссипацией, где термин «переменный» относится не столько к величине коэффициента диссипации, сколько к возможной смене его знака (поэтому разумнее было бы употреблять термин «знакопеременный»).

В дальнейшем дается одно из возможных определений системы с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним через такую характеристику векторного поля системы, как дивергенция, которая, как известно, характеризует изменение фазового объема в фазовом пространстве рассматриваемой системы (см. также [20, 21, 24, 25, 28, 93, 97, 106]).

Вводится класс автономных динамических систем, имеющих одну периодическую координату и при этом обладающих определенными симметриями, характерными для систем маятникового типа. Показывается, что данный класс систем погружается естественным образом в класс динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним, т.е. в среднем за период по имеющейся периодической координате подкачка и рассеяние энергии в системе в некотором смысле уравниваются друг друга. Приводятся примеры систем маятникового типа на маломерных многообразиях из динамики твердого тела в неконсервативном поле сил.

В дальнейшем изучаются некоторые общие условия интегри-

руемости в элементарных функциях для систем на двумерной плоскости и касательных расслоениях одномерной сферы (двумерный цилиндр) и двумерной сферы (четырёхмерное многообразие). При этом приводится интересный пример трехмерного фазового портрета системы маятникового типа, которая описывает движение сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды (см. также [365–367]).

Приводятся достаточные условия существования первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, для многопараметрических систем третьего порядка.

Поскольку приводятся случаи полной интегрируемости в динамике пространственного движения тела в неконсервативном поле, мы имеем дело с тремя, на первый взгляд, независимыми свойствами:

- (i) выделенный класс систем с симметриями;
- (ii) обладание этим классом систем переменной диссипацией с нулевым средним (по имеющейся периодической переменной), что позволяет их рассматривать как «почти» консервативные системы;
- (iii) в некоторых (пусть и достаточно маломерных) случаях обладание ими полным набором, вообще говоря, трансцендентных (с точки зрения комплексного анализа) первых интегралов.

Во второй и третьей главах систематизируются полученные результаты по исследованию динамических уравнений движения симметричного двумерного ( $2D$ -) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твердых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая в течение всего времени движения или величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи (глава вторая), или центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил (глава третья) (см. также [1, 49, 51, 88, 111–113, 139, 146–149, 184–186, 188, 195, 198, 202, 216, 235, 241, 246, 262, 295, 350, 373–376, 396, 412, 436]).

Более того, во второй главе к имеющейся аналитической не-



интегрируемой связи найден дополнительный трансцендентный первый интеграл, выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, а в третьей главе сделано то же самое, только к имеющемуся аналитическому первому интегралу (квадрату скорости центра масс).

Полученные результаты подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

В четвертой и пятой главах систематизируются полученные результаты по исследованию динамических уравнений движения осесимметричного трехмерного ( $3D$ -)твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид также заимствован из динамики реальных твердых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая в течение всего времени движения или величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи (глава четвертая), или центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил (глава пятая) (см. также [1, 27, 49, 51, 69–71, 88, 111–114, 130, 131, 139–141, 146–149, 152, 162–164, 181, 184–186, 188, 195, 198, 202, 216, 235, 241, 246, 256, 262, 263, 281, 347, 350, 353, 373–376, 396, 412, 416, 420–423, 431–433, 436–438, 440–442]).

Более того, в четвертой главе к имеющимся аналитическим инвариантным соотношениям (неинтегрируемой связи и интегралу о равенстве нулю одной из компонент угловой скорости) найдены три дополнительных трансцендентных первых интеграла, выражающиеся через конечную комбинацию элементарных функций, а в пятой главе сделано то же самое, только к имеющимся аналитическим первым интегралам (квадрату скорости центра масс и интегралу о равенстве нулю одной из компонент угловой скорости).

Полученные результаты также подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от компонент угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем также может быть распространена

и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

Шестая глава начинается изложением общих аспектов динамики свободного многомерного твердого тела: понятие тензора угловой скорости тела, совместные динамические уравнения движения на прямом произведении  $\mathbf{R}^n \times \mathfrak{so}(n)$ , формулы Эйлера и Ривальса в многомерном случае.

Рассмотрен вопрос о тензоре инерции четырехмерного ( $4D$ -) твердого тела. В данной работе предлагается изучать два логически возможных случая о главных моментах инерции (когда имеются *два* соотношения на главные моменты инерции):

- (i) когда имеется *тройка* равных главных моментов инерции ( $I_2 = I_3 = I_4$ );
- (ii) когда имеются *две пары* равных моментов инерции ( $I_1 = I_2, I_3 = I_4$ ).

Далее, в шестой и седьмой главах систематизируются полученные результаты по исследованию уравнений движения четырехмерного ( $4D$ -) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил для случая (i). Его вид также заимствован из динамики реальных твердых тел меньшей размерности, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая в течение всего времени движения или величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи (глава шестая), или центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил (глава седьмая) (см. также [1, 27, 33–36, 40, 44, 49, 51, 88, 111–113, 139, 146–149, 184–188, 195, 198, 202, 216, 225–227, 233, 235, 237, 241, 246, 251, 252, 255, 261, 262, 282, 284, 295, 350, 373–376, 396, 412, 424, 425, 436]).

Более того, в шестой главе к четырем имеющимся аналитическим инвариантным соотношениям (неинтегрируемой связи и трем интегралам о равенстве нулю компонент тензора угловой скорости) найдены четыре дополнительных трансцендентных первых интеграла, выражающиеся через конечную комбинацию элементарных функций, а в седьмой главе сделано то же самое, только к четырем имеющимся аналитическим первым интегралам (квадрату скорости центра масс и трем интегралам о равенстве нулю компонент тензора угловой скорости).

Результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

В восьмой главе систематизируются полученные результаты по исследованию уравнений движения четырехмерного ( $4D$ -) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил для случая (ii). Его вид также заимствован из динамики реальных твердых тел меньшей размерности, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая в течение всего времени движения оставаться постоянными во времени как величину скорости некоторой характерной точки твердого тела, так и некоторую другую фазовую переменную. Последний факт означает наличие в системе неинтегрируемых сервосвязей (см. также [1, 49, 51, 88, 111–113, 128, 139, 146–149, 186, 188, 195, 202, 241, 246, 298, 314, 322, 325, 330, 332, 333, 339, 345, 350, 373–374, 412]).

Более того, в восьмой главе к четырем имеющимся аналитическим инвариантным соотношениям (двум неинтегрируемым связям и двум интегралам о равенстве нулю компонент тензора угловой скорости) найдены два аналитических и три дополнительных трансцендентных первых интеграла, выражающиеся через конечную комбинацию элементарных функций.

Результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости, которая перпендикулярна данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

Табл. 1. Классификация случаев интегрируемости от динамики симметричного двумерного твердого тела в  $\mathbf{E}^2$  до динамики динамически симметричного четырехмерного твердого тела в  $\mathbf{E}^4$

| Размерность<br>твердого тела                 | Условия связей                                            |                                       |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------|
|                                              | $v \equiv \text{const}$ ( $\beta_2 \equiv \text{const}$ ) | $\mathbf{V}_C \equiv \text{const}$    |
| $\mathbf{E}^2$                               | $h = 0 \oplus$<br>$h \neq 0 \oplus$                       | $h = 0 \oplus$<br>$h \neq 0 \oplus$   |
| $\mathbf{E}^3$<br>( $I_2 = I_3$ )            | $h = 0 \oplus$<br>$h \neq 0 \oplus$                       | $h = 0 \oplus$<br>$h \neq 0 \oplus$   |
| $\mathbf{E}^4$<br>( $I_2 = I_3 = I_4$ )      | $h = 0 \oplus$<br>$h \neq 0 \oplus$                       | $h = 0 \oplus$<br>$h \neq 0 \oplus$   |
| $\mathbf{E}^4$<br>( $I_1 = I_2, I_3 = I_4$ ) | $h = 0 \oplus$<br>$h \neq 0 \oplus$                       | $h = 0 \ominus$<br>$h \neq 0 \ominus$ |

Таким образом, в главах 2–8 описаны случаи интегрируемости в маломерной и многомерной динамике твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Чтобы их систематизировать, внесем их все в следующую таблицу.

Обозначения  $h = 0$  или  $h \neq 0$  означают тот факт, что в системе присутствует или отсутствует зависимость силового поля от компонент тензора угловой скорости тела.

Знак  $\oplus$  означает, что случай помещен в данный обзор.

Два знака  $\ominus$  в правом нижнем углу таблицы означают, что эти два случая не помещены в данный обзор (действительно, случаю  $I_1 = I_2, I_3 = I_4$  посвящена лишь восьмая глава).

Тем не менее для случая  $I_2 = \dots = I_n$  симметричного  $n$ -мерного твердого тела уже получены соответствующие результаты, которые также не включены в данный обзор.

Многие результаты данной работы регулярно докладывались на различных семинарах, в том числе и на семинаре «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени профессора В. В. Трофимова [57] под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина (см. также [1, 2, 49–52, 54, 58–63, 65, 178, 179, 234, 235, 265–268, 270, 273, 274, 276, 278, 279, 299, 300, 307, 308, 310, 315, 344, 348, 356, 357]).

## ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ

Изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря, неприменима. Таким образом, для таких систем необходимо в некотором смысле «напрямую» интегрировать основное уравнение динамики. При этом предлагается более универсальное изложение известных случаев, а также получены новые случаи полной интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике  $2D$ -,  $3D$ - и  $4D$ -твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил.

Результаты предлагаемой работы являются развитием предыдущих исследований, в том числе и некоторой прикладной задачи из динамики твердого тела [1, 49, 51, 88, 111–113, 139, 146–149, 186, 188, 195, 202, 241, 246, 350, 373–374, 412], где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Позднее данное обстоятельство позволило провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, которые обладали грубостью и сохранялись для систем более общего вида. Полная интегрируемость таких систем была связана с симметриями скрытого типа.

Как известно, понятие интегрируемости, вообще говоря, достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать, в каком смысле оно понимается (имеется в виду некий критерий, по которому делается вывод о том, что траектории рассматриваемой динамической системы устроены особенно «привлекательно и просто»), в классе каких функций ищутся первые интегралы и т.д. (см. также [22, 23, 32, 67, 96, 98, 102, 103, 115, 121]).

В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Здесь трансцендентность понимается не в смысле теории элементарных функций (например, тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция име-

ет существенно особые точки). При этом их необходимо формально продолжить в комплексную область (см. также [122, 132, 136, 269]).

## § 1. Предварительные суждения и результаты

Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удастся найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций [269, 275, 280, 283, 285, 291–294, 301–306, 318, 336, 338, 340–343].

Предлагаемая работа возникла из плоской задачи движения в сопротивляющейся среде твердого тела, поверхностью контакта со средой которого является плоский участок его внешней поверхности. Силовое поле в этом случае строится из соображений воздействия среды на тело при струйном (или отрывном) обтекании в условиях квазистационарности. Оказывается, что изучение движения такого класса тел сводится к системам либо с рассеянием энергии ((чисто) диссипативные системы или системы в диссипативном силовом поле), либо с ее подкачкой (так называемые системы с антидиссипацией или системы с разгоняющими силами). Отметим, что подобные задачи уже появлялись в прикладной аэродинамике (см. также [12, 13, 37, 45, 46, 78–92, 99–101, 107–113, 124–126, 144–151, 169, 170, 182, 183, 309, 351, 354, 355, 358–364, 368, 444]).

Рассматриваемые ранее задачи простимулировали и стимулируют развитие качественного аппарата исследования, который существенным образом дополняет качественную теорию неконсервативных систем с диссипацией обоих знаков (см. также [269]).

Были также качественно исследованы нелинейные эффекты от движения в плоской и пространственной динамике твердого тела. Проведено обоснование на качественном уровне необходимости введения определений относительной грубости и относительной негрубости различных степеней (см. также [188, 192, 194, 195, 201, 212, 231, 269, 286]).

Следующий спектр результатов позволил во вполне определенном стиле подготовить данную работу.

(i) Были разработаны методы качественного исследования

диссипативных систем и систем с антидиссипацией, позволившие получить условия бифуркации рождения устойчивых и неустойчивых автоколебаний, а также условия отсутствия любых особых траекторий. Метод исследования плоских топографических систем Пуанкаре и систем сравнения удалось распространить на высшие размерности. Получены достаточные условия устойчивости по Пуассону (всюду плотности возле себя) некоторых классов незамкнутых траекторий динамических систем [185, 198, 202, 203, 210, 232, 331, 373, 383, 384, 392, 393, 397, 411, 419].

(ii) В  $2D$ - и  $3D$ -динамике твердого тела были найдены полные списки первых интегралов диссипативных систем и систем с антидиссипацией, являющихся трансцендентными (в смысле классификации их особенностей) функциями, выражающимися в ряде случаев через элементарные функции. Введены новые определения свойств относительной грубости и относительной негрубости различных степеней, которыми обладают проинтегрированные системы [188, 192, 194, 195, 201, 212, 231, 269, 286].

(iii) Получены многопараметрические семейства топологически неэквивалентных фазовых портретов, возникающие в чисто диссипативных системах (т.е. системах с переменной диссипацией с ненулевым (положительным) средним). Почти каждый портрет таких семейств (абсолютно) груб [269].

(iv) Обнаружены новые качественные аналогии между свойствами движения свободных тел в сопротивляющейся среде, покоящейся на бесконечности, и тел закрепленных, находящихся в потоке набегающей среды [269].

Многие результаты данной работы регулярно докладывались на множестве семинаров, в том числе и на семинаре «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. профессора В. В. Трофимова [57] под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина.

## § 2. Динамические системы с переменной диссипацией как класс систем, допускающих полное интегрирование

**2.1. Наглядная характеристика динамических систем с переменной диссипацией.** Поскольку при первоначальном моделировании воздействия среды на твердое тело использовалась экспериментальная информация о свойствах

струйного обтекания, естественным образом возникла необходимость исследования класса динамических систем, которые обладают свойством (относительной) структурной устойчивости (относительной грубости). Поэтому вполне естественно ввести данные определения для таких систем. При этом многие из рассматриваемых систем получаются (абсолютно) грубыми по Андронову—Понтрягину [14–18].

После некоторых упрощений (например в  $2D$ -динамике) динамическая часть общей системы уравнений плоскопараллельного движения может быть сведена к маятниковой системе второго порядка, в которой присутствует линейная неконсервативная (знакопеременная диссипативная) сила с коэффициентом, который при разных значениях имеющейся в системе периодической фазовой координаты имеет разный знак.

Таким образом, в данном случае будем говорить о системах с так называемой переменной диссипацией, где термин «переменный» относится не столько к величине коэффициента диссипации, сколько к возможной смене его знака (поэтому разумнее было бы употреблять термин «знакопеременный»).

В среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация может быть как положительной («чисто» диссипативные системы), так и отрицательной (системы с разгоняющими силами), а также равной нулю (при этом не равной нулю тождественно). В последнем случае будем говорить о системах с переменной диссипацией с нулевым средним (такие системы можно ассоциировать с «почти» консервативными системами).

Как уже отмечалось ранее, были отмечены важные механические аналогии, возникающие при сравнении качественных свойств стационарного движения свободного тела и равновесия маятника в потоке среды. Такие аналогии носят глубокий опорный смысл, поскольку позволяют перенести свойства нелинейных динамических систем для маятника на динамические системы для свободного тела. И те, и другие системы принадлежат к классу так называемых маятниковых динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним.

При дополнительных условиях вышеописанная эквивалентность распространяется и на случай пространственного движения, что позволяет говорить об общем характере симметрий, имеющих в системе с переменной диссипацией с нулевым средним как при плоскопараллельном, так и при пространственном



движении (о плоском и пространственном вариантах маятника в потоке среды см. также [269]).

Ниже будут отмечены классы нелинейных систем второго, третьего и высших порядков, интегрируемых в трансцендентных (в смысле теории функций комплексного переменного) элементарных функциях. Для примера, такими являются пятипараметрические динамические системы, включающие в себя большинство систем, исследуемых ранее в динамике маломерного (2D- и 3D- случаи) твердого тела, взаимодействующего со средой:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= a \sin \alpha + b\omega + \gamma_1 \sin^5 \alpha + \gamma_2 \omega \sin^4 \alpha + \gamma_3 \omega^2 \sin^3 \alpha + \\ &\quad + \gamma_4 \omega^3 \sin^2 \alpha + \gamma_5 \omega^4 \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= c \sin \alpha \cos \alpha + d\omega \cos \alpha + \gamma_1 \omega \sin^4 \alpha \cos \alpha + \gamma_2 \omega^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha + \\ &\quad + \gamma_3 \omega^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \gamma_4 \omega^4 \sin \alpha \cos \alpha + \gamma_5 \omega^5 \cos \alpha.\end{aligned}$$

В этой связи ранее были введены определения относительной структурной устойчивости (относительной грубости) и относительной структурной неустойчивости (относительной негрубости) различных степеней. Последние свойства были доказаны для систем, появляющихся, например, в [269].

Чисто диссипативные динамические системы (впрочем, как и (чисто) антидиссипативные), которые в нашем случае могут принадлежать к системам с переменной диссипацией с ненулевым средним, являются, как правило, структурно устойчивыми ((абсолютно) грубыми), а системы с переменной диссипацией с нулевым средним (которые, как правило, обладают дополнительными симметриями) являются либо структурно неустойчивыми (негрубыми), либо только относительно структурно устойчивыми (относительно грубыми), хотя последнее утверждение доказать в общем случае затруднительно.

Например, динамическая система вида

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \Omega + \beta \sin \alpha, \\ \dot{\Omega} &= -\beta \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}\tag{1.1}$$

является относительно структурно устойчивой (относительно грубой) и топологически эквивалентной системе, описывающей закрепленный маятник, помещенный в поток набегающей среды [269].

Ниже будет указан ее первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки после ее продолжения в комплексную область) функцией фазовых переменных и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций. Фазовый цилиндр  $\mathbf{R}^2\{\alpha, \Omega\}$  квазискоростей рассматриваемой системы имеет интересную топологическую структуру разбиения на траектории (подробнее см. в [269]).

Хотя рассматриваемая динамическая система и неконсервативна, во вращательной области (и только в ней) ее фазовой плоскости  $\mathbf{R}^2\{\alpha, \Omega\}$  она допускает сохранение инвариантной меры с переменной плотностью. Данное свойство характеризует рассматриваемую систему как систему с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [175, 176, 178, 179, 247, 264, 266, 269, 286–290, 295, 299, 313, 328, 337, 344, 406, 413, 426–430, 434, 435, 443]).

**2.2. Одно из определений системы с переменной диссипацией с нулевым средним.** Будем изучать системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих периодическую фазовую координату. Исследуемые системы обладают такими симметриями, при которых в среднем за период по периодической координате сохраняется их фазовый объем. Так, например, следующая маятниковая система с гладкой и периодической по  $\alpha$  периода  $T$  правой частью  $\mathbf{V}(\alpha, \omega)$  вида

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\omega + f(\alpha), \\ \dot{\omega} &= g(\alpha), \\ f(\alpha + T) &= f(\alpha), \quad g(\alpha + T) = g(\alpha),\end{aligned}\tag{1.2}$$

сохраняет свою фазовую площадь на фазовом цилиндре за период  $T$ :

$$\begin{aligned}& \int_0^T \operatorname{div} \mathbf{V}(\alpha, \omega) d\alpha = \\ &= \int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} (-\omega + f(\alpha)) + \frac{\partial}{\partial \omega} g(\alpha) \right) d\alpha = \int_0^T f'(\alpha) d\alpha = 0.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Рассматриваемая система эквивалентна уравнению маятника

$$\ddot{\alpha} - f'(\alpha)\dot{\alpha} + g(\alpha) = 0,\tag{1.4}$$

в котором интеграл от коэффициента  $f'(\alpha)$  при диссипативном члене  $\dot{\alpha}$  в среднем за период равен нулю.

Видно, что рассматриваемая система имеет такие симметрии, при которых она становится так называемой системой с *переменной диссипацией с нулевым средним* в смысле следующего определения (см. также [269]).

**Определение 1.1.** Рассмотрим гладкую автономную систему  $(n+1)$ -го порядка нормального вида, заданную на цилиндре  $\mathbf{R}^n\{x\} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$ , где  $\alpha$  — периодическая координата периода  $T > 0$ . Дивергенцию правой части  $\mathbf{V}(x, \alpha)$  (которая, вообще говоря, является функцией всех фазовых переменных и не равна тождественно нулю) данной системы обозначим через  $\operatorname{div} \mathbf{V}(x, \alpha)$ . Назовем такую систему системой с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним, если функция

$$\int_0^T \operatorname{div} \mathbf{V}(x, \alpha) d\alpha \quad (1.5)$$

равна (не равна) тождественно нулю. При этом в некоторых случаях (например, когда в отдельных точках окружности  $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$  возникают особенности) данный интеграл понимается в смысле главного значения.

Необходимо заметить, что дать общее определение системы с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним достаточно непросто. Приведенное только что определение использует понятие дивергенции (как известно, дивергенция правой части системы нормального вида характеризует изменение фазового объема в фазовом пространстве данной системы).

### § 3. Системы с симметриями и переменной диссипацией с нулевым средним

Рассмотрим системы следующего вида (точкой обозначена производная по времени):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= f_\alpha(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha), \\ \dot{\omega}_k &= f_k(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha), \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.6)$$

заданные на множестве

$$\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus K \times \mathbf{R}^n\{\omega\}, \quad (1.7)$$

где  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , достаточно гладкие функции  $f_\lambda(u_1, u_2, u_3)$ ,  $\lambda = \alpha, 1, \dots, n$ , трех переменных  $u_1, u_2, u_3$  таковы:

$$\begin{aligned} f_\lambda(-u_1, -u_2, u_3) &= -f_\lambda(u_1, u_2, u_3), \\ f_\alpha(u_1, u_2, -u_3) &= f_\alpha(u_1, u_2, u_3), \\ f_k(u_1, u_2, -u_3) &= -f_k(u_1, u_2, u_3), \end{aligned} \quad (1.8)$$

при этом функции  $f_k(u_1, u_2, u_3)$  определены при  $u_3 = 0$  для любого  $k = 1, \dots, n$ .

Множество  $K$  или пусто, или состоит из конечного числа точек окружности  $\mathbf{S}^1 \{\alpha \bmod 2\pi\}$ .

Последние две переменные  $u_2, u_3$  в функциях  $f_\lambda(u_1, u_2, u_3)$  зависят от одного параметра  $\alpha$ , но они выделены в разные группы по следующим причинам. Во-первых, не во всей области определения они однозначно выражаются друг относительно друга, а, во-вторых, первая из них нечетная, а вторая — четная функции  $\alpha$ , что по-разному влияет на симметрии системы (1.6).

Поставим в соответствие системе (1.6) следующую уже неавтономную систему

$$\frac{d\omega_k}{d\alpha} = \frac{f_k(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}{f_\alpha(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.9)$$

подстановкой  $\tau = \sin \alpha$  приводимую к виду

$$\frac{d\omega_k}{d\tau} = \frac{f_k(\omega, \tau, \varphi_k(\tau))}{f_\alpha(\omega, \tau, \varphi_\alpha(\tau))}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.10)$$

$$\varphi_\lambda(-\tau) = \varphi_\lambda(\tau), \quad \lambda = \alpha, 1, \dots, n.$$

Последняя система может иметь, в частности, алгебраическую правую часть (т.е. быть отношением двух полиномов), что иногда помогает искать ее первые интегралы в явном виде.

Следующее утверждение погружает рассматриваемый класс систем (1.6) в класс динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним. Обратное вложение, вообще говоря, не выполняется.

**Теорема 1.1.** *Системы вида (1.6) являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним.*

Данная теорема доказывается с использованием лишь некоторых из вышеперечисленных симметрий (1.8) системы (1.6), а также использует периодичность правой части системы по  $\alpha$ .

Действительно, вычислим указанную дивергенцию векторного поля системы (1.6). Она равна

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_\alpha(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}{\partial u_2} \cos \alpha - \\ & - \frac{\partial f_\alpha(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}{\partial u_3} \sin \alpha + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}{\partial u_1}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Следующий интеграл от первых двух слагаемых (1.11) равен нулю:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial f_\alpha(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}{\partial u_2} d \sin \alpha + \frac{\partial f_\alpha(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}{\partial u_3} d \cos \alpha \right\} = \\ & = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f_\alpha(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}{\partial \alpha} d \alpha = h_\alpha(\omega) \equiv 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

поскольку функция  $f_\alpha(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)$  — периодическая по  $\alpha$ .

Далее, в силу третьего уравнения (1.8), для любого  $k = 1, \dots, n$  выполнено свойство

$$\frac{\partial f_k(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}{\partial u_1} = \cos \alpha \cdot \frac{\partial g_k(\omega, \sin \alpha)}{\partial u_1}, \quad (1.13)$$

при этом функция  $g_k(u_1, u_2)$  — достаточно гладкая для любого номера  $k = 1, \dots, n$ .

Тогда интеграл по периоду  $2\pi$  от правой части равенства (1.13) дает

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial g_k(\omega, \sin \alpha)}{\partial u_1} d \sin \alpha = h_k(\omega) \equiv 0 \quad (1.14)$$

для любого  $k = 1, \dots, n$ . Из равенств (1.12), (1.14) следует утверждение теоремы 1.1.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, поскольку можно предъявить множество динамических систем на двумерном цилиндре, являющихся системами с переменной диссипацией с нулевым средним, но они не будут обладать вышеперечисленными симметриями.

В данной работе в основном будет затронут случай, когда функции  $f_\lambda(\omega, \tau, \varphi_k(\tau))$  ( $\lambda = \alpha, 1, \dots, n$ ) — полиномы по  $\omega, \tau$ .

**Пример 1.1.** В следующих главах будут рассмотрены, в частности, маятниковые системы на двумерном цилиндре  $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}$  с параметром  $b > 0$  из динамики твердого тела [269]:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\omega + b \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}\tag{1.15}$$

и

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b\omega^2 \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{1.16}$$

которым в переменных  $(\omega, \tau)$  можно сопоставлять уравнения с алгебраическими правыми частями

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau}{-\omega + b\tau}\tag{1.17}$$

и

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau + b\omega[\omega^2 - \tau^2]}{-\omega + b\tau + b\tau[\omega^2 - \tau^2]}\tag{1.18}$$

вида (1.10) соответственно. При этом данные системы являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним, что нетрудно проверить напрямую.

Действительно, дивергенции их правых частей равны соответственно

$$b \cos \alpha$$

и

$$b \cos \alpha [4\omega^2 + \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha],$$

при этом они попадают в класс систем (1.6).

Более того, каждая из них обладает первым интегралом, являющимся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного) функцией и выраженным через конечную комбинацию элементарных функций (см. далее главы 2, 3).

Приведем еще один важный пример системы более высокого порядка, обладающей только что перечисленными свойствами.

**Пример 1.2.** Следующей системе

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -z_2 + b \sin \alpha, \\ \dot{z}_2 &= \sin \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \dot{z}_1 &= z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\end{aligned}\tag{1.19}$$

с параметром  $b$ , рассматриваемой уже в трехмерной области

$$\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus \{\alpha = 0, \alpha = \pi\} \times \mathbf{R}^2\{z_1, z_2\}\tag{1.20}$$

(такая система также приводится к эквивалентной системе на касательном расслоении  $T_*\mathbf{S}^2$  двумерной сферы  $\mathbf{S}^2$ ) и описывающей пространственное движение твердого тела в сопротивляющейся среде (см. далее главы 4, 5), поставим в соответствие неавтономную систему с алгебраической правой частью ( $\tau = \sin \alpha$ ):

$$\begin{aligned}\frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{\tau - z_1^2/\tau}{-z_2 + b\tau}, \\ \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{z_1 z_2/\tau}{-z_2 + b\tau}.\end{aligned}\tag{1.21}$$

И в данном случае видно, что система (1.19) является системой с переменной диссипацией с нулевым средним; чтобы было полное соответствие с определением, достаточно ввести новую фазовую переменную

$$z_1^* = \ln |z_1|.\tag{1.22}$$

Если подсчитать дивергенцию правой части системы (1.19) в декартовых координатах  $\alpha, z_1^*, z_2$ , то получим, что она равна  $b \cos \alpha$ . При этом, учитывая (1.20), в смысле главного значения имеем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} b \cos \alpha + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} b \cos \alpha = 0.\tag{1.23}$$

Более того, она обладает двумя первыми интегралами (т.е. полным списком), являющимися трансцендентными функциями и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций (см. далее главы 4, 5), что стало возможным после сопоставления ей (вообще говоря, неавтономной) системы уравнений с алгебраической (полиномиальной) правой частью (1.21).

Приведенные выше системы (1.15), (1.16), (1.19) кроме того, что попадают в класс систем (1.6) и обладают переменной диссипацией с нулевым средним, еще имеют полный список трансцендентных первых интегралов, выраженных через конечную комбинацию элементарных функций.

Следовательно, для поиска первых интегралов рассматриваемых систем лучше привести системы вида 1.6 к системам с полиномиальными правыми частями (1.10), от вида которых зависит возможность интегрирования в элементарных функциях исходной системы. Поэтому пойдем следующим путем: будем искать достаточные условия интегрируемости в элементарных функциях систем уравнений с полиномиальными правыми частями, исследуя при этом системы наиболее общего вида.

#### § 4. Системы на плоскости и двумерном цилиндре

В ряде предыдущих работ автора были доказаны утверждения, касающиеся многопараметрических систем обыкновенных дифференциальных уравнений с алгебраической правой частью (см. также [269]). Приведем некоторые из них.

**Предложение 1.1.** *Семипараметрическое семейство систем уравнений на плоскости  $\mathbf{R}^2\{x, y\}$*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x + b_1y + \beta_1x^3 + \beta_2x^2y + \beta_3xy^2, \\ \dot{y} &= c_1x + d_1y + \beta_1x^2y + \beta_2xy^2 + \beta_3y^3\end{aligned}\tag{1.24}$$

*обладает (вообще говоря, трансцендентным) первым интегралом, выраженным через элементарные функции.*

**Следствие.** *Системы вида*

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= a_1 \sin \alpha + b_1 \omega + \beta_1 \sin^3 \alpha + \beta_2 \omega \sin^2 \alpha + \beta_3 \omega^2 \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= c_1 \sin \alpha \cos \alpha + d_1 \omega \cos \alpha + \\ &+ \beta_1 \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \beta_2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_3 \omega^3 \cos \alpha\end{aligned}\tag{1.25}$$

*на двумерном цилиндре*

$$\{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2 : \alpha \mod 2\pi\}$$

*при любых параметрах  $a_1, b_1, c_1, d_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  имеют, вообще говоря, трансцендентный первый интеграл, выраженный через элементарные функции.*



В частности, системы (1.15) и (1.16) получаются из последней системы при  $a_1 = b$ ,  $b_1 = -1$ ,  $c_1 = 1$ ,  $d_1 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$  и при  $a_1 = b$ ,  $b_1 = -1$ ,  $c_1 = 1$ ,  $d_1 = -b$ ,  $\beta_1 = -b$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = b$  соответственно.

Предыдущие рассуждения несложно обобщаются. Рассмотрим возможности полного интегрирования (в элементарных функциях) систем более общего вида: нелинейность характеризуется произвольной однородной формой нечетной степени  $2n - 1$ .

Тогда справедливо более общее утверждение, чем предложение 1.1.

**Предложение 1.2.**  $(2n + 3)$ -параметрическое семейство систем уравнений на плоскости  $\mathbf{R}^2\{x, y\}$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x + b_1y + \delta_1x^{2n-1} + \delta_2x^{2n-2}y + \dots + \\ &\quad + \delta_{2n-2}x^2y^{2n-3} + \delta_{2n-1}xy^{2n-2}, \\ \dot{y} &= c_1x + d_1y + \delta_1x^{2n-2}y + \delta_2x^{2n-3}y^2 + \dots + \\ &\quad + \delta_{2n-2}xy^{2n-2} + \delta_{2n-1}y^{2n-1},\end{aligned}\tag{1.26}$$

обладает (вообще говоря, трансцендентным) первым интегралом, выраженным через элементарные функции.

Семейство уравнений (1.26) действительно зависит от  $2n - 1 + 4$  независимых параметров, поскольку общая нелинейность нечетной степени в данном случае характеризуется  $4n$  параметрами, на которые накладываются  $2n + 1$  условий (еще 4 параметра присутствуют в линейной части).

**Следствие.** Системы вида

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= a \sin \alpha + b\omega + \delta_1 \sin^{2n-1} \alpha + \delta_2 \omega \sin^{2n-2} \alpha + \dots + \\ &\quad + \delta_{2n-1} \omega^{2n-2} \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= c \sin \alpha \cos \alpha + d\omega \cos \alpha + \delta_1 \omega \sin^{2n-2} \alpha \cos \alpha + \\ &\quad + \delta_2 \omega^2 \sin^{2n-3} \alpha \cos \alpha + \dots + \delta_{2n-1} \omega^{2n-1} \cos \alpha\end{aligned}\tag{1.27}$$

на двумерном цилиндре

$$\{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2 : \alpha \mod 2\pi\}$$

при любых параметрах  $a_1, b_1, c_1, d_1, \delta_1, \dots, \delta_{2n-1}$  имеют, вообще говоря, трансцендентный первый интеграл, выраженный через элементарные функции.

Вышеприведенные системы (1.15), (1.16), (1.19) являются относительно грубыми [269], но если мы нарушим в данных системах симметрии (1.8) (например, добавим в их правые части дополнительные члены), введенные для систем более общего вида (1.6), то количество получившихся топологически различных фазовых портретов может сильно измениться (см. также [269]).

Ранее [269] было получено многопараметрическое семейство фазовых портретов некоторой системы с переменной диссипацией с ненулевым средним (типичные портреты которой (абсолютно) грубы), являющейся некоторым возмущением динамической системы с переменной диссипацией с нулевым средним вида (1.16). Данное семейство (как и полученные ранее семейства [269]) содержит бесчисленное множество топологически неэквивалентных фазовых портретов на двумерном фазовом цилиндре.

## § 5. Системы на касательном расслоении к двумерной сфере

Рассмотрим следующую динамическую систему:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + b\dot{\theta} \cos \theta + \sin \theta \cos \theta - \dot{\psi}^2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= 0, \\ \ddot{\psi} + b\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\theta} \dot{\psi} \left[ \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

на касательном расслоении  $T_*\mathbf{S}^2$  двумерной сферы  $\mathbf{S}^2\{\theta, \psi\}$ . Данная система описывает сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды (см. также [269]). При этом в системе присутствует консервативный момент

$$\sin \theta \cos \theta, \quad (1.29)$$

а также момент силы, линейным образом зависящий от скорости с переменным коэффициентом

$$b \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \cos \theta. \quad (1.30)$$

Оставшиеся коэффициенты в уравнениях являются коэффициентами связности, а именно:

$$\Gamma_{\psi\psi}^{\theta} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \Gamma_{\theta\psi}^{\psi} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}. \quad (1.31)$$

Система (1.28) фактически имеет порядок 3, поскольку переменная  $\psi$  является циклической, при этом в систему входит лишь производная  $\dot{\psi}$ .

**Предложение 1.3.** *Уравнение*

$$\dot{\psi} = 0 \quad (1.32)$$

*задает семейство интегральных плоскостей для системы (1.28).*

Более того, уравнение (1.32) редуцирует систему (1.28) к уравнению, описывающему цилиндрический маятник, находящийся в потоке набегающей среды (см. также [269]).

**Предложение 1.4.** *Система (1.28) эквивалентна следующей системе:*

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -z_2 + b \sin \theta, \\ \dot{z}_2 &= \sin \theta \cos \theta - z_1^2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\ \dot{z}_1 &= z_1 z_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\ \dot{\psi} &= z_1 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (1.33)$$

*на касательном расслоении  $T_*\mathbf{S}^2\{z_1, z_2, \theta, \psi\}$  двумерной сферы  $\mathbf{S}^2\{\theta, \psi\}$ .*

Более того, первые три уравнения системы (1.33) образуют замкнутую систему третьего порядка и совпадают с системой (1.19) (если положить  $\alpha = \theta$ ). Отделение четвертого уравнения системы (1.33) также произошло по причине цикличности переменной  $\psi$ .

О построении фазового портрета системы (1.28), изображенного на рис. 1, см. [269].

**Пример 1.3.** Исследуем систему вида (1.19), которая сводится к (1.21), а также следующую систему, возникающую в

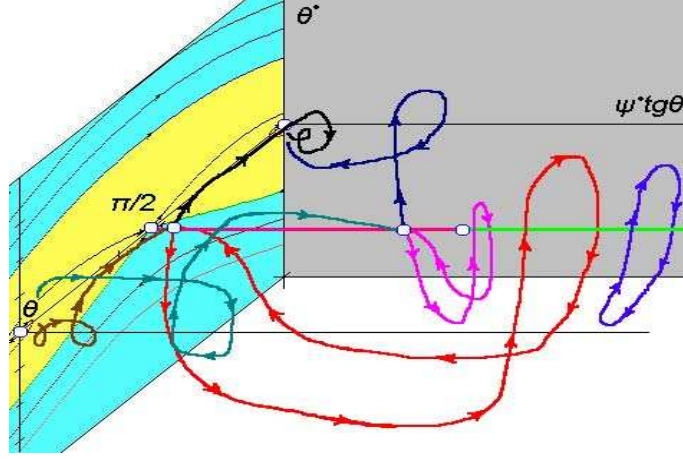


Рис. 1. Относительно грубый фазовый портрет в трехмерной области

пространственной (3D-) динамике твердого тела, взаимодействующего со средой (см. также главы 4, 5):

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha} &= -z_2 + b(z_1^2 + z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\
 \dot{z}_2 &= \sin \alpha \cos \alpha + bz_2(z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \\
 &\quad - bz_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\
 \dot{z}_1 &= bz_1(z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \\
 &\quad - bz_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

которая соответствует следующей системе с алгебраической правой частью:

$$\begin{aligned}
 \frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{\tau + bz_2(z_1^2 + z_2^2) - bz_2\tau^2 - z_1^2/\tau}{-z_2 + b\tau(z_1^2 + z_2^2) + b\tau(1 - \tau^2)}, \\
 \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{bz_1(z_1^2 + z_2^2) - bz_1\tau^2 + z_1 z_2/\tau}{-z_2 + b\tau(z_1^2 + z_2^2) + b\tau(1 - \tau^2)}.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Следовательно, мы, по-прежнему, рассматриваем пару систем: первоначальную систему (1.34) и соответствующую ей алгебраическую систему (1.35).

Аналогичным образом производится переход к однородным

координатам  $u_k$ ,  $k = 1, 2$ , по формулам

$$z_k = u_k \tau. \quad (1.36)$$

Система (1.21) (см. выше) приводится с помощью последней замены к виду

$$\begin{aligned} \tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{\tau - u_1^2 \tau}{-u_2 \tau + b\tau}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{u_1 u_2 \tau}{-u_2 \tau + b\tau}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

который, в свою очередь, соответствует уравнению

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1 u_2 - bu_1}. \quad (1.38)$$

Данное уравнение интегрируется в элементарных функциях, поскольку интегрируется тождество

$$d \left( \frac{1 - \beta u_2 + u_2^2}{u_1} \right) + du_1 = 0, \quad (1.39)$$

и имеет в координатах  $(\tau, z_1, z_2)$  первый интеграл вида (ср. с [269])

$$\frac{z_1^2 + z_2^2 - \beta z_2 \tau + \tau^2}{z_1 \tau} = \text{const}.$$

Система же (1.34) после ее приведения к соответствующей системе

$$\begin{aligned} \tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{\tau + bu_2 \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) - bu_2 \tau^3 - u_1^2 \tau}{-u_2 \tau + b\tau^3 (u_1^2 + u_2^2) + b\tau(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{bu_1 \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) - bu_1 \tau^3 + u_1 u_2 \tau}{-u_2 \tau + b\tau^3 (u_1^2 + u_2^2) + b\tau(1 - \tau^2)} \end{aligned} \quad (1.40)$$

также приводится к (1.38).

## § 6. Некоторые обобщения

Зададим вопрос: каковы возможности интегрирования в элементарных функциях следующей системы более общего вида,

включающей в себя рассмотренные выше системы (1.21), (1.35), в трехмерных фазовых областях:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{ax + by + cz + c_1 z^2/x + c_2 zy/x + c_3 y^2/x}{d_1 x + ey + fz}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{gx + hy + iz + i_1 z^2/x + i_2 zy/x + i_3 y^2/x}{d_1 x + ey + fz},\end{aligned}\quad (1.41)$$

имеющей особенность типа  $1/x$ ?

Ранее уже был получен ряд результатов по данному вопросу (см. также [269]). Приведем краткое резюме по данным результатам, а также дополним материал оригинальными рассуждениями.

Вводя, как и ранее, подстановки

$$y = ux, \quad z = vx, \quad (1.42)$$

получим, что система (1.41) приводится к следующей системе:

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{ax + bux + cvx + c_1 v^2 x + c_2 vux + c_3 u^2 x}{d_1 x + eux + fvx}, \quad (1.43)$$

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{gx + hux + ivx + i_1 v^2 x + i_2 vux + i_3 u^2 x}{d_1 x + eux + fvx}, \quad (1.44)$$

эквивалентной

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{ax + bux + (c - d_1)vx + (c_1 - f)v^2 x + (c_2 - e)vux + c_3 u^2 x}{d_1 x + eux + fvx}, \quad (1.45)$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{gx + (h - d_1)ux + ivx + i_1 v^2 x + (i_2 - f)vux + (i_3 - e)u^2 x}{d_1 x + eux + fvx}, \quad (1.46)$$

которой сопоставим следующее неавтономное уравнение с алгебраической правой частью:

$$\frac{dv}{du} = \frac{a + bu + cv + c_1 v^2 + c_2 vu + c_3 u^2 - v[d_1 + eu + fv]}{g + hu + iv + i_1 v^2 + i_2 vu + i_3 u^2 - u[d_1 + eu + fv]}. \quad (1.47)$$

Интегрирование последнего уравнения сводится к интегрированию уравнения в полных дифференциалах:

$$\begin{aligned}[g + hu + iv + i_1 v^2 + i_2 vu + i_3 u^2 - d_1 u - eu^2 - fuv]dv = \\ = [a + bu + cv + c_1 v^2 + c_2 vu + c_3 u^2 - d_1 v - euv - fv^2]du.\end{aligned}\quad (1.48)$$

Имеем, вообще говоря, 15-параметрическое семейство уравнений вида (1.48). Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества как однородного уравнения, достаточно наложить 6 соотношений:

$$g = 0, \quad i = 0, \quad i_1 = 0, \quad e = c_2, \quad h = c, \quad i_2 = 2c_1 - f. \quad (1.49)$$

Введем 9 параметров  $\beta_1, \dots, \beta_9$  и рассмотрим их в качестве независимых:

$$\begin{aligned} \beta_1 = a, \quad \beta_2 = b, \quad \beta_3 = c, \quad \beta_4 = c_1, \quad \beta_5 = c_2, \\ \beta_6 = c_3, \quad \beta_7 = d_1, \quad \beta_8 = f, \quad \beta_9 = i_3. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Таким образом, уравнение (1.48) при выполнении групп условий (1.49), (1.50) сводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta_1 + \beta_2 u + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_8)v^2 + \beta_6 u^2}{(\beta_3 - \beta_7)u + 2(\beta_4 - \beta_8)vu + (\beta_9 - \beta_5)u^2}, \quad (1.51)$$

а система (1.45), (1.46) соответственно к виду

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{\beta_1 + \beta_2 u + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_8)v^2 + \beta_6 u^2}{\beta_7 + \beta_5 u + \beta_8 v}, \quad (1.52)$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{(\beta_3 - \beta_7)u + 2(\beta_4 - \beta_8)vu + (\beta_9 - \beta_5)u^2}{\beta_7 + \beta_5 u + \beta_8 v}, \quad (1.53)$$

после чего уравнение (1.51) интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций.

Действительно, интегрируя тождество (1.48), получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} d \left[ \frac{(\beta_3 - \beta_7)v}{u} \right] + d \left[ \frac{(\beta_4 - \beta_8)v^2}{u} \right] + d[(\beta_9 - \beta_5)v] + d \left[ \frac{\beta_1}{u} \right] - \\ - d[\beta_2 \ln |u|] - d[\beta_6 u] = 0, \end{aligned} \quad (1.54)$$

которое для начала позволяет получить следующее инвариантное соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{(\beta_3 - \beta_7)v}{u} + \frac{(\beta_4 - \beta_8)v^2}{u} + (\beta_9 - \beta_5)v + \frac{\beta_1}{u} - \\ - \beta_2 \ln |u| - \beta_6 u = C_1 = \text{const}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

а затем в координатах  $(x, y, z)$  — первый интеграл в следующем виде:

$$\frac{(\beta_4 - \beta_8)z^2 - \beta_6 y^2 + (\beta_3 - \beta_7)zx + (\beta_9 - \beta_5)zy + \beta_1 x^2}{yx} -$$

$$-\beta_2 \ln \left| \frac{y}{x} \right| = \text{const}. \quad (1.56)$$

Таким образом, можно сделать вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы третьего порядка, зависящей от 9 параметров:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 z^2/x + \beta_5 zy/x + \beta_6 y^2/x}{\beta_7 x + \beta_5 y + \beta_8 z}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\beta_3 y + (2\beta_4 - \beta_8)zy/x + \beta_9 y^2/x}{\beta_7 x + \beta_5 y + \beta_8 z}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

**Следствие.** Следующая система третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \beta_7 \sin \alpha + \beta_5 z_1 + \beta_8 z_2, \\ \dot{z}_2 &= \beta_1 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_2 z_1 \cos \alpha + \beta_3 z_2 \cos \alpha + \\ &\quad + \beta_4 z_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_5 z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_6 z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \dot{z}_1 &= \beta_3 z_1 \cos \alpha + (2\beta_4 - \beta_8) z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_9 z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned} \quad (1.58)$$

на множестве

$$\mathbf{S}^1 \{ \alpha \bmod 2\pi \} \setminus \{ \alpha = 0, \alpha = \pi \} \times \mathbf{R}^2 \{ z_1, z_2 \}, \quad (1.59)$$

зависящая от 9 параметров, обладает, вообще говоря, трансцендентным первым интегралом, выраженным через элементарные функции:

$$\begin{aligned} &\frac{(\beta_4 - \beta_8)z_2^2 - \beta_6 z_1^2 + (\beta_3 - \beta_7)z_2 \sin \alpha + (\beta_9 - \beta_5)z_2 z_1 + \beta_1 \sin^2 \alpha^2}{z_1 \sin \alpha} - \\ &-\beta_2 \ln \left| \frac{z_1}{\sin \alpha} \right| = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

В частности, система (1.58) при  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_9 = 0$ ,  $\beta_6 = \beta_8 = -1$ ,  $\beta_7 = b$  имеет вид системы (1.19).

Для нахождения дополнительного первого интеграла неавтономной системы (1.41) используется найденный первый интеграл (1.56), выраженный через конечную комбинацию элементарных функций.

Преобразуем для начала соотношение (1.55) следующим образом:

$$(\beta_4 - \beta_8)v^2 + [(\beta_9 - \beta_5)u + (\beta_3 - \beta_7)]v + f_1(u) = 0, \quad (1.61)$$



где

$$f_1(u) = \beta_1 - \beta_6 u^2 - \beta_2 u \ln |u| - C_1 u.$$

При этом формально величину  $v$  можно найти из равенства

$$v_{1,2}(u) = \frac{1}{2(\beta_4 - \beta_8)} \left\{ (\beta_5 - \beta_9)u + (\beta_7 - \beta_3) \pm \sqrt{f_2(u)} \right\}, \quad (1.62)$$

где

$$\begin{aligned} f_2(u) &= A_1 + A_2 u + A_3 u^2 + A_4 u \ln |u|, \\ A_1 &= (\beta_3 - \beta_7)^2 - 4\beta_1(\beta_4 - \beta_8), \quad A_2 = 2(\beta_9 - \beta_5)(\beta_3 - \beta_7) + 4C_1(\beta_4 - \beta_8), \\ A_3 &= (\beta_9 - \beta_5)^2 + 4\beta_6(\beta_4 - \beta_8), \quad A_4 = 4\beta_2(\beta_4 - \beta_8). \end{aligned}$$

Тогда искомая квадратура для поиска дополнительного, вообще говоря, трансцендентного первого интеграла (например, системы (1.52), (1.53) или (1.45), (1.46), при этом используется уравнение (1.53)) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{[\beta_7 + \beta_5 u + \beta_8 v_{1,2}(u)] du}{(\beta_3 - \beta_7)u + (\beta_9 - \beta_5)u^2 + 2(\beta_4 - \beta_8)uv_{1,2}(u)} = \\ &= \int \frac{[B_1 + B_2 u + B_3 \sqrt{f_2(u)}] du}{B_4 u \sqrt{f_2(u)}}, \quad (1.63) \\ B_k &= \text{const}, \quad k = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Искомая же квадратура для поиска дополнительного, вообще говоря, трансцендентного первого интеграла (например, системы (1.52), (1.53) или (1.45), (1.46), когда при этом используется уравнение (1.52)) примет следующий вид:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{[\beta_7 + \beta_5 u(v) + \beta_8 v] dv}{\beta_1 + \beta_2 u(v) + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_8)v^2 + \beta_6 u^2(v)}, \quad (1.64)$$

при этом функция  $u(v)$  должна быть получена в результате разрешения неявного уравнения (1.55) относительно  $u$  (что, в общем случае, не всегда очевидно).

Достаточные условия выражения интегралов в (1.64) через конечную комбинацию элементарных функций дает следующая лемма.

**Лемма 1.1.** *При  $A_4 = 0$ , т.е. при*

$$\beta_2 = 0 \quad (1.65)$$

*или при*

$$\beta_4 = \beta_8 \quad (1.66)$$

неопределенный интеграл в (1.64) выражается через конечную комбинацию элементарных функций.

**Теорема 1.2.** Система (1.58) при выполнении достаточных условий леммы 1.1 (в данном случае выполнено свойство (1.65)) обладает полным набором первых интегралов, выраженных через конечную комбинацию элементарных функций.

Рассматриваемые в данной работе динамические системы относятся к системам с переменной диссипацией с нулевым средним по имеющейся периодической координате. Более того, такие системы часто обладают полным списком первых интегралов, выраженных через элементарные функции.

Таким образом, было приведено несколько случаев полной интегрируемости в динамике пространственного ( $3D$ -) движения тела в неконсервативном поле. При этом мы имели дело с тремя, на первый взгляд, независимыми свойствами:

- 1) выделенный выше класс систем (1.6) с отмеченными симметриями;
- 2) обладание этим классом систем переменной диссипацией с нулевым средним (по переменной  $\alpha$ ), что позволяет рассматривать их как «почти» консервативные системы;
- 3) в некоторых (пусть и достаточно маломерных) случаях обладание ими полным набором, вообще говоря, трансцендентных (с точки зрения комплексного анализа) первых интегралов.

Метод приведения исходных систем уравнений с правыми частями, содержащими полиномы от тригонометрических функций, к системам с полиномиальными правыми частями позволяет искать (или доказывать их отсутствие) первые интегралы для систем более общего вида, а не только тех, которые обладают указанными симметриями (см. также [269]).

## Глава 2

### СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ДВУМЕРНОЙ ПЛОСКОСТИ. I

В данной главе систематизируются как уже опубликованные ранее, так и полученные новые результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного двумерного ( $2D$ -) твердого тела, находящегося в некотором неконсер-

вативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твердых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной в течение всего времени движения, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи (см. также [1, 49, 51, 88, 111–113, 139, 146–149, 186, 188, 195, 202, 241, 246, 350, 373, 374, 412]).

Ранее в [146–149] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

В данной главе полученные ранее и добавленные позднее результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

## § 1. Более общая задача о движении со следящей силой

Рассмотрим плоскопараллельное движение симметричного твердого тела с передним плоским торцом (одномерной пластиной) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [26, 75, 86–90, 105, 111–113, 142–151, 153, 169, 170, 182, 183]. Если  $(v, \alpha)$  — полярные координаты вектора скорости некоторой характерной точки  $D$  твердого тела ( $D$  — центр пластины),  $\Omega$  — значение его угловой скорости,  $I$ ,  $m$  — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [182, 183], см. далее), при котором касательные силы воздействия среды на пластину отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 &= \frac{F_x}{m}, \\ \dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$I\dot{\Omega} = y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2,$$

где

$$F_x = -S, \quad S = s(\alpha)v^2, \quad \sigma > 0, \quad v > 0. \quad (2.2)$$

Первые два уравнения (2.1) описывают движение центра масс на двумерной евклидовой плоскости  $\mathbf{E}^2$  в проекциях на систему координат  $Dx_1x_2$ , связанную с телом. При этом  $Dx_1$  — срединный перпендикуляр к пластине, проходящий через центр масс  $C$  симметричного тела, а  $Dx_2$  — ось, выбранная вдоль пластины. Третье уравнение (2.1) получено из теоремы об изменении кинетического момента тела.

Таким образом, фазовым пространством системы (2.1) третьего порядка является прямое произведение

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \text{so}(2) \quad (2.3)$$

двумерного цилиндра на алгебру Ли  $\text{so}(2)$ .

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , проходящей через центр масс и обеспечивающей в течение всего времени движения выполнение равенства (см. также [146–149])

$$v \equiv \text{const}, \quad (2.4)$$

то в системе (2.1) вместо  $F_x$  будет стоять величина

$$T - s(\alpha)v^2, \quad \sigma = DC. \quad (2.5)$$

В результате соответствующего выбора величины  $T$  следящей силы можно формально добиться в течение всего времени движения выполнения равенства (2.4). Действительно, формально выражая величину  $T$ , в силу системы (2.1), получим при  $\cos \alpha \neq 0$ :

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = m\sigma\Omega^2 + s(\alpha)v^2 \left[ 1 - \frac{m\sigma}{I} y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right]. \quad (2.6)$$

При получении равенства (2.6) используется условие (2.4).

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при наличии в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (2.4). Во-вторых, на

это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (2.1) в результате действий порождает независимую систему второго порядка следующего вида:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega} &= 0, \\ I \dot{\Omega} &= y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2,\end{aligned}\tag{2.7}$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр  $v$ .

Как видно из (2.7), на многообразии

$$O = \left\{ (\alpha, \Omega) \in \mathbf{R}^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z} \right\}\tag{2.8}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно  $\dot{\alpha}$ . Таким образом, формально на многообразии (2.8) происходит нарушение теоремы единственности.

Из этого следует, что система (2.7) вне и только вне многообразия (2.8) эквивалентна системе

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\Omega + \frac{\sigma v}{I} \frac{y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)}{\cos \alpha}, \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{I} y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Нарушение теоремы единственности для системы (2.7) на многообразии (2.8) происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (2.8) проходит неособая фазовая траектория системы (2.7), пересекая многообразие (2.8) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (2.4) необходимо выбрать значение  $T$  при  $\cos \alpha \neq 0$  в виде (2.6).

Пусть

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)}{\cos \alpha} = L \left( \frac{\Omega}{v} \right).\tag{2.10}$$

Заметим, что  $|L| < +\infty$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right) \right| < +\infty. \quad (2.11)$$

При  $\alpha = \pi/2$  нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T = T_v \left( \frac{\pi}{2}, \Omega \right) = m\sigma\Omega^2 - \frac{m\sigma Lv^2}{I}, \quad (2.12)$$

где значение  $\Omega$  произвольно.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки  $W$ , необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v \left( \frac{\pi}{2}, \Omega \right) = \frac{mv^2}{R_0}, \quad (2.13)$$

где  $R_0$  — расстояние  $CW$ .

Равенства (2.6) и (2.13) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы  $T$  для почти всех точек многообразия (2.8), что и доказывает сделанное замечание.

## § 2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**2.1. Приведенная система.** Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183], возьмем динамические функции  $s$  и  $y_N$  вида

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \quad y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) = y_0(\alpha) = A \sin \alpha, \\ A, B &> 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от угла  $\alpha$ ).

Тогда, в силу неинтегрируемой связи (2.4), вне и только вне многообразия (2.8) динамическая часть уравнений движения (система (2.9)) примет вид аналитической системы:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\Omega + \sigma n_0^2 v \sin \alpha, \\ \dot{\Omega} &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Вводя далее безразмерные переменную, параметр и дифференцирование следующим образом:

$$\Omega = n_0 v \omega, \quad b = \sigma n_0, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \quad (2.16)$$

приведем систему (2.15) к виду

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + b \sin \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.17)$$

**2.2. Полный список инвариантных соотношений.** Составим системе (2.17) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{-\omega + b \sin \alpha}. \quad (2.18)$$

Используя замену  $\tau = \sin \alpha$ , перепишем уравнение (2.18) в алгебраическом виде

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau}{-\omega + b\tau}. \quad (2.19)$$

Далее, вводя однородную переменную по формуле  $\omega = u\tau$ , приводим уравнение (2.19) к следующей квадратуре:

$$\frac{(b-u)du}{1-bu+u^2} = \frac{d\tau}{\tau}. \quad (2.20)$$

Интегрирование квадратуры (2.20) приводит к рассмотрению трех случаев. Несложный подсчет приводит к следующим первым интегралам.

**I.**  $b^2 - 4 < 0$ .

$$\ln(1-bu+u^2) - \frac{2b}{\sqrt{4-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2u-b}{\sqrt{4-b^2}} + \ln \tau^2 = \text{const}. \quad (2.21)$$

**II.**  $b^2 - 4 > 0$ .

$$\ln|1-bu+u^2| + \frac{b}{\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{2u-b+\sqrt{b^2-4}}{2u-b-\sqrt{b^2-4}} \right| + \ln \tau^2 = \text{const}. \quad (2.22)$$

**III.**  $b^2 - 4 = 0$ .

$$\ln|u-1| + \frac{1}{u-1} + \ln|\tau| = \text{const}. \quad (2.23)$$

Другими словами, в переменных  $(\alpha, \omega)$  найденные первые интегралы имеют вид:

I.  $b^2 - 4 < 0$ .

$$[\sin^2 \alpha - b\omega \sin \alpha + \omega^2] \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{2b}{\sqrt{4-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\omega - b \sin \alpha}{\sqrt{4-b^2} \sin \alpha} \right\} = \text{const.} \quad (2.24)$$

II.  $b^2 - 4 > 0$ .

$$[\sin^2 \alpha - b\omega \sin \alpha + \omega^2] \times \\ \times \left| \frac{2\omega - b \sin \alpha + \sqrt{b^2 - 4} \sin \alpha}{2\omega - b \sin \alpha - \sqrt{b^2 - 4} \sin \alpha} \right|^{b/\sqrt{b^2 - 4}} = \text{const.} \quad (2.25)$$

III.  $b^2 - 4 = 0$ .

$$(\omega - \sin \alpha) \exp \left\{ \frac{\sin \alpha}{\omega - \sin \alpha} \right\} = \text{const.} \quad (2.26)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (2.1) имеет два инвариантных соотношения: аналитическая неинтегрируемая связь вида (2.4), а также первый интеграл, выраженный соотношениями (2.24)–(2.26) (или (2.21)–(2.23)), который является трансцендентной функцией фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражается через конечную комбинацию элементарных функций.

**Теорема 2.1.** Система (2.1) при условиях (2.4), (2.14) обладает двумя инвариантными соотношениями (полным набором), одно из которых является трансцендентной функцией с точки зрения комплексного анализа. При этом оба соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

**2.3. Топологические аналогии.** Рассмотрим следующее уравнение второго порядка:

$$\ddot{\theta} + b_* \dot{\theta} \cos \theta + \sin \theta \cos \theta = 0, \quad b_* > 0, \quad (2.27)$$

описывающее закрепленный маятник, помещенный в поток набегающей среды при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил [112, 144].

Ее фазовым пространством является двумерный цилиндр

$$\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^1. \quad (2.28)$$



Нетрудно убедиться, что данное уравнение эквивалентно динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении  $TS^1$  (или (2.28)) к одномерной сфере (окружности). Более того, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.2.** Система (2.1) при условиях (2.4), (2.14) эквивалентна уравнению (2.27).

Действительно, достаточно положить  $\alpha = \theta$ ,  $b = -b_*$ .

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

### § 3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**3.1. Введение зависимости от угловой скорости.** Глава 2 посвящена динамике двумерного твердого тела на плоскости. Но, поскольку данный параграф посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций. К тому же, данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть  $x = (x_{1N}, x_{2N})$  — координаты точки  $N$  воздействия неконсервативной силы (воздействия среды) на одномерную пластину,  $Q = (Q_1, Q_2)$  — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций  $(x_{1N}, x_{2N}) = (x_N, y_N)$  от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [30, 31, 45, 46, 48, 81–90, 112, 113, 151, 186, 207, 209, 253, 254, 265, 278–280].

Таким образом, возьмем зависимость

$$x = Q + R, \quad (2.29)$$

где  $R = (R_1, R_2)$  — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции  $R$  от угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Здесь  $(h_1, h_2)$  — некоторые положительные параметры (ср. с [326, 334, 335, 349, 415]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку  $x_{1N} = x_N \equiv 0$ , то

$$x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1 \frac{\Omega}{v}. \quad (2.31)$$

**3.2. Приведенная система.** Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183]

$$Q_2 = A \sin \alpha, \quad A > 0, \quad (2.32)$$

возьмем динамические функции  $s$  и  $y_N$  следующего вида:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, & y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha - h \frac{\Omega}{v}, \\ A, B, h &= h_1 > 0, & v &\neq 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости).

Тогда, в силу неинтегрируемой связи (2.4), вне и только вне многообразия (2.8) динамическая часть уравнений движения (система (2.9)) примет вид аналитической системы

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= - \left( 1 + \frac{\sigma B h}{I} \right) \Omega + \frac{\sigma A B v}{I} \sin \alpha, \\ \dot{\Omega} &= \frac{A B v^2}{I} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{B h v}{I} \Omega \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Вводя далее безразмерные переменную, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega &= n_0 v \omega, & n_0^2 &= \frac{A B}{I}, & b &= \sigma n_0, \\ H_1 &= \frac{B h}{I n_0}, & \langle \cdot \rangle &= n_0 v \langle' \rangle, \end{aligned} \quad (2.35)$$

приведем систему (2.34) к виду

$$\begin{aligned} \alpha' &= -(1 + b H_1) \omega + b \sin \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - H_1 \omega \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.36)$$

**3.3. Полный список инвариантных соотношений.** Сопоставим системе (2.36) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha - H_1 \omega \cos \alpha}{-(1 + bH_1)\omega + b \sin \alpha}. \quad (2.37)$$

Используя замену  $\tau = \sin \alpha$ , перепишем уравнение (2.37) в алгебраическом виде

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau - H_1 \omega}{-(1 + bH_1)\omega + b\tau}. \quad (2.38)$$

Далее, вводя однородную переменную по формуле  $\omega = u\tau$ , приводим уравнение (2.38) к следующей квадратуре:

$$\frac{(b - (1 + bH_1)u)du}{1 - (b + H_1)u + (1 + bH_1)u^2} = \frac{d\tau}{\tau}. \quad (2.39)$$

Интегрирование квадратуры (2.39) приводит к рассмотрению трех случаев. Несложный подсчет приводит к следующим первым интегралам:

**I.**  $|b - H_1| < 2$ .

$$\begin{aligned} & \ln(1 - (b + H_1)u + (1 + bH_1)u^2) - \\ & - \frac{2b}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \operatorname{arctg} \frac{2(1 + bH_1)u - (b + H_1)}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} + \\ & + \ln \tau^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

**II.**  $|b - H_1| > 2$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + bH_1} \ln |1 - (b + H_1)u + (1 + bH_1)u^2| + \\ & + \ln \tau^2 + \frac{b\sqrt{1 + bH_1}}{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \times \\ & \times \ln \left| \frac{2(1 + bH_1)^{3/2}u - (b + H_1)\sqrt{1 + bH_1} + \sqrt{(b - H_1)^2 - 4}}{2(1 + bH_1)^{3/2}u - (b + H_1)\sqrt{1 + bH_1} - \sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \right| = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

**III.**  $|b - H_1| = 2$ .

$$\ln \left| u - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)} \right| + \frac{b - H_1}{2(1 + bH_1)u - (b + H_1)} + \ln |\tau| = \text{const}. \quad (2.42)$$

В переменных  $(\alpha, \omega)$  найденные первые интегралы имеют достаточно громоздкий вид. Тем не менее в случае **III** мы приведем его в явном виде:

$$\left( \omega - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)} \sin \alpha \right) \times \exp \left\{ \frac{(b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\omega - (b + H_1) \sin \alpha} \right\} = \text{const}. \quad (2.43)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (2.1) имеет два инвариантных соотношения: аналитическая неинтегрируемая связь вида (2.4), а также первый интеграл, выраженный соотношениями (2.40)–(2.42) (или, в частности, в случае **III** (2.43)), который является трансцендентной функцией фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражается через конечную комбинацию элементарных функций.

**Теорема 2.3.** Система (2.1) при условиях (2.4), (2.33) обладает двумя инвариантными соотношениями (полным набором), одно из которых является трансцендентной функцией с точки зрения комплексного анализа. При этом оба соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

**3.4. Топологические аналогии.** Рассмотрим следующее уравнение второго порядка:

$$\ddot{\theta} + (b_* - H_{1*})\dot{\theta} \cos \theta + \sin \theta \cos \theta = 0, \quad b_*, H_{1*} > 0, \quad (2.44)$$

описывающее закрепленный маятник, помещенный в поток набегающей среды при учете зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил [269].

Ее фазовым пространством является двумерный цилиндр

$$\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^1. \quad (2.45)$$

Нетрудно убедиться, что данное уравнение эквивалентно динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении  $T\mathbf{S}^1$  (или (2.45)) к одномерной сфере (окружности). Более того, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.4.** Система (2.1) при условиях (2.4), (2.14) эквивалентна уравнению (2.44).

Действительно, достаточно положить  $\alpha = \theta$ ,  $b = -b_*$ ,  $H_1 = -H_{1*}$ .

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

### Глава 3

#### СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ДВУМЕРНОЙ ПЛОСКОСТИ. II

В данной главе систематизируются как уже опубликованные ранее, так и полученные новые результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного двумерного ( $2D$ -) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твердых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно в течение всего времени движения, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил (см. также [1, 49, 51, 88, 111–113, 139, 146–149, 184, 185, 188, 195, 198, 216, 235, 262, 295, 375, 376, 396, 412, 436]).

Ранее в [146–149] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций

комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

В данной главе полученные новые результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

### § 1. Более общая задача о движении со следящей силой

Рассмотрим плоскопараллельное движение симметричного твердого тела с передним плоским торцом (одномерной пластиной) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [26, 75, 86–90, 105, 111–113, 142–151, 153, 169, 170, 182, 183]. Если  $(v, \alpha)$  — полярные координаты вектора скорости некоторой характерной точки  $D$  твердого тела ( $D$  — центр пластины),  $\Omega$  — значение его угловой скорости,  $I, m$  — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [182, 183], см. далее), при котором касательные силы воздействия среды на пластину отсутствуют, примет вид

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 &= \frac{F_x}{m}, \\ \dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega} &= 0, \\ I \dot{\Omega} &= y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$F_x = -S, \quad S = s(\alpha) v^2, \quad \sigma > 0, \quad v > 0. \quad (3.2)$$

Первые два уравнения (3.1) описывают движение центра масс на двумерной евклидовой плоскости  $\mathbf{E}^2$  в проекциях на систему координат  $Dx_1x_2$ , связанную с телом. При этом  $Dx_1$  — срединный перпендикуляр к пластине, проходящий через центр масс  $C$  симметричного тела, а  $Dx_2$  — ось, выбранная вдоль пластины. Третье уравнение (3.1) получено из теоремы об изменении кинетического момента тела.

Таким образом, фазовым пространством системы (3.1) третьего порядка является прямое произведение

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \text{so}(2) \quad (3.3)$$

двумерного цилиндра на алгебру Ли  $\text{so}(2)$ .

Если рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , проходящей через центр масс и обеспечивающей в течение всего времени движения выполнение равенства ( $\mathbf{V}_C$  — скорость центра масс, см. также [146–149])

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \quad (3.4)$$

то в системе (3.1) вместо  $F_x$  должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0, \quad \sigma = DC. \quad (3.5)$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы  $T$  в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (3.6)$$

Случай (3.6) выбора величины  $T$  следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы второго порядка после некоторого преобразования системы третьего порядка (3.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину  $T$ :

$$\begin{aligned} T = T_v(\alpha, \Omega) &= \tau_1 \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 + \tau_2 \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega v + \tau_3 \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega^2 = \\ &= T_1 \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Систему (3.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\dot{v} + \sigma \Omega^2 \cos \alpha - \sigma \sin \alpha \left[ \frac{v^2}{I} y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right] &= \\
&= \frac{T_1 \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha) v^2}{m} \cos \alpha, \\
\dot{\alpha} v + \Omega v - \sigma \cos \alpha \left[ \frac{v^2}{I} y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right] - \sigma \Omega^2 \sin \alpha &= \\
&= \frac{s(\alpha) v^2 - T_1 \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \\
\dot{\Omega} &= \frac{v^2}{I} y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Если ввести далее новые безразмерные фазовую переменную и дифференцирование по формулам

$$\Omega = n_1 v \omega, \quad \langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const}, \tag{3.9}$$

то система (3.8) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \omega), \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin \alpha + \left[ \frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \cos \alpha - \\
&\quad - \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
\omega' &= \frac{1}{I n_1^2} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) - \omega \left[ \frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \sin \alpha + \\
&\quad + \sigma n_1 \omega^3 \cos \alpha - \omega \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(\alpha, \omega) &= -\sigma n_1 \omega^2 \cos \alpha + \left[ \frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \sin \alpha + \\
&\quad + \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha.
\end{aligned}$$



Видно, что в системе третьего порядка (3.10), (3.11) может быть выделена независимая подсистема второго порядка (3.11), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем двумерном фазовом цилиндре.

В частности, при выполнении условия (3.6) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы второго порядка также возможен.

## § 2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**2.1. Приведенная система.** Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183], возьмем динамические функции  $s$  и  $y_N$  следующего вида:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \\ y_N\left(\alpha, \frac{\Omega}{v}\right) &= y_0(\alpha) = A \sin \alpha, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от угла  $\alpha$ ).

Тогда, в силу условий (3.4), (3.12), преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (3.10), (3.11)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b\omega^2 \sin \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -b\omega^2 \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha;$$

при этом, как и выше, безразмерный параметр  $b$  и постоянную  $n_1$  выбираем следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad n_1 = n_0. \quad (3.15)$$

Следовательно, система (3.13), (3.14) может быть рассмотрена на своем фазовом трехмерном цилиндре

$$W_1 = \mathbf{R}_+^1\{v\} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}. \quad (3.16)$$

**2.2. Полный список первых интегралов.** От системы (3.13), (3.14) отделилась независимая система второго порядка (3.14).

Заметим, что, в силу (3.4), значение скорости центра масс является первым интегралом системы (3.1), а следовательно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \Omega) = v^2 + \sigma^2 \Omega^2 - 2\sigma \Omega v \sin \alpha = V_C^2 \quad (3.17)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

В силу невырожденной замены независимого переменного (при  $v \neq 0$ ), система (3.13), (3.14) также имеет аналитический интеграл, а следовательно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \omega) = v^2(1 + b^2 \omega^2 - 2b\omega \sin \alpha) = V_C^2 \quad (3.18)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (3.18) позволяет, не решая систему (3.13), (3.14), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра пластины) от других фазовых переменных, так как при  $V_C \neq 0$  выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + \sigma^2 \omega^2 - 2\sigma \omega \sin \alpha}. \quad (3.19)$$

Поскольку фазовое пространство (3.16) системы (3.13), (3.14) трехмерно, а в нем существуют асимптотические предельные множества, то равенство (3.18) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (3.13), (3.14) во всем фазовом пространстве (ср. с [22, 23, 42, 77, 96, 98, 127, 135–138, 165, 176, 217]).

Разберем подробнее вопрос существования второго (дополнительного) первого интеграла системы (3.13), (3.14). Ее фазовое пространство расслаивается на поверхности

$$\{(v, \alpha, \omega) \in W_1 : V_C = \text{const}\}, \quad (3.20)$$

динамика на которых определяется с помощью первого интеграла системы (3.14).

Сопоставим отделившейся системе второго порядка (3.14) неавтономное дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau + b\omega[\omega^2 - \tau^2]}{-\omega + b\tau + b\tau[\omega^2 - \tau^2]}, \quad \tau = \sin \alpha. \quad (3.21)$$

Введем обозначения (ср. с [185]):

$$C_1 = 2 - b, \quad C_2 = b > 0, \quad C_3 = -2 - b < 0. \quad (3.22)$$

Тогда, после замены переменных

$$u_1 = \omega - \tau, \quad v_1 = \omega + \tau \quad (3.23)$$

уравнение (3.21) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} du_1 \left\{ - \left( 1 + \frac{b}{2} \right) u_1 + \frac{b}{2} v_1 + b u_1 v_1^2 \right\} = \\ = dv_1 \left\{ \left( 1 - \frac{b}{2} \right) v_1 + \frac{b}{2} u_1 + b u_1^2 v_1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Используя далее две замены

$$u_1 = v_1 t_1, \quad v_1^2 = p_1, \quad (3.25)$$

приводим уравнение (3.24) к уравнению Бернулли:

$$2p_1 \{ C_3 t_1 + C_2 + 2C_2 t_1 p_1 \} = \frac{dp_1}{t_1} \{ C_1 - C_3 t_1^2 \}, \quad (3.26)$$

легко сводящемуся заменой  $p_1 = 1/q_1$  к линейному неоднородному:

$$q_1' = a_1(t_1)q_1 + a_2(t_1), \quad (3.27)$$

где

$$a_1(t_1) = \frac{2(C_3 t_1 + C_2)}{C_3 t_1^2 - C_1}, \quad a_2(t_1) = \frac{4C_2 t_1}{C_3 t_1^2 - C_1}. \quad (3.28)$$

Решение однородной части уравнения (3.27) найдется из равенства

$$q_{1 \text{ hom}}(t_1) = k \exp W(t_1), \quad W(t_1) = 2 \int \frac{(C_3 t_1 + C_2) dt_1}{C_3 t_1^2 - C_1}. \quad (3.29)$$

При вычислении интеграла (3.29) необходимо рассмотреть три случая.

**I.**  $C_1 > 0$  ( $b < 2$ ).

$$\begin{aligned} W(t_1) = \ln(-C_3 t_1^2 + C_1) - \\ - 2 \frac{C_2}{\sqrt{-C_1 C_3}} \arctg \sqrt{-\frac{C_3}{C_1}} t_1 + \text{const}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

**II.**  $C_1 < 0$  ( $b > 2$ ).

$$W(t_1) = \ln | -C_3 t_1^2 + C_1 | + \frac{C_2}{\sqrt{C_1 C_3}} \ln \left| \frac{\sqrt{-C_1} + \sqrt{-C_3} t_1}{\sqrt{-C_1} - \sqrt{-C_3} t_1} \right| + \text{const}. \quad (3.31)$$

**III.**  $C_1 = 0$  ( $b = 2$ ).

$$W(t_1) = 2 \ln |t_1| + \frac{1}{t_1}. \quad (3.32)$$

Теперь можно окончательно выписать общее решение однородного уравнения:

**I.**  $b < 2$ .

$$q_{1 \text{ hom}}(t_1) = k(-C_3 t_1^2 + C_1) \exp \left\{ -\frac{2b}{\sqrt{4-b^2}} \text{arctg} \sqrt{\frac{2+b}{2-b}} t_1 \right\} + \text{const}. \quad (3.33)$$

**II.**  $b > 2$ .

$$q_{1 \text{ hom}}(t_1) = k(-C_3 t_1^2 + C_1) \left| \frac{\sqrt{-C_1} + \sqrt{-C_3} t_1}{\sqrt{-C_1} - \sqrt{-C_3} t_1} \right|^{C_2/\sqrt{C_1 C_3}} + \text{const}. \quad (3.34)$$

**III.**  $b = 2$ .

$$q_{1 \text{ hom}}(t_1) = k t_1^2 \exp \left\{ \frac{1}{t_1} \right\} + \text{const}. \quad (3.35)$$

Для поиска решения неоднородного уравнения (3.27), (3.28) найдем величину  $k$  как функцию  $t_1$ . Получим:

**I.**  $b < 2$ .

$$k(t_1) = -\frac{b}{8} \exp \left\{ \frac{2b}{\sqrt{4-b^2}} \left[ \frac{2b}{\sqrt{4-b^2}} \sin 2\zeta - 2 \cos 2\zeta \right] \right\} + \text{const}, \quad (3.36)$$

где

$$\text{tg } \zeta = \sqrt{\frac{2-b}{2+b}} t_1. \quad (3.37)$$

**II.**  $b > 2$ .

$$k(t_1) = \pm |\zeta|^{b/\sqrt{b^2-4}} \mp \frac{b}{b + 2\sqrt{b^2-4}} |\zeta|^{b/\sqrt{b^2-4}+2} + \text{const}, \quad (3.38)$$

где

$$t_1 = \sqrt{\frac{b-2}{b+2}} \left( \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \right). \quad (3.39)$$

**III.**  $b = 2$ .

$$k(t_1) = -2 \frac{t_1 + 1}{t_1} \exp \left\{ -\frac{1}{t_1} \right\}. \quad (3.40)$$

Таким образом, равенства (3.33)–(3.40) позволяют получить искомый первый интеграл системы (3.14) (а значит, и дополнительный первый интеграл системы (3.13), (3.14)), который является трансцендентной функцией своих фазовых переменных и выражается через конечную комбинацию элементарных функций.

Ввиду громоздкости вида полученного первого интеграла, приведем его лишь в случае **III**:

$$\exp \left\{ \frac{\sin \alpha + \omega}{\sin \alpha - \omega} \right\} \frac{1 - 4\omega \sin \alpha + 4\omega^2}{(\omega - \sin \alpha)^2} = C_1 = \text{const}. \quad (3.41)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.13), (3.14) имеет два инвариантных соотношения — первых интеграла: аналитический вида (3.18), а также трансцендентный первый интеграл, который может быть получен с помощью равенств (3.33)–(3.40).

**Теорема 3.1.** Система (3.13), (3.14) обладает полным набором первых интегралов, один из которых является аналитической функцией, а второй — трансцендентной функцией фазовых переменных и выражен через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь необходимо повторить важное замечание. Дело в том, что, с точки зрения теории элементарных функций, полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции после ее формального продолжения в комплексную область имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

**2.3. Топологические аналогии.** Покажем, что существует еще одна механическая и топологическая аналогия.

**Теорема 3.2.** *Первый интеграл системы (2.1) при условиях (2.4), (2.14) постоянен на фазовых траекториях системы (3.13), (3.14).*

**Доказательство.** Приведем доказательство для случая  $b = 2$ . Действительно, перепишем первый интеграл (3.41) в следующем виде:

$$\exp \left\{ \frac{n_0 v \sin \alpha + \Omega}{n_0 v \sin \alpha - \Omega} \right\} \frac{n_0^2 v^2 - 2b n_0 v \Omega \sin \alpha + b^2 \Omega^2}{(\Omega - n_0 v \sin \alpha)^2} = \text{const}. \quad (3.42)$$

Видно, что числитель второго множителя пропорционален квадрату скорости центра масс тела  $\mathbf{V}_C$  с постоянным коэффициентом  $n_0^2$ . Но, в силу (3.17), данная величина постоянна на траекториях системы (3.13), (3.14). Значит, на них постоянна и функция

$$\exp \left\{ \frac{n_0 v \sin \alpha + \Omega}{n_0 v \sin \alpha - \Omega} \right\} \frac{V_C^2}{(\Omega - n_0 v \sin \alpha)^2} = \text{const}. \quad (3.43)$$

Возьмем далее степень  $(-1/2)$  от левой части равенства (3.43) и получим, что следующая функция также постоянна на фазовых траекториях системы (3.13), (3.14):

$$\exp \left\{ \frac{\Omega + n_0 v \sin \alpha}{2(\Omega - n_0 v \sin \alpha)} \right\} (\Omega - n_0 v \sin \alpha) = \text{const}. \quad (3.44)$$

Теперь, разделив равенство (3.44) на  $\sqrt{e}$ , получим функцию

$$\exp \left\{ \frac{n_0 v \sin \alpha}{\Omega - n_0 v \sin \alpha} \right\} (\Omega - n_0 v \sin \alpha) = \text{const}, \quad (3.45)$$

постоянную на фазовых траекториях системы (3.13), (3.14). Но первый интеграл (3.45) полностью аналогичен первому интегралу (2.26), что и требовалось доказать.  $\square$

Таким образом, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).

2) Движение закрепленного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).

3) Вращение твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

### § 3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**3.1. Введение зависимости от угловой скорости и приведенная система.** Мы продолжаем изучать динамику двумерного твердого тела на плоскости. Данный параграф (подобно аналогичному параграфу предыдущей главы) посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости. Поэтому введем такую же зависимость аналогичным образом. Напомним также, что данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть  $x = (x_{1N}, x_{2N})$  — координаты точки  $N$  воздействия неконсервативной силы (воздействия среды) на одномерную пластину,  $Q = (Q_1, Q_2)$  — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций  $(x_{1N}, x_{2N}) = (x_N, y_N)$  от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори, как уже указывалось выше, не очевидно [30, 31, 45, 46, 48, 81–90, 112, 113, 151, 186, 207, 209, 253, 254, 265, 278–280].

Таким образом, возьмем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \quad (3.46)$$

где  $R = (R_1, R_2)$  — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции  $R$  от угловой скорости — гироскопическая (см. также предыдущую главу):

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Здесь  $(h_1, h_2)$  — по-прежнему, некоторые положительные параметры (ср. с [326, 334, 335, 349, 415]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку  $x_{1N} = x_N \equiv 0$ , то

$$x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1 \frac{\Omega}{v}. \quad (3.48)$$

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183]

$$Q_2 = A \sin \alpha, \quad A > 0, \quad (3.49)$$

возьмем динамические функции  $s$  и  $y_N$  следующего вида:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \\ y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha - h \frac{\Omega}{v}, \quad A, B, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (3.50)$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости).

Тогда, в силу условий (3.4), (3.50), преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (3.10), (3.11)) примет вид аналитической системы

$$v' = v \Psi(\alpha, \omega), \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b \omega^2 \sin \alpha - b H_1 \omega \cos^2 \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - b \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b \omega^3 \cos \alpha + \\ &\quad + b H_1 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 \omega \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -b \omega^2 \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - b H_1 \omega \sin \alpha \cos \alpha,$$

при этом, как и выше, безразмерные параметры  $b$ ,  $H_1$  и постоянную  $n_1$  выбираем следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad H_1 = \frac{Bh}{In_0}, \quad n_1 = n_0. \quad (3.53)$$

Следовательно, система (3.51), (3.52) может быть рассмотрена на своем фазовом трехмерном цилиндре

$$W_1 = \mathbf{R}_+^1 \{v\} \times \mathbf{S}^1 \{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1 \{\omega\}. \quad (3.54)$$



**3.2. Полный список первых интегралов.** От системы (3.51), (3.52) отделилась независимая система второго порядка (3.52).

Заметим, что, в силу (3.4), значение скорости центра масс является первым интегралом системы (3.1), а следовательно, функция фазовых переменных (3.17) постоянна на ее фазовых траекториях.

В силу невырожденной замены независимого переменного (при  $v \neq 0$ ), у системы (3.51), (3.52) также существует аналитический интеграл, а следовательно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \omega) = v^2(1 + b^2\omega^2 - 2b\omega \sin \alpha) = V_C^2 \quad (3.55)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (3.55) позволяет, не решая систему (3.51), (3.52), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра пластины) от других фазовых переменных, а следовательно, при  $V_C \neq 0$  выполнено равенство (3.19).

Поскольку фазовое пространство (3.54) системы (3.51), (3.52) трехмерно, а в нем существуют асимптотические предельные множества, то равенство (3.55) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (3.51), (3.52) во всем фазовом пространстве (ср. с [22, 23, 42, 77, 96, 98, 127, 135–138, 165, 176, 217]).

Рассмотрим подробнее вопрос существования второго (дополнительного) первого интеграла системы (3.51), (3.52). Ее фазовое пространство расслаивается на поверхности (3.20), динамика на которых определяется с помощью первого интеграла системы (3.52).

Сопоставим отделившейся системе второго порядка (3.52) неавтономное дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau + b\omega[\omega^2 - \tau^2] + H_1\omega[b\omega\tau - 1]}{-\omega + b\tau + b\tau[\omega^2 - \tau^2] - bH_1\omega(1 - \tau^2)}, \quad \tau = \sin \alpha. \quad (3.56)$$

Тогда, после замены переменных

$$u_1 = \omega - \tau, \quad v_1 = \omega + \tau \quad (3.57)$$

уравнение (3.56) преобразуется к виду

$$du_1 \left\{ -u_1 \left( 1 + \frac{b}{2} + \frac{bH_1}{2} + \frac{H_1}{2} \right) + v_1 \left( \frac{b}{2} - \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2} \right) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + du_1 \left\{ bu_1 v_1^2 + \frac{bH_1}{4} v_1 (v_1^2 - u_1^2) \right\} = \\
& = dv_1 \left\{ u_1 \left( \frac{b}{2} + \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2} \right) + v_1 \left( 1 - \frac{b}{2} - \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2} \right) \right\} + \\
& + dv_1 \left\{ bu_1^2 v_1 + \frac{bH_1}{4} u_1 (v_1^2 - u_1^2) \right\}. \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Используя далее две замены

$$u_1 = v_1 t_1, \quad v_1^2 = p_1, \tag{3.59}$$

приведем уравнение (3.58) к уравнению Бернулли:

$$\begin{aligned}
& 2p_1 \{-A_2 t_1 + A_1 + bp_1(t_1 + H_1(1 - t_1^2)/4)\} = \\
& = \frac{dp_1}{dt_1} \{A_3 + bH_1 t_1 + A_2 t_1^2\}, \tag{3.60}
\end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{b}{2} - \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2}, \quad A_2 = 1 + \frac{b}{2} + \frac{bH_1}{2} + \frac{H_1}{2} > 0, \\
A_3 &= 1 - \frac{b}{2} + \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2}. \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Уравнение (3.60) заменой  $p_1 = 1/q_1$  легко сводится к линейному неоднородному уравнению:

$$q_1' = a_1(t_1)q_1 + a_2(t_1), \tag{3.62}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1(t_1) &= \frac{2(A_2 t_1 - A_1)}{A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3}, \\
a_2(t_1) &= \frac{2b(-t_1 + H_1(t_1^2 - 1)/4)}{A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3}. \tag{3.63}
\end{aligned}$$

Решение однородной части уравнения (3.62) находится из равенства

$$\begin{aligned}
q_{1 \text{ hom}}(t_1) &= k \exp W(t_1), \\
W(t_1) &= 2 \int \frac{(A_2 t_1 - A_1) dt_1}{A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3}. \tag{3.64}
\end{aligned}$$

При вычислении интеграла (3.64) необходимо рассмотреть три случая.

**I.**  $|b - H_1| < 2$ .

$$W(t_1) = \ln(A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3) - \frac{2(b - bH_1 - H_1)}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \times \\ \times \operatorname{arctg} \left\{ \frac{2 + b + bH_1 + H_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} t_1 + \frac{bH_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \right\} + \operatorname{const}. \quad (3.65)$$

**II.**  $|b - H_1| > 2$ .

$$W(t_1) = \ln |A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3| + \frac{b - bH_1 - H_1}{\sqrt{-4 + (b - H_1)^2}} \times \\ \times \ln \left| \frac{\sqrt{-4 + (b - H_1)^2} + (2 + b + bH_1 + H_1)t_1 + bH_1}{\sqrt{-4 + (b - H_1)^2} - (2 + b + bH_1 + H_1)t_1 - bH_1} \right| + \operatorname{const}. \quad (3.66)$$

**III.**  $|b - H_1| = 2$ .

$$W(t_1) = 2 \ln \left| t_1 + \frac{bH_1}{2A_2} \right| + \frac{bH_1 + 2A_1}{A_2} \frac{2A_2}{2A_2 t_1 + bH_1} + \operatorname{const}. \quad (3.67)$$

Теперь можно окончательно выписать общее решение однородного уравнения:

**I.**  $|b - H_1| < 2$ .

$$q_{1 \text{ hom}}(t_1) = k(A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3) \exp \times \\ \times \left\{ - \frac{2(b - bH_1 - H_1)}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{2 + b + bH_1 + H_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} t_1 + \frac{bH_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \right\} \right\}. \quad (3.68)$$

**II.**  $|b - H_1| > 2$ .

$$q_{1 \text{ hom}}(t_1) = k(A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3) \times \\ \times \left| \frac{\sqrt{-4 + (b - H_1)^2} + (2 + b + bH_1 + H_1)t_1 + bH_1}{\sqrt{-4 + (b - H_1)^2} - (2 + b + bH_1 + H_1)t_1 - bH_1} \right|^{(b - bH_1 - H_1)/\sqrt{-4 + (b - H_1)^2}}. \quad (3.69)$$

**III.**  $|b - H_1| = 2$ .

$$q_{1 \text{ hom}}(t_1) = k \left( t_1 + \frac{bH_1}{2A_2} \right)^2 \exp \left\{ \frac{2(b - H_1)}{(2 + b + bH_1 + H_1)t_1 + bH_1} \right\}. \quad (3.70)$$

Для поиска решения неоднородного уравнения (3.62), (3.63) находится величина  $k$  как функция  $t_1$ , выраженная через конечную комбинацию элементарных функций. Ввиду громоздкости выкладок дальнейшие рассуждения приводятся лишь в случае **III**.

Таким образом, соответствующие равенства позволяют получить искомый первый интеграл системы (3.52) (а значит, и дополнительный первый интеграл системы (3.51), (3.52)), который является трансцендентной функцией своих фазовых переменных и выражается через конечную комбинацию элементарных функций.

В случае **III** искомый первый интеграл примет вид

$$\exp \left\{ \frac{-2(b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\omega - (b + H_1) \sin \alpha} \right\} \frac{1 - 4\omega \sin \alpha + 4\omega^2}{(\omega - 2 \sin \alpha / (b + H_1))^2} = \\ = C_1 = \text{const}. \quad (3.71)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.51), (3.52) имеет два инвариантных соотношения (первых интеграла): аналитический вида (3.55), а также трансцендентный первый интеграл, который может быть получен с помощью равенств (3.65)–(3.71).

**Теорема 3.3.** Система (3.51), (3.52) обладает полным набором первых интегралов, один из которых является аналитической функцией, а второй — трансцендентной функцией фазовых переменных и выражен через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь необходимо повторить важное замечание. Дело в том, что, с точки зрения теории элементарных функций, полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции после ее формального продолжения в комплексную область имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

**3.3. Топологические аналогии.** Покажем, что существует еще одна механическая и топологическая аналогия.

**Теорема 3.4.** *Первый интеграл системы (3.1) при условиях (2.4), (2.33) постоянен на фазовых траекториях системы (3.51), (3.52).*

**Доказательство.** Приведем доказательство для случая  $|b - H_1| = 2$ . Действительно, перепишем первый интеграл (3.71) в следующем виде:

$$\exp \left\{ \frac{-2n_0 v(b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\Omega - n_0 v(b + H_1) \sin \alpha} \right\} \times \\ \times \frac{n_0^2 v^2 - 4n_0 v \Omega \sin \alpha + 4\Omega^2}{(\Omega - 2n_0 v \sin \alpha / (b + H_1))^2} = \text{const}. \quad (3.72)$$

Видно, что числитель второго множителя пропорционален квадрату скорости центра масс тела  $\mathbf{V}_C$  с постоянным коэффициентом. Но, в силу (3.17), данная величина постоянна на траекториях системы (3.51), (3.52). Значит, на них постоянна и функция

$$\exp \left\{ \frac{-2n_0 v(b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\Omega - n_0 v(b + H_1) \sin \alpha} \right\} \times \\ \times \frac{V_C^2}{(\Omega - 2n_0 v \sin \alpha / (b + H_1))^2} = \text{const}. \quad (3.73)$$

Возьмем далее степень  $(-1/2)$  от левой части равенства (3.73) и получим, что следующая функция также постоянна на фазовых траекториях системы (3.51), (3.52):

$$\exp \left\{ \frac{n_0 v(b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\Omega - n_0 v(b + H_1) \sin \alpha} \right\} \times \\ \times (\Omega - 2n_0 v \sin \alpha / (b + H_1)) = \text{const}. \quad (3.74)$$

Теперь ясно, что функция (3.74) эквивалентна функции (2.43), поскольку в случае **III** выполнено равенство

$$(b + H_1)^2 = 4(1 + bH_1). \quad (3.75)$$

Таким образом, соответствующая аналогия доказана, что и требовалось доказать.  $\square$

Аналогично рассуждениям предыдущей главы, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше, но теперь уже в случаях (2.33), (3.50):

1) движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи);

2) движение закрепленного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил);

3) вращение твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

#### *Глава 4*

### **СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. I**

В данной главе систематизируются как некоторые опубликованные ранее, так и полученные новые результаты по исследованию уравнений движения осесимметричного трехмерного (3D-) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твердых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной в течение всего времени движения, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи (см. также [1, 49, 51, 88, 111–113, 139, 146–149, 186, 188, 195, 202, 241, 246, 350, 373, 374, 412]).

Ранее в [146–149] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [197, 200, 206, 208, 212, 213, 222, 236, 245] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) слу-

чай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной главе полученные ранее и в настоящее время результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

### § 1. Более общая задача о движении со следящей силой

Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела с передним плоским торцом (двумерным диском) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [26, 75, 86–90, 105, 111–113, 142–151, 153, 169, 170, 182, 183]. Если  $(v, \alpha, \beta_1)$  — сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки  $D$  твердого тела ( $D$  — центр диска, лежащий на оси симметрии тела),  $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$  — проекции его угловой скорости на оси системы координат  $Dx_1x_2x_3$ , связанной с телом, при этом ось симметрии  $CD$  совпадает с осью  $Dx_1$  ( $C$  — центр масс), а оси  $Dx_2, Dx_3$  лежат в гиперплоскости диска,  $I_1, I_2, I_3 = I_2, m$  — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [182, 183], см. далее), при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned}
& \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \\
& - \Omega_3 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) = \frac{F_x}{m}, \\
& \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \\
& + \Omega_3 v \cos \alpha - \Omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \sigma \Omega_1 \Omega_2 - \sigma \dot{\Omega}_3 = 0, \\
& \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \\
& + \Omega_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \Omega_2 v \cos \alpha - \sigma \Omega_1 \Omega_3 + \sigma \dot{\Omega}_2 = 0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$I_1 \dot{\Omega}_1 = 0,$$

$$I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_3 = -z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2,$$

$$I_2 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 = y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2,$$

где

$$F_x = -S, \quad S = s(\alpha) v^2, \quad \sigma > 0, \quad v > 0. \quad (4.2)$$

Первые три уравнения (4.1) описывают движение центра масс в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbf{E}^3$  в проекциях на систему координат  $Dx_1x_2x_3$ . Вторые три уравнения (4.1) получены из теоремы об изменении кинетического момента тела в осях Кенига.

Таким образом, фазовым пространством системы (4.1) шестого порядка является прямое произведение

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^2 \times \mathfrak{so}(3) \quad (4.3)$$

трехмерного многообразия на алгебру Ли  $\mathfrak{so}(3)$ .

Сразу же заметим, что система (4.1), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3, \quad (4.4)$$

обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \text{const}. \quad (4.5)$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \quad (4.6)$$

Если рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , проходящей через центр масс и обеспечивающей в течение всего времени движения выполнение равенства (см. также [146–149])

$$v \equiv \text{const}, \quad (4.7)$$

то в системе (4.1) вместо  $F_x$  будет стоять величина

$$T - s(\alpha) v^2, \quad \sigma = DC. \quad (4.8)$$

В результате соответствующего выбора величины  $T$  следящей силы можно формально добиться выполнения равенства



(4.7) в течение всего времени движения. Действительно, выражая формально величину  $T$ , в силу системы (4.1), получим при  $\cos \alpha \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
T &= T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = \\
&= m\sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) + s(\alpha)v^2 \left[ 1 - \frac{m\sigma \sin \alpha}{I_2 \cos \alpha} \left[ z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \right] \right]. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

При получении равенства (4.9) используются условия (4.5)–(4.7).

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при наличии в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (4.7). Во-вторых, на это можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (4.1) в результате преобразований порождает независимую систему четвертого порядка следующего вида:

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1v \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_3v \cos \alpha - \sigma\dot{\Omega}_3 &= 0, \\
\dot{\alpha}v \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1v \sin \alpha \cos \beta_1 - \Omega_2v \cos \alpha + \sigma\dot{\Omega}_2 &= 0, \\
I_2\dot{\Omega}_2 &= -z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\
I_2\dot{\Omega}_3 &= y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр  $v$ .

Система (4.10) эквивалентна системе

$$\begin{aligned}
& \dot{\alpha} v \cos \alpha + v \cos \alpha [\Omega_3 \cos \beta_1 - \Omega_2 \sin \beta_1] + \\
& + \sigma [-\dot{\Omega}_3 \cos \beta_1 + \dot{\Omega}_2 \sin \beta_1] = 0, \\
& \dot{\beta}_1 v \sin \alpha - v \cos \alpha [\Omega_2 \cos \beta_1 + \Omega_3 \sin \beta_1] + \\
& + \sigma [\dot{\Omega}_2 \cos \beta_1 + \dot{\Omega}_3 \sin \beta_1] = 0, \\
& \dot{\Omega}_2 = -\frac{v^2}{I_2} z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \\
& \dot{\Omega}_3 = \frac{v^2}{I_2} y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Введем новые квазискорости в системе:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \Omega_2 \cos \beta_1 + \Omega_3 \sin \beta_1, \\
z_2 &= -\Omega_2 \sin \beta_1 + \Omega_3 \cos \beta_1.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Как видно из (4.11), на многообразии

$$O = \left\{ (\alpha, \beta_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbf{R}^4 : \alpha = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbf{Z} \right\} \tag{4.13}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}_1$ . Таким образом, формально на многообразии (4.13) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при  $k$  четном неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат  $(v, \alpha, \beta_1)$ , а при  $k$  нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (4.11) вырождается.

Из этого следует, что система (4.11) вне и только вне мно-

гоомбразия (4.13) эквивалентна системе

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= -z_2 + \\
&+ \frac{\sigma v}{I_2} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \left[ z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \right], \\
\dot{z}_2 &= \frac{v^2}{I_2} s(\alpha) \left[ z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \right] - \\
&- z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v}{I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_1 \times \\
&\times \left[ z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right], \quad (4.14) \\
\dot{z}_1 &= z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \left[ -\frac{v^2}{I_2} s(\alpha) + \frac{\sigma v}{I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_2 \right] \times \\
&\times \left[ z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right], \\
\dot{\beta}_1 &= z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\
&+ \frac{\sigma v}{I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left[ z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right].
\end{aligned}$$

Здесь и далее зависимость от групп переменных  $(\alpha, \beta_1, \Omega/v)$  понимается как сложная зависимость от  $(\alpha, \beta_1, z_1/v, z_2/v)$  в силу (4.12).

Нарушение теоремы единственности для системы (4.11) на многообразии (4.13) при нечетном  $k$  происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (4.13) при нечетном  $k$  проходит неособая фазовая траектория системы (4.14), пересекая многообразие (4.13) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (4.7) необходимо выбрать значение  $T$  при  $\cos \alpha \neq 0$  в виде (4.9).

Пусть

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{\left[ z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) \sin \beta_1 + y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_1 \right] s(\alpha)}{\cos \alpha} =$$

$$= L\left(\beta_1, \frac{\Omega}{v}\right). \quad (4.15)$$

Заметим, что  $|L| < +\infty$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \left[ z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) \sin \beta_1 + y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_1 \right] s(\alpha) \right) \right| <$$

$$< +\infty. \quad (4.16)$$

При  $\alpha = \pi/2$  нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \Omega\right) = m\sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - \frac{m\sigma Lv^2}{I_2}. \quad (4.17)$$

где значения  $\Omega_2, \Omega_3$  произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки  $W$ , необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \Omega\right) = \frac{mv^2}{R_0}, \quad (4.18)$$

где  $R_0$  — расстояние  $CW$ .

Равенства (4.9) и (4.18) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы  $T$  для почти всех точек многообразия (4.13), что и доказывает сделанное замечание.

## § 2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**2.1. Приведенная система.** Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183], возьмем динамические функ-

ции  $s$ ,  $y_N$  и  $z_N$  следующего вида:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \\ y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) &= y_0(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \cos \beta_1, \\ z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) &= z_0(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \sin \beta_1, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ).

Тогда, в силу неинтегрируемой связи (4.7), вне и только вне многообразия (4.13) динамическая часть уравнений движения (система (4.14)) примет вид аналитической системы

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_2 + \frac{\sigma ABv}{I_2} \sin \alpha, \\ \dot{z}_2 &= \frac{ABv^2}{I_2} \sin \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \dot{z}_1 &= z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \dot{\beta}_1 &= z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Вводя далее безразмерные переменные, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$\begin{aligned} z_k &\mapsto n_0 v z_k, \quad k = 1, 2, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \\ b &= \sigma n_0, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \end{aligned} \quad (4.21)$$

приведем систему (4.20) к виду

$$\begin{aligned} \alpha' &= -z_2 + b \sin \alpha, \\ z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \beta_1' &= z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Видно, что в системе четвертого порядка (4.22), (4.23), которую, как будет показано далее, можно рассматривать на ка-

сательном расслоении  $TS^2$  к двумерной сфере  $S^2$ , образовалась независимая система третьего порядка (4.22) на своем трехмерном многообразии.

## 2.2. Полный список инвариантных соотношений.

Сначала сопоставим системе третьего порядка (4.22) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dz_2}{d\alpha} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha - z_1^2 \cos \alpha / \sin \alpha}{-z_2 + b \sin \alpha}, \\ \frac{dz_1}{d\alpha} &= \frac{z_1 z_2 \cos \alpha / \sin \alpha}{-z_2 + b \sin \alpha}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Используя замену  $\tau = \sin \alpha$ , перепишем систему (4.24) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{\tau - z_1^2/\tau}{-z_2 + b\tau}, \\ \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{z_1 z_2/\tau}{-z_2 + b\tau}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z_k = u_k \tau, \quad k = 1, 2,\tag{4.26}$$

приводим систему (4.25) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - u_1^2}{-u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{u_1 u_2}{-u_2 + b},\end{aligned}\tag{4.27}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{-u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1 u_2 - bu_1}{-u_2 + b}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Сопоставим системе второго порядка (4.28) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{2u_1 u_2 - bu_1},\tag{4.29}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \quad (4.30)$$

Следовательно, уравнение (4.29) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (4.31)$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\frac{z_2^2 + z_1^2 - bz_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{z_1 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (4.32)$$

**Замечание 4.1.** Рассмотрим систему (4.22) с переменной диссипацией с нулевым средним [175, 176, 178, 179, 247, 264, 266, 269, 286–290, 295, 299, 313, 328, 337, 344, 406, 413, 426–430, 434, 435, 443], которая становится консервативной при  $b = 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha' &= -z_2, \\ z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z_1' &= z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$z_2^2 + z_1^2 + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (4.34)$$

$$z_1 \sin \alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (4.35)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (4.34), (4.35) также является первым интегралом системы (4.33). Но при  $b \neq 0$  каждая из функций

$$z_2^2 + z_1^2 - bz_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha \quad (4.36)$$

и (4.35) по отдельности не является первым интегралом системы (4.22). Однако отношение функций (4.36), (4.35) является первым интегралом системы (4.22) при любом  $b$ .

Далее найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.22). Для этого преобразуем сначала инвариантное соотношение (4.31) при  $u_1 \neq 0$  следующим

образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \quad (4.37)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geq 0 \quad (4.38)$$

и фазовое пространство системы (4.22) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (4.37).

Таким образом, в силу соотношения (4.31), первое уравнение системы (4.28) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \quad (4.39)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)} \right\}, \quad (4.40)$$

при этом постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (4.38).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (4.22) примет вид

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\tau}{\tau} = \\ & = \int \frac{(b - u_2) du_2}{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1 \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\} / 2}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |\sin \alpha|. \quad (4.42)$$

Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = w_1, \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4, \quad (4.43)$$

то правая часть равенства (4.41) примет вид

$$-\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4w_1^2)}{(b_1^2 - 4w_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}} -$$



$$\begin{aligned}
& -b \int \frac{dw_1}{(b_1^2 - 4w_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}} = \\
& = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{b}{2} I_1,
\end{aligned} \tag{4.44}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dw_3}{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}(w_3 \pm C_1)}, \quad w_3 = \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}. \tag{4.45}$$

При вычислении интеграла (4.45) возможны три случая.

**I.**  $b > 2$ .

$$\begin{aligned}
I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}} \right| + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}} \right| + \text{const}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

**II.**  $b < 2$ .

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 w_3 + b_1^2}{b_1(w_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{4.47}$$

**III.**  $b = 2$ .

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{C_1(w_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{4.48}$$

Возвращаясь к переменной

$$w_1 = \frac{z_2}{\sin \alpha} - \frac{b}{2}, \tag{4.49}$$

получим окончательный вид для величины  $I_1$ :

**I.**  $b > 2$ .

$$\begin{aligned}
I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4} \pm 2w_1}{\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}} \right| + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4} \mp 2w_1}{\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}} \right| + \text{const}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

II.  $b < 2$ .

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \quad (4.51)$$

III.  $b = 2$ .

$$I_1 = \mp \frac{2w_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \quad (4.52)$$

Таким образом, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (4.22), т.е. представлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

**Замечание 4.2.** В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (4.31).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln |\sin \alpha| + G_2 \left( \sin \alpha, \frac{z_2}{\sin \alpha}, \frac{z_1}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (4.53)$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (4.22), (4.23) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (4.23).

Поскольку

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{u_1(2u_2 - b)}{(b - u_2)\tau}, \quad \frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{u_1}{(b - u_2)\tau}, \quad (4.54)$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta_1} = 2u_2 - b. \quad (4.55)$$

Очевидно, что при  $u_1 \neq 0$  выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2} \left( b \pm \sqrt{b_1^2 - 4 \left( u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2} \right), \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4, \quad (4.56)$$

тогда интегрирование квадратуры

$$\beta_1 + \text{const} = \pm \int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - 4\left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2}} \quad (4.57)$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm \arcsin \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \text{const}. \quad (4.58)$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}} \quad (4.59)$$

или, при переходе к старым переменным

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2z_1 - C_1 \sin \alpha}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4 \sin \alpha}}. \quad (4.60)$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, «привязывающего» уравнение (4.23), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому, что в последнем выражении формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (4.31).

Но мы проведем некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (4.31)):

$$\text{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \frac{(u_1^2 - u_2^2 + bu_2 - 1)^2}{u_1^2(4u_2^2 - 4bu_2 + b^2)}. \quad (4.61)$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\text{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \frac{(z_1^2 - z_2^2 + bz_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha)^2}{z_1^2(4z_2^2 - 4bz_2 \sin \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)} \quad (4.62)$$

или окончательно

$$-\beta_1 \pm \frac{1}{2} \arctg \frac{z_1^2 - z_2^2 + bz_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{z_1(2z_2 - b \sin \alpha)} = C_3 = \text{const}. \quad (4.63)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (4.1) при условии (4.19) имеет пять инвариантных соотношений: аналитическая неинтегрируемая связь вида (4.7), циклический первый интеграл вида (4.5), (4.6), первый интеграл вида (4.32), а также первый интеграл, выраженный соотношениями (4.46)–(4.53), который является трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражен через конечную комбинацию элементарных функций, и, наконец, трансцендентный первый интеграл вида (4.63).

**Теорема 4.1.** Система (4.1) при условиях (4.7), (4.5), (4.6), (4.19) обладает пятью инвариантными соотношениями (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

**2.3. Топологические аналогии.** Рассмотрим следующую систему уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + b_* \dot{\xi} \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - \dot{\eta}_1^2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} &= 0, \\ \ddot{\eta}_1 + b_* \dot{\eta}_1 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_1 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} &= 0, \quad b_* > 0, \end{aligned} \quad (4.64)$$

описывающую закрепленный сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил [112, 144, 167, 177, 192, 205, 207, 239, 242, 280, 320, 321, 323, 324, 342, 381, 382, 398, 399, 408, 414]. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 4, но фазовая переменная  $\eta_1$  является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка.

Ее фазовым пространством является касательное расслоение

$$TS^2\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \xi, \eta_1\} \quad (4.65)$$

к двумерной сфере  $S^2\{\xi, \eta_1\}$ , при этом уравнение больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0 \quad (4.66)$$

задает семейство интегральных многообразий.

Нетрудно убедиться, что система (4.64) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (4.65) к двумерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.2.** Система (4.1) при условиях (4.7), (4.5), (4.6), (4.19) эквивалентна динамической системе (4.64).

Действительно, достаточно положить  $\alpha = \xi$ ,  $\beta_1 = \eta_1$ ,  $b = -b_*$ .

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

### § 3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**3.1. Введение зависимости от угловой скорости.** Глава 4 посвящена динамике трехмерного твердого тела в трехмерном пространстве. Но, поскольку данный параграф посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций. К тому же, данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть  $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N})$  — координаты точки  $N$  приложения неконсервативной силы (воздействия среды) к двумерному диску,  $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$  — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций  $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}) = (x_N, y_N, z_N)$  от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [30, 31, 45, 46, 48, 81–90, 112, 113, 151, 186, 207, 209, 253, 254, 265, 278–280].

Возьмем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \quad (4.67)$$

где  $R = (R_1, R_2, R_3)$  — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции  $R$  от угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Здесь  $(h_1, h_2, h_3)$  — некоторые положительные параметры (ср. с [326, 334, 335, 349, 415]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку  $x_{1N} = x_N \equiv 0$ , то

$$\begin{aligned} x_{2N} = y_N &= Q_2 - h_1 \frac{\Omega_3}{v}, \\ x_{3N} = z_N &= Q_3 + h_1 \frac{\Omega_2}{v}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

**3.2. Приведенная система.** Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183]

$$Q_2 = A \sin \alpha \cos \beta_1, \quad Q_3 = A \sin \alpha \sin \beta_1, \quad A > 0, \quad (4.70)$$

возьмем динамические функции  $s$ ,  $y_N$  и  $z_N$  следующего вида:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \quad B > 0, \\ y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) &= A \sin \alpha \cos \beta_1 - h \frac{\Omega_3}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 + h \frac{\Omega_2}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (4.71)$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости). Причем  $h_2 = h_3$  в силу динамической симметрии тела.

Тогда, в силу неинтегрируемой связи (4.7), вне и только вне многообразия (4.13) динамическая часть уравнений движения (система (4.14)) примет вид аналитической системы

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\left(1 + \frac{\sigma B h}{I_2}\right) z_2 + \frac{\sigma A B v}{I_2} \sin \alpha, \\ \dot{z}_2 &= \frac{A B v^2}{I_2} \sin \alpha \cos \alpha - \left(1 + \frac{\sigma B h}{I_2}\right) z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{B h v}{I_2} z_2 \cos \alpha, \\ \dot{z}_1 &= \left(1 + \frac{\sigma B h}{I_2}\right) z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{B h v}{I_2} z_1 \cos \alpha, \\ \dot{\beta}_1 &= \left(1 + \frac{\sigma B h}{I_2}\right) z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Вводя далее безразмерные переменные, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$\begin{aligned} z_k &\mapsto n_0 v z_k, \quad k = 1, 2, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \\ b &= \sigma n_0, \quad H_1 = \frac{Bh}{I_2 n_0}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \end{aligned} \quad (4.73)$$

приведем систему (4.72) к виду

$$\begin{aligned} \alpha' &= -(1 + bH_1) z_2 + b \sin \alpha, \\ z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1) z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 z_2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} z_1' &= (1 + bH_1) z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 z_1 \cos \alpha, \\ \beta_1' &= (1 + bH_1) z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Видно, что в системе четвертого порядка (4.74), (4.75), которую, как будет показано далее, можно рассматривать на касательном расслоении  $TS^2$  к двумерной сфере  $S^2$ , образовалась независимая система третьего порядка (4.74) на своем трехмерном многообразии.

### 3.3. Полный список инвариантных соотношений.

Сначала сопоставим системе третьего порядка (4.74) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dz_2}{d\alpha} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1) z_1^2 \cos \alpha / \sin \alpha - H_1 z_2 \cos \alpha}{-(1 + bH_1) z_2 + b \sin \alpha}, \\ \frac{dz_1}{d\alpha} &= \frac{(1 + bH_1) z_1 z_2 \cos \alpha / \sin \alpha - H_1 z_1 \cos \alpha}{-(1 + bH_1) z_2 + b \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Используя замену  $\tau = \sin \alpha$ , перепишем систему (4.76) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned} \frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{\tau - (1 + bH_1) z_1^2 / \tau - H_1 z_2}{-(1 + bH_1) z_2 + b\tau}, \\ \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{(1 + bH_1) z_1 z_2 / \tau - H_1 z_1}{-(1 + bH_1) z_2 + b\tau}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z_k = u_k \tau, \quad k = 1, 2, \quad (4.78)$$

приводим систему (4.77) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - (1 + bH_1)u_1^2 - H_1u_2}{-(1 + bH_1)u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{(1 + bH_1)u_1u_2 - H_1u_1}{-(1 + bH_1)u_2 + b},\end{aligned}\quad (4.79)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{(1 + bH_1)(u_2^2 - u_1^2) - (b + H_1)u_2 + 1}{-(1 + bH_1)u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1 + bH_1)u_1u_2 - (b + H_1)u_1}{-(1 + bH_1)u_2 + b}.\end{aligned}\quad (4.80)$$

Сопоставим системе второго порядка (4.80) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (1 + bH_1)(u_1^2 - u_2^2) - (b + H_1)u_2}{2(1 + bH_1)u_1u_2 - (b + H_1)u_1}, \quad (4.81)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1 + bH_1)(u_2^2 + u_1^2) - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \quad (4.82)$$

Следовательно, уравнение (4.81) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1 + bH_1)(u_2^2 + u_1^2) - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (4.83)$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\frac{(1 + bH_1)(z_2^2 + z_1^2) - (b + H_1)z_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{z_1 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (4.84)$$

**Замечание 4.3.** Рассмотрим систему (4.74) с переменной диссипацией с нулевым средним [175, 176, 178, 179, 247, 264, 266, 269, 286–290, 295, 299, 313, 328, 337, 344, 406, 413, 426–430, 434, 435, 443], которая становится консервативной при  $b = H_1$ :

$$\begin{aligned}\alpha' &= -(1 + b^2)z_2 + b \sin \alpha, \\ z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + b^2)z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - bz_2 \cos \alpha, \\ z_1' &= (1 + b^2)z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - bz_1 \cos \alpha.\end{aligned}\quad (4.85)$$



Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b^2)(z_2^2 + z_1^2) - 2bz_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (4.86)$$

$$z_1 \sin \alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (4.87)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (4.86), (4.87) также является первым интегралом системы (4.85). Но при  $b \neq H_1$  каждая из функций

$$(1 + bH_1)(z_2^2 + z_1^2) - (b + H_1)z_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha \quad (4.88)$$

и (4.87) по отдельности не является первым интегралом системы (4.74). Однако отношение функций (4.88), (4.87) является первым интегралом системы (4.74) при любых  $b, H_1$ .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.74). Для этого сначала преобразуем инвариантное соотношение (4.83) при  $u_1 \neq 0$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 = \\ = \frac{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + bH_1)^2}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geq 0 \quad (4.90)$$

и фазовое пространство системы (4.74) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (4.89).

Таким образом, в силу соотношения (4.83), первое уравнение системы (4.80) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 + bH_1)u_2^2 - 2(b + H_1)u_2 + 2 - C_1 U_1(C_1, u_2)}{b - (1 + bH_1)u_2}, \quad (4.91)$$

где

$$\begin{aligned} U_1(C_1, u_2) &= \frac{1}{2(1 + bH_1)} \{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}, \\ U_2(C_1, u_2) &= \\ &= \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1)(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2)}, \end{aligned} \quad (4.92)$$

при этом постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (4.90).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (4.74) примет вид

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\tau}{\tau} = \\ & = \int \frac{(b - (1 + bH_1)u_2)du_2}{2(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2) - \frac{C_1\{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}}{2(1 + bH_1)}}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |\sin \alpha|. \quad (4.94)$$

Если

$$u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)} = w_1, \quad b_1^2 = (b - H_1)^2 + C_1^2 - 4, \quad (4.95)$$

то правая часть равенства (4.93) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4(1 + bH_1)w_1^2)}{(b_1^2 - 4(1 + bH_1)w_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)w_1^2}} - \\ & -(b - H_1)(1 + bH_1) \int \frac{dw_1}{(b_1^2 - 4(1 + bH_1)w_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)w_1^2}} = \\ & = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)w_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{b - H_1}{2} I_1, \end{aligned} \quad (4.96)$$

где

$$I_1 = \int \frac{dw_3}{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}(w_3 \pm C_1)}, \quad w_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)w_1^2}. \quad (4.97)$$

При вычислении интеграла (4.97) возможны три случая.

**I.**  $|b - H_1| > 2$ .

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} + \sqrt{b_1^2-w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}} \right| + \\
& \quad + \frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}} \times \\
& \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} - \sqrt{b_1^2-w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}} \right| + \text{const.}
\end{aligned} \tag{4.98}$$

**II.**  $|b - H_1| < 2$ .

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 w_3 + b_1^2}{b_1(w_3 \pm C_1)} + \text{const.} \tag{4.99}$$

**III.**  $|b - H_1| = 2$ .

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{C_1(w_3 \pm C_1)} + \text{const.} \tag{4.100}$$

Возвращаясь к переменной

$$w_1 = \frac{z_2}{\sin \alpha} - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}, \tag{4.101}$$

имеем окончательный вид для величины  $I_1$ :

**I.**  $|b - H_1| > 2$ .

$$\begin{aligned}
I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}} \times \\
& \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} \pm 2(1+bH_1)w_1}{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2w_1^2 \pm C_1}} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}} \right| + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}} \times \\
& \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} \mp 2(1+bH_1)w_1}{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2w_1^2 \pm C_1}} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}} \right| + \text{const.}
\end{aligned} \tag{4.102}$$

II.  $|b - H_1| < 2$ .

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 w_1^2 + b_1^2}}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 w_1^2} \pm C_1)} + \text{const} . \quad (4.103)$$

III.  $|b - H_1| = 2$ .

$$I_1 = \mp \frac{2(1 + bH_1)w_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 w_1^2} \pm C_1)} + \text{const} . \quad (4.104)$$

Таким образом, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (4.74) — представлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

**Замечание 4.4.** В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (4.83).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln |\sin \alpha| + G_2 \left( \sin \alpha, \frac{z_2}{\sin \alpha}, \frac{z_1}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const} . \quad (4.105)$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (4.74), (4.75) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (4.75).

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{u_1(2(1 + bH_1)u_2 - (b + H_1))}{(b - (1 + bH_1)u_2)\tau}, \\ \frac{d\beta_1}{d\tau} &= \frac{(1 + bH_1)u_1}{(b - (1 + bH_1)u_2)\tau}, \end{aligned} \quad (4.106)$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta_1} = 2u_2 - \frac{b + H_1}{1 + bH_1}. \quad (4.107)$$

Очевидно, что при  $u_1 \neq 0$  выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2(1+bH_1)} \left( (b+H_1) \pm \sqrt{b_1^2 - (2(1+bH_1)u_1 - C_1)^2} \right), \quad (4.108)$$

$$b_1^2 = (b-H_1)^2 + C_1^2 - 4,$$

тогда интегрирование квадратуры

$$\beta_1 + \text{const} = \pm(1+bH_1) \int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - (2(1+bH_1)u_1 - C_1)^2}} \quad (4.109)$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm \arcsin \frac{2(1+bH_1)u_1 - C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \text{const}. \quad (4.110)$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2(1+bH_1)u_1 - C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}} \quad (4.111)$$

или, при переходе к старым переменным,

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2(1+bH_1)z_1 - C_1 \sin \alpha}{\sqrt{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4 \sin \alpha}}. \quad (4.112)$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, «привязывающего» уравнение (4.75), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому, что в последнем выражении формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (4.83).

Но мы проведем некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (4.83)):

$$\begin{aligned} \text{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] &= \\ &= \frac{((1+bH_1)u_1^2 - (1+bH_1)u_2^2 + (b+H_1)u_2 - 1)^2}{u_1^2(2(1+bH_1)u_2 - (b+H_1))^2}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\text{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] =$$

$$= \frac{((1 + bH_1)z_1^2 - (1 + bH_1)z_2^2 + (b + H_1)z_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha)^2}{z_1^2(2(1 + bH_1)z_2 - (b + H_1) \sin \alpha)^2} \quad (4.114)$$

или, окончательно,

$$\begin{aligned} & -\beta_1 \pm \frac{1}{2} \times \\ & \times \arctg \frac{(1 + bH_1)z_1^2 - (1 + bH_1)z_2^2 + (b + H_1)z_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{z_1(2(1 + bH_1)z_2 - (b + H_1) \sin \alpha)} = \\ & = C_3 = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (4.1) при условии (4.71) имеет пять инвариантных соотношений: аналитическая неинтегрируемая связь вида (4.7), циклический первый интеграл вида (4.5), (4.6), первый интеграл вида (4.84), а также первый интеграл, выраженный соотношениями (4.98)–(4.105), который является трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражен через конечную комбинацию элементарных функций, и, наконец, трансцендентный первый интеграл вида (4.115).

**Теорема 4.3.** Система (4.1) при условиях (4.7), (4.5), (4.6), (4.71) обладает пятью инвариантными соотношениями (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражены через конечную комбинацию элементарных функций.

**3.4. Топологические аналогии.** Рассмотрим следующую систему уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned} & \ddot{\xi} + (b_* - H_1^*)\dot{\xi} \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - \dot{\eta}_1^2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = 0, \\ & \ddot{\eta}_1 + (b_* - H_1^*)\dot{\eta}_1 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_1 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} = 0, \\ & b_* > 0, \quad H_1^* > 0, \end{aligned} \quad (4.116)$$

описывающую закрепленный сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды при наличии зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил [112, 144, 167, 177, 192, 205, 207, 239,

242, 280, 320, 321, 323, 324, 342, 381, 382, 398, 399, 408, 414]. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 4, но фазовая переменная  $\eta_1$  является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка.

Ее фазовым пространством является касательное расслоение

$$TS^2\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \xi, \eta_1\} \quad (4.117)$$

к двумерной сфере  $S^2\{\xi, \eta_1\}$ , при этом уравнение больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0 \quad (4.118)$$

задает семейство интегральных многообразий.

Нетрудно убедиться, что система (4.116) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (4.117) к двумерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.4.** Система (4.1) при условиях (4.7), (4.5), (4.6), (4.71) эквивалентна динамической системе (4.116).

Действительно, достаточно положить  $\alpha = \xi$ ,  $\beta_1 = \eta_1$ ,  $b = -b_*$ ,  $H_1 = -H_1^*$ .

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

## Глава 5

### СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II

В этой главе систематизируются как некоторые опубликованные ранее, так и полученные новые результаты по исследованию уравнений движения осесимметричного трехмерного (3D-) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твердых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила и заставляет центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно в течение всего времени

движения, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил (см. также [1, 49, 51, 88, 111–113, 139, 146–149, 184, 185, 188, 195, 198, 216, 235, 262, 295, 375, 376, 396, 412, 436]).

Ранее в [146–149] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [197, 200, 206, 208, 212–213, 222, 236, 245] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной главе полученные новые результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

## § 1. Более общая задача о движении со следящей силой

Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела с передним плоским торцом (двумерным диском) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [26, 75, 86–90, 105, 111–113, 142–151, 153, 169, 170, 182, 183]. Если  $(v, \alpha, \beta_1)$  — сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки  $D$  твердого тела ( $D$  — центр диска, лежащий на оси симметрии тела),  $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$  — компоненты его угловой скорости в системе координат  $Dx_1x_2x_3$ , связанной с телом, при этом ось симметрии  $CD$  совпадает с осью  $Dx_1$  ( $C$  — центр масс), а оси  $Dx_2$ ,  $Dx_3$  лежат в гиперплоскости диска,  $I_1, I_2, I_3 = I_2$ ,  $m$  — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитичес-



ких функций Чаплыгина [182, 183], см. далее), при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned}
& \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \Omega_3 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \\
& + \sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) = \frac{F_x}{m}, \\
& \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \\
& + \Omega_3 v \cos \alpha - \Omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \sigma \Omega_1 \Omega_2 - \sigma \dot{\Omega}_3 = 0, \\
& \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \\
& + \Omega_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \Omega_2 v \cos \alpha - \sigma \Omega_1 \Omega_3 + \sigma \dot{\Omega}_2 = 0, \\
& \dot{\Omega}_1 = 0,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_3 = -z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2,$$

$$I_2 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 = y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2,$$

где

$$F_x = -S, \quad S = s(\alpha) v^2, \quad \sigma > 0, \quad v > 0. \tag{5.2}$$

Первые три уравнения (5.1) описывают движение центра масс в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbf{E}^3$  в проекциях на систему координат  $Dx_1x_2x_3$ . Вторые три уравнения (5.1) получены из теоремы об изменении кинетического момента тела в осях Кенига.

Таким образом, фазовым пространством системы (5.1) шестого порядка является прямое произведение

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^2 \times \mathfrak{so}(3) \tag{5.3}$$

трехмерного многообразия на алгебру Ли  $\mathfrak{so}(3)$ .

Сразу же заметим, что система (5.1), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3, \tag{5.4}$$

обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \text{const}. \tag{5.5}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \quad (5.6)$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , проходящей через центр масс и обеспечивающей в течение всего времени движения выполнение равенства ( $\mathbf{V}_C$  — скорость центра масс, см. также [146–149])

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \quad (5.7)$$

то в системе (5.1) вместо  $F_x$  должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0, \quad \sigma = DC. \quad (5.8)$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы  $T$  в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (5.9)$$

Случай (5.9) выбора величины  $T$  следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы пятого порядка после некоторого преобразования системы шестого порядка (5.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину  $T$ :

$$\begin{aligned} T &= T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = \\ &= \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \leq j}}^3 \tau_{i,j} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega_i \Omega_j = T_1 \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \Omega_0 = v. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Введем для начала следующие квазискорости:

$$z_1 = \Omega_2 \cos \beta_1 + \Omega_3 \sin \beta_1, \quad z_2 = -\Omega_2 \sin \beta_1 + \Omega_3 \cos \beta_1. \quad (5.11)$$

Систему (5.1) в случаях (5.5), (5.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& \dot{v} + \sigma(z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \\
& - \sigma \frac{v^2}{I_2} s(\alpha) \sin \alpha \left[ y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 + z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = \\
& = \frac{T_1 \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha) v^2}{m} \cos \alpha, \\
& \dot{\alpha} v + z_2 v - \sigma(z_1^2 + z_2^2) \sin \alpha - \\
& - \sigma \frac{v^2}{I_2} s(\alpha) \cos \alpha \left[ y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 + z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = \\
& = \frac{s(\alpha) v^2 - T_1 \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \\
& \dot{\Omega}_3 = \frac{v^2}{I_2} y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \\
& \dot{\Omega}_2 = -\frac{v^2}{I_2} z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \\
& \dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_1 \cos \alpha - \\
& - \frac{\sigma v}{I_2} s(\alpha) \left[ z_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = 0.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Если ввести далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, 2, \quad \langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const}, \tag{5.13}$$

то система (5.12) приводится к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha' = -Z_2 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \\
& + \frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha) \cos \alpha [y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] - \\
& - \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
Z'_2 &= \frac{s(\alpha)}{I_2 n_1^2} [1 - \sigma n_1 Z_2 \sin \alpha] \times \\
&\times [y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] - \\
&- Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\
&- \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] - \\
&- Z_2 \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \tag{5.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z'_1 &= \frac{1}{I_2 n_1^2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} [\sigma n_1 Z_2 \sin \alpha - 1] \times \\
&\times [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] + \\
&+ Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\
&- \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 s(\alpha) \sin \alpha [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1 + y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1] - \\
&- Z_1 \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \tag{5.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta'_1 &= Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\
&+ \frac{\sigma}{I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1], \tag{5.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) &= -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \\
&+ \frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha [y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] + \\
&+ \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha.
\end{aligned}$$

Видно, что в системе пятого порядка (5.14)–(5.18) может быть выделена независимая подсистема четвертого порядка (5.15)–(5.18), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем четырехмерном фазовом пространстве.

В частности, при выполнении условия (5.9) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы четвертого порядка также возможен.

## § 2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**2.1. Приведенная система.** Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183], возьмем динамические функции  $s$ ,  $y_N$  и  $z_N$  следующего вида:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \quad y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = y_0(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \cos \beta_1, \\ z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) &= z_0(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \sin \beta_1, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ).

Тогда, в силу условий (5.7), (5.19) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5.14)–(5.18)) принимает вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \quad (5.20)$$

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha,$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$Z_1' = Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$

$$\beta_1' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.22)$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$

где, как и выше, безразмерный параметр  $b$  и постоянную  $n_1$  выбираем следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad n_1 = n_0. \quad (5.23)$$

Следовательно, система (5.20)–(5.22) может быть рассмотрена на своем фазовом пятимерном многообразии

$$W_1 = \mathbf{R}_+^1 \{v\} \times T\mathbf{S}^2 \{Z_1, Z_2, 0 < \alpha < \pi, 0 \leq \beta_1 < 2\pi\}, \quad (5.24)$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к двумерной сфере  $\mathbf{S}^2\{0 < \alpha < \pi, 0 \leq \beta_1 < 2\pi\}$ .

**2.2. Полный список первых интегралов.** От системы (5.20)–(5.22) отделилась независимая система четвертого порядка (5.21), (5.22).

Заметим, что, в силу (5.7), значение скорости центра масс является первым интегралом системы (5.1), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \beta_1, z_1, z_2) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + z_2^2) - 2\sigma z_2 v \sin \alpha = V_C^2 \quad (5.25)$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины  $z_1, z_2$  выбираются как в (5.11)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при  $v \neq 0$ ), у системы (5.20)–(5.22) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\begin{aligned} \Psi_1(v, \alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) &= \\ &= v^2(1 + b^2(Z_1^2 + Z_2^2) - 2bZ_2 \sin \alpha) = V_C^2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (5.26) позволяет, не решая системы (5.20)–(5.22), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра  $D$  диска) от других фазовых переменных, а именно, при  $V_C \neq 0$  выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + Z_2^2) - 2bZ_2 \sin \alpha}. \quad (5.27)$$

Поскольку фазовое пространство (5.24) системы (5.20)–(5.22) пятимерно, а в нем существуют асимптотические предельные множества, то равенство (5.26) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (5.20)–(5.22) во всем фазовом пространстве (ср. с [22, 23, 42, 77, 96, 98, 127, 135–138, 165, 176, 217]).

Разберем подробнее вопрос существования других (дополнительных) первых интегралов системы (5.20)–(5.22). Ее фазовое пространство расслаивается на поверхности

$$\{(v, \alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) \in W_1 : V_C = \text{const}\}, \quad (5.28)$$

динамика на которых определяется с помощью первых интегралов системы (5.21), (5.22).

Сначала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (5.21) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dZ_2}{d\alpha} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha}, \\ \frac{dZ_1}{d\alpha} &= \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha}.\end{aligned}\quad (5.29)$$

Используя замену  $\tau = \sin \alpha$ , перепишем систему (5.29) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dZ_2}{d\tau} &= \frac{\tau + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_2\tau^2 - Z_1^2/\tau}{-Z_2 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2)}, \\ \frac{dZ_1}{d\tau} &= \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_1\tau^2 + Z_1 Z_2/\tau}{-Z_2 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2)}.\end{aligned}\quad (5.30)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$Z_k = u_k \tau, \quad k = 1, 2, \quad (5.31)$$

приводим систему (5.30) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1 u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)},\end{aligned}\quad (5.32)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1 u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}.\end{aligned}\quad (5.33)$$

Сопоставим системе второго порядка (5.33) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1 u_2 - bu_1}, \quad (5.34)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \quad (5.35)$$

Следовательно, уравнение (5.34) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (5.36)$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\frac{Z_2^2 + Z_1^2 - bZ_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{Z_1 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (5.37)$$

**Замечание 5.1.** Рассмотрим систему (5.21) с переменной диссипацией с нулевым средним [175, 176, 178, 179, 247, 264, 266, 269, 286–290, 295, 299, 313, 328, 337, 344, 406, 413, 426–430, 434, 435, 443], которая становится консервативной при  $b = 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_2, \\ Z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ Z_1' &= Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$Z_2^2 + Z_1^2 + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (5.39)$$

$$Z_1 \sin \alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (5.40)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (5.39), (5.40) также является первым интегралом системы (5.38). Но при  $b \neq 0$  каждая из функций

$$Z_2^2 + Z_1^2 - bZ_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha \quad (5.41)$$

и (5.40) по отдельности не является первым интегралом системы (5.21). Однако отношение функций (5.41), (5.40) является первым интегралом системы (5.21) при любом  $b$ .

Далее, найдем дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (5.21). Для этого преобразуем сначала инвариантное соотношение (5.36) при  $u_1 \neq 0$  следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \quad (5.42)$$



Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geq 0 \quad (5.43)$$

и фазовое пространство системы (5.21) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (5.42).

Таким образом, в силу соотношения (5.36), первое уравнение системы (5.33) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1 - \tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)}, \quad (5.44)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)} \right\} \quad (5.45)$$

(при этом постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (5.43)), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}. \quad (5.46)$$

Уравнение (5.46) (при помощи (5.45)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (5.47)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (5.47) зависит от произвольной постоянной  $C_2$ . Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (5.47), даже в частном случае  $b = C_1 = 2$  имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = +C[\sqrt{1 - (u_2 - 1)^2} \pm 1] \exp \left[ \sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}{1 \pm \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}} \right], \quad C = \text{const}. \quad (5.48)$$

**Замечание 5.2.** В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (5.36).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$K_1\left(\sin \alpha, Z_2, Z_1, \frac{Z_2}{\sin \alpha}, \frac{Z_1}{\sin \alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \quad (5.49)$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (5.21), (5.22) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (5.22).

Поскольку

$$\frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{u_1}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2 + u_2^2) + b\tau(1 - \tau^2)}, \quad (5.50)$$

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{u_1(2u_2 - b)}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2 + u_2^2) + b\tau(1 - \tau^2)}, \quad (5.51)$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta_1} = 2u_2 - b. \quad (5.52)$$

Очевидно, что при  $u_1 \neq 0$  выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2} \left( b \pm \sqrt{b_1^2 - 4 \left( u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2} \right), \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4, \quad (5.53)$$

следовательно, интегрирование следующей квадратуры:

$$\beta_1 + \text{const} = \pm \int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - 4 \left( u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2}} \quad (5.54)$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm \arcsin \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \text{const}. \quad (5.55)$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}} \quad (5.56)$$

или, при переходе к старым переменным,

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2Z_1 - C_1 \sin \alpha}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4 \sin \alpha}}. \quad (5.57)$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, «привязывающего» уравнение (5.22), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому, что в последнем выражении формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (5.37).

Но мы проведем некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (5.36)):

$$\operatorname{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \frac{(u_1^2 - u_2^2 + bu_2 - 1)^2}{u_1^2(4u_2^2 - 4bu_2 + b^2)}. \quad (5.58)$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\operatorname{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \frac{(Z_1^2 - Z_2^2 + bZ_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha)^2}{Z_1^2(4Z_2^2 - 4bZ_2 \sin \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)} \quad (5.59)$$

или, окончательно,

$$-\beta_1 \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{Z_1^2 - Z_2^2 + bZ_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{Z_1(2Z_2 - b \sin \alpha)} = C_3 = \text{const}. \quad (5.60)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (5.1) при условии (5.19) имеет пять инвариантных соотношений: аналитическая неинтегрируемая связь вида (5.7), циклический первый интеграл вида (5.5), (5.6), первый интеграл вида (5.37), а также первый интеграл, выраженный соотношением (5.47) ((5.49)), который является трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа), и, наконец, трансцендентный первый интеграл вида (5.60).

**Теорема 5.1.** Система (5.1) при условиях (5.7), (5.5), (5.6), (5.19) обладает пятью инвариантными соотношениями (полным набором), три из которых являются трансцендентными

функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом, по крайней мере, четыре из пяти соотношений выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

**2.3. Топологические аналогии.** Покажем, что существует еще одна механическая и топологическая аналогия.

**Теорема 5.2.** *Первый интеграл (5.37) системы (5.1) при условиях (5.7), (5.5), (5.6), (5.19) постоянен на фазовых траекториях системы (4.22), (4.23).*

**Доказательство.** Действительно, первый интеграл (5.37) может быть получен заменой координат через соотношение (5.36), а первый интеграл (4.32) может быть получен заменой координат через соотношение (4.31). Но соотношения (5.36) и (4.31) совпадают. Теорема доказана.  $\square$

Таким образом, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).

2) Движение закрепленного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).

3) Вращение твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

### § 3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**3.1. Введение зависимости от угловой скорости и приведенная система.** Глава 5 продолжает изучать динамику трехмерного твердого тела в трехмерном пространстве. Данный параграф (подобно аналогичному параграфу предыдущей главы) посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости. Поэтому введем такую же зависимость аналогичным образом.

Напомним также, что данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть  $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N})$  — координаты точки  $N$  воздействия неконсервативной силы (воздействия среды) на двумерный диск,  $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$  — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций  $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}) = (x_N, y_N, z_N)$  от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [30, 31, 45, 46, 48, 81–90, 112, 113, 151, 186, 207, 209, 253, 254, 265, 278–280].

Возьмем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \quad (5.61)$$

где  $R = (R_1, R_2, R_3)$  — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции  $R$  от угловой скорости — гироскопическая (см. также предыдущую главу):

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

Здесь  $(h_1, h_2, h_3)$  — по-прежнему некоторые положительные параметры (ср. с [326, 334, 335, 349, 415]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку  $x_{1N} = x_N \equiv 0$ , то

$$x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1 \frac{\Omega_3}{v}, \quad x_{3N} = z_N = Q_3 + h_1 \frac{\Omega_2}{v}. \quad (5.63)$$

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183]

$$Q_2 = A \sin \alpha \cos \beta_1, \quad Q_3 = A \sin \alpha \sin \beta_1, \quad A > 0, \quad (5.64)$$

возьмем динамические функции  $s$ ,  $y_N$  и  $z_N$  следующего вида:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \quad B > 0, \\ y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) &= A \sin \alpha \cos \beta_1 - h \frac{\Omega_3}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 + h \frac{\Omega_2}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (5.65)$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент

неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости). Причем  $h_2 = h_3$  в силу динамической симметрии тела.

Тогда, в силу условий (5.7), (5.65), преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5.14)–(5.18)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_2 \cos^2 \alpha, \\ Z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1) Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_2^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= (1 + bH_1) Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_1 Z_2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1) Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) &= \\ &= -b(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - bH_1 Z_2 \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

здесь, как и выше, безразмерные параметры  $b$ ,  $H_1$  и постоянную  $n_1$  выбираем следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh}{I_2 n_0}, \quad n_1 = n_0. \quad (5.69)$$

Видно, что в системе пятого порядка (5.66)–(5.68) выделилась независимая подсистема четвертого порядка (5.67), (5.68), которую, как будет показано далее, можно рассматривать на касательном расслоении  $TS^2$  к двумерной сфере  $S^2$ . При этом образовалась независимая система третьего порядка (5.67) на своем трехмерном многообразии.

**3.2. Полный список первых интегралов.** От системы (5.66)–(5.68) отделилась независимая система четвертого порядка (5.67), (5.68).

Заметим, что, в силу (5.7), значение скорости центра масс является первым интегралом системы (5.1), а именно, функция

фазовых переменных (5.25) постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины  $z_1, z_2$  выбираются из (5.11)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при  $v \neq 0$ ), у системы (5.66)–(5.68) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\begin{aligned}\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = \\ = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + Z_2^2) - 2bZ_2 \sin \alpha) = V_C^2\end{aligned}\quad (5.70)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (5.70) позволяет, не решая системы (5.66)–(5.68), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра  $D$  диска) от других фазовых переменных, и следовательно, при  $V_C \neq 0$  выполнено равенство (5.27).

Поскольку фазовое пространство системы (5.66)–(5.68) пятимерно, а в нем существуют асимптотические предельные множества, то равенство (5.70) определяет единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (5.66)–(5.68) во всем фазовом пространстве (ср. с [22, 23, 42, 77, 96, 98, 127, 135–138, 165, 176, 217]).

Разберем подробнее вопрос существования других (дополнительных) первых интегралов системы (5.66)–(5.68). Ее фазовое пространство расслаивается на поверхности (5.28), динамика на которых определяется с помощью первых интегралов системы (5.67), (5.68).

Сначала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (5.67) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dZ_2}{d\alpha} = \\ = \frac{R_2(\alpha, Z_1, Z_2)}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_2 \cos^2 \alpha}, \\ \frac{dZ_1}{d\alpha} = \\ = \frac{R_1(\alpha, Z_1, Z_2)}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_2 \cos^2 \alpha},\end{aligned}\quad (5.71)$$

$$R_2(\alpha, Z_1, Z_2) = \sin \alpha \cos \alpha + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha -$$

$$-(1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bH_1 Z_2^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha,$$

$$\begin{aligned} R_1(\alpha, Z_1, Z_2) &= bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ (1 + bH_1)Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bH_1 Z_1 Z_2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Используя замену  $\tau = \sin \alpha$ , перепишем систему (5.71) в алгебраическом виде:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_2}{d\tau} &= \\ &= \frac{\tau + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_2\tau^2 - (1 + bH_1)Z_1^2/\tau + bH_1 Z_2^2\tau - H_1 Z_2}{-Z_2 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) - bH_1 Z_2(1 - \tau^2)}, \\ \frac{dZ_1}{d\tau} &= \\ &= \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_1\tau^2 + (1 + bH_1)Z_1 Z_2/\tau + bH_1 Z_1 Z_2\tau - H_1 Z_1}{-Z_2 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) - bH_1 Z_2(1 - \tau^2)}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$Z_k = u_k \tau, \quad k = 1, 2, \quad (5.73)$$

приводим систему (5.72) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \\ &= \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - (1 + bH_1)u_1^2 - H_1 u_2 + bH_1 u_2^2\tau^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \\ &= \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + (1 + bH_1)u_1 u_2 - H_1 u_1 + bH_1 u_1 u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}, \end{aligned} \quad (5.74)$$



что эквивалентно

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1u_2(1 - \tau^2)}, \quad (5.75)$$

$$\tau \frac{du_1}{d\tau} = \frac{2(1 + bH_1)u_1u_2 - (b + H_1)u_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1u_2(1 - \tau^2)}.$$

Сопоставим системе второго порядка (5.75) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{2(1 + bH_1)u_1u_2 - (b + H_1)u_1}, \quad (5.76)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1 + bH_1)u_2^2 + (1 + bH_1)u_1^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \quad (5.77)$$

Следовательно, уравнение (5.76) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1 + bH_1)u_2^2 + (1 + bH_1)u_1^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (5.78)$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + bH_1)Z_2^2 + (1 + bH_1)Z_1^2 - (b + H_1)Z_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{Z_1 \sin \alpha} = \\ & = C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

**Замечание 5.3.** Рассмотрим систему (5.67) с переменной диссипацией с нулевым средним [175, 176, 178, 179, 247, 264, 266, 269, 286–290, 295, 299, 313, 328, 337, 344, 406, 413, 426–430, 434, 435, 443], которая становится консервативной при  $b = H_1$ :

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - b^2 Z_2 \cos^2 \alpha, \\ Z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + b^2)Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\ & - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + b^2 Z_2^2 \sin \alpha \cos \alpha - bZ_2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= (1 + b^2)Z_1Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ & + b^2 Z_1Z_2 \sin \alpha \cos \alpha - bZ_1 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b^2)(Z_2^2 + Z_1^2) - 2bZ_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (5.81)$$

$$Z_1 \sin \alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (5.82)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (5.81), (5.82) также является первым интегралом системы (5.3). Но при  $b \neq H_1$  каждая из функций

$$(1 + bH_1)(Z_2^2 + Z_1^2) - (b + H_1)Z_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha \quad (5.83)$$

и (5.82) по отдельности не является первым интегралом системы (5.67). Однако отношение функций (5.83), (5.82) является первым интегралом системы (5.67) при любых  $b, H_1$ .

Далее, найдем дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (5.67). Для этого сначала преобразуем инвариантное соотношение (5.78) при  $u_1 \neq 0$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 = \\ = \frac{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + bH_1)^2}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geq 0 \quad (5.85)$$

и фазовое пространство системы (5.67) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (5.84).

Таким образом, в силу соотношения (5.78), первое уравнение системы (5.75) примет вид

$$\begin{aligned} \tau \frac{du_2}{d\tau} = \\ = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1 - \tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2) - bH_1u_2(1 - \tau^2)}, \end{aligned} \quad (5.86)$$

где

$$\begin{aligned} U_1(C_1, u_2) = \\ = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1)(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2)} \right\}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

и постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (5.85), или вид уравнения Бернулли:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{du_2} = \\ = \frac{(b - (1 + bH_1)u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2 - H_1u_2)}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Уравнение (5.88) (при помощи (5.87)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{du_2} = \\ = \frac{2((1 + bH_1)u_2 - b)p + 2b(1 - H_1u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2))}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}, \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$p = \frac{1}{\tau^2}.$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (5.89) зависит от произвольной постоянной  $C_2$ . Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (5.89), даже в частном случае

$$|b - H_1| = 2, \quad C_1 = \frac{1 - A_1^4}{1 + A_1^4}, \quad A_1 = \frac{1}{2}(b + H_1)$$

имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} p = p_0(u_2) = \\ = C[1 - A_1u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1u_2)^2 \mp C_1}} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times \\ \times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1 + A_1^4)A_1(A_1u_2 - 1)}, \quad C = \text{const}. \end{aligned} \quad (5.90)$$

**Замечание 5.4.** В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (5.78).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$K_1 \left( \sin \alpha, Z_2, Z_1, \frac{Z_2}{\sin \alpha}, \frac{Z_1}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (5.91)$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (5.67), (5.68) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (5.68).

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_1}{d\tau} &= \\ &= \frac{(1 + bH_1)u_1}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2 + u_2^2) + b\tau(1 - \tau^2) - bH_1\tau u_2(1 - \tau^2)}, \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau} &= \\ &= \frac{2(1 + bH_1)u_1u_2 - (b + H_1)u_1}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2 + u_2^2) + b\tau(1 - \tau^2) - bH_1\tau u_2(1 - \tau^2)}, \end{aligned} \quad (5.93)$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta_1} = 2u_2 - \frac{b + H_1}{1 + bH_1}. \quad (5.94)$$

Очевидно, что при  $u_1 \neq 0$  выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2(1 + bH_1)} \left( (b + H_1) \pm \sqrt{b_1^2 - (2(1 + bH_1)u_1 - C_1)^2} \right), \quad (5.95)$$

$$b_1^2 = (b - H_1)^2 + C_1^2 - 4,$$

тогда интегрирование квадратуры

$$\beta_1 + \text{const} = \pm(1 + bH_1) \int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - (2(1 + bH_1)u_1 - C_1)^2}} \quad (5.96)$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm \arcsin \frac{2(1 + bH_1)u_1 - C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \text{const}. \quad (5.97)$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2(1 + bH_1)u_1 - C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}} \quad (5.98)$$

или, при переходе к старым переменным,

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2(1 + bH_1)Z_1 - C_1 \sin \alpha}{\sqrt{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \sin \alpha}}. \quad (5.99)$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, «привязывающего» уравнение (5.68), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому, что в последнем выражении формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (5.78).

Но мы проведем некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (5.78)):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] &= \\ &= \frac{((1 + bH_1)u_1^2 - (1 + bH_1)u_2^2 + (b + H_1)u_2 - 1)^2}{u_1^2(2(1 + bH_1)u_2 - (b + H_1))^2}. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] &= \\ &= \frac{((1 + bH_1)Z_1^2 - (1 + bH_1)Z_2^2 + (b + H_1)Z_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha)^2}{Z_1^2(2(1 + bH_1)Z_2 - (b + H_1) \sin \alpha)^2}, \end{aligned} \quad (5.101)$$

или, окончательно,

$$\begin{aligned} &-\beta_1 \pm \frac{1}{2} \times \\ &\times \operatorname{arctg} \frac{(1 + bH_1)Z_1^2 - (1 + bH_1)Z_2^2 + (b + H_1)Z_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{Z_1(2(1 + bH_1)Z_2 - (b + H_1) \sin \alpha)} = \\ &= C_3 = \text{const}. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (5.1) при условии (5.65) имеет пять инвариантных соотношений: аналитическая неинтегрируемая связь вида (5.7), циклический первый интеграл вида (5.5), (5.6), первый интеграл вида (5.79), а также первый интеграл, выраженный

соотношениями (5.89) ((5.91)), который является трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа), и, наконец, трансцендентный первый интеграл вида (5.102).

**Теорема 5.3.** Система (5.1) при условиях (5.7), (5.5), (5.6), (5.65) обладает пятью инвариантными соотношениями (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом, по крайней мере, четыре из пяти соотношений выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

**3.3. Топологические аналогии.** Покажем, что существует еще одна механическая и топологическая аналогия.

**Теорема 5.4.** Первый интеграл (5.79) системы (5.1) при условиях (5.7), (5.5), (5.6), (5.65) постоянен на фазовых траекториях системы (4.74), (4.75).

**Доказательство.** Действительно, первый интеграл (5.79) может быть получен заменой координат через соотношение (5.78), а первый интеграл (4.84) может быть получен заменой координат через соотношение (4.83). Но соотношения (5.78) и (4.83) совпадают. Теорема доказана.  $\square$

Таким образом, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).

2) Движение закрепленного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).

3) Вращение твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

## Глава 6

## СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. I

В данной главе систематизируются как некоторые опубликованные ранее, так и полученные новые результаты по исследованию уравнений движения осесимметричного четырехмерного ( $4D$ -) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твердых тел меньшей размерности, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила и заставляет величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной в течение всего времени движения, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи (см. также [1, 49, 51, 88, 111–113, 139, 146–149, 186, 188, 195, 202, 241, 246, 350, 373, 374, 412]).

Ранее в [146–149] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [197, 200, 206, 208, 212–213, 222, 236, 245] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной главе полученные ранее и в настоящее время результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости.

Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

## § 1. Некоторые общие рассуждения

**1.1. Два случая динамической симметрии четырехмерного тела.** Пусть четырехмерное твердое тело  $\Theta$  массы  $m$  с гладкой трехмерной границей  $\partial\Theta$  находится под воздействием некоторого неконсервативного поля сил (а именно, это можно интерпретировать как движение тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерную область евклидова пространства  $\mathbf{E}^4$ ). Предположим, что оно является динамически симметричным, при этом имеются две логические возможности представления его тензора инерции в случае наличия двух независимых равенств главных моментов инерции: либо в некоторой связанной с телом системе координат  $Dx_1x_2x_3x_4$  оператор инерции имеет вид

$$\text{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}, \quad (6.1)$$

либо вид

$$\text{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\}. \quad (6.2)$$

В первом случае в гиперплоскости  $Dx_2x_3x_4$  тело динамически симметрично, а во втором — двумерные плоскости  $Dx_1x_2$  и  $Dx_3x_4$  являются плоскостями динамической симметрии тела.

**1.2. Динамика на  $\text{so}(4)$  и  $\mathbf{R}^4$ .** Конфигурационным пространством свободного  $n$ -мерного твердого тела является прямое произведение пространства  $\mathbf{R}^n$  (определяющего координаты центра масс тела) на группу его вращений  $\text{SO}(n)$  (определяющую вращение тела вокруг центра масс)

$$\mathbf{R}^n \times \text{SO}(n), \quad (6.3)$$

которое имеет размерность

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Соответственно, и динамическая часть уравнений движения имеет такую же размерность, а размерность фазового пространства равна

$$n(n+1).$$

В частности, если  $\Omega$  — тензор угловой скорости четырехмерного твердого тела (а он является терзором второго ранга [43,



47, 53–56, 58–60, 64–66, 76, 77, 123, 171–176]),  $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$ , то *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$* , имеет следующий вид [174, 176, 180]:

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \quad (6.4)$$

где

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}, \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{2}, & \lambda_2 &= \frac{I_1 - I_2 + I_3 + I_4}{2}, \\ \lambda_3 &= \frac{I_1 + I_2 - I_3 + I_4}{2}, & \lambda_4 &= \frac{I_1 + I_2 + I_3 - I_4}{2}, \end{aligned}$$

$M = M_F$  — момент внешних сил  $\mathbf{F}$ , действующих на тело в  $\mathbf{R}^4$ , спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$ ,  $[\cdot, \cdot]$  — коммутатор в  $\mathfrak{so}(4)$ . Кососимметрическую матрицу (соответствующую данному тензору второго ранга)  $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$  будем представлять в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$  — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$ .

При этом, очевидно, выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i \quad (6.7)$$

для любых  $i, j = 1, \dots, 4$ .

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathfrak{so}(4), \quad (6.8)$$

переводящее пару векторов

$$(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \quad (6.9)$$

из  $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$  в некоторый элемент из алгебры Ли  $\mathfrak{so}(4)$ , где

$$\mathbf{DN} = \{0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}\}, \quad \mathbf{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}, \quad (6.10)$$

$\mathbf{F}$  — внешняя сила, действующая на тело. При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Тогда правая часть системы (6.4) примет вид

$$M = \{x_{3N}F_4 - x_{4N}F_3, x_{4N}F_2 - x_{2N}F_4, -x_{4N}F_1, x_{2N}F_3 - x_{3N}F_2, x_{3N}F_1, -x_{2N}F_1\}. \quad (6.12)$$

Исследуемые в дальнейших главах динамические системы, вообще говоря, неконсервативны и являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним [175, 176, 178, 179, 247, 264, 266, 269, 286–290, 295, 299, 313, 328, 337, 344, 406, 413, 426–430, 434, 435, 443]. При этом нам потребуется практически напрямую исследовать часть основного уравнения динамики, а именно, в данном случае уравнение Ньютона. Здесь оно предстает перед нами как уравнение движения центра масс — *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает пространству  $\mathbf{R}^4$* :

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \quad (6.13)$$

где  $\mathbf{w}_C$  — ускорение центра масс  $C$  тела,  $m$  — его масса, при этом по многомерной формуле Ривальса (которую в данном случае несложно вывести операторным методом) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2 \mathbf{D} \mathbf{C} + E \mathbf{D} \mathbf{C}, \quad \mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega \mathbf{v}_D, \quad E = \dot{\Omega}, \quad (6.14)$$

здесь  $\mathbf{w}_D$  — ускорение точки  $D$ ,  $\mathbf{F}$  — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае  $\mathbf{F} = \mathbf{S}$ ),  $E$  — тензор углового ускорения (тензор второго ранга).

Следовательно, система уравнений (6.4), (6.13) десятого порядка на многообразии  $\mathbf{R}^4 \times \mathfrak{so}(4)$  определяет *замкнутую* систему динамических уравнений движения свободного четырехмерного твердого тела под действием внешней силы  $\mathbf{F}$ , если данная система отделяется от кинематической части уравнений движения на многообразии (6.3) и может быть исследована самостоятельно.

## § 2. Более общая задача о движении со следящей силой

Рассмотрим движение однородного динамически симметричного (случай (6.1)) твердого тела с «передним торцом» (трехмерным диском, взаимодействующим со средой, заполняющей четырехмерное пространство) в поле силы  $\mathbf{S}$  сопротивления в условиях квазистационарности [26, 75, 86–90, 105, 111–113, 142–151, 153, 169, 170, 182, 183].

Пусть  $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки  $D$  твердого тела ( $D$  — центр трехмерного диска, лежащий на оси симметрии тела),

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

— тензор угловой скорости тела,  $Dx_1x_2x_3x_4$  — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии  $CD$  совпадает с осью  $Dx_1$  ( $C$  — центр масс), а оси  $Dx_2, Dx_3, Dx_4$  лежат в гиперплоскости диска,  $I_1, I_2, I_3 = I_2, I_4 = I_2, m$  — инерционно-массовые характеристики.

Сделаем следующие разложения в проекциях на оси системы координат  $Dx_1x_2x_3x_4$ :

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, 0, 0\},$$

$$\mathbf{v}_D = \{v \cos \alpha, v \sin \alpha \cos \beta_1, v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2\}. \quad (6.15)$$

При этом в случае (6.1) также будет справедливо разложение для функции воздействия среды на четырехмерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, 0, 0\}, \quad (6.16)$$

т.е. в данном случае  $\mathbf{F} = \mathbf{S}$ .

Тогда та часть динамических уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [182, 183], см. далее), которые описывают движение центра масс и соответствуют пространству  $\mathbf{R}^4$ , при котором касательные силы воздействия среды на трехмерный диск отсутствуют, примет вид:

$$\dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \omega_6 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_5 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 -$$

$$-\omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \sigma(\omega_6^2 + \omega_5^2 + \omega_3^2) = -\frac{S}{m}, \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \\ & + \omega_6 v \cos \alpha - \omega_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \\ & - \sigma(\omega_4 \omega_5 + \omega_2 \omega_3) - \sigma \dot{\omega}_6 = 0, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \\ & - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_5 v \cos \alpha + \omega_4 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \\ & - \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \sigma(-\omega_1 \omega_2 + \omega_4 \omega_6) + \sigma \dot{\omega}_5 = 0, \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \\ & + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_3 v \cos \alpha - \omega_2 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \\ & + \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \sigma(\omega_2 \omega_6 + \omega_1 \omega_5) - \sigma \dot{\omega}_3 = 0, \end{aligned} \quad (6.20)$$

где

$$S = s(\alpha)v^2, \quad \sigma = CD, \quad v > 0. \quad (6.21)$$

Далее, вспомогательная матрица (6.11) для вычисления момента силы сопротивления примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ -S & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

тогда та часть динамических уравнений движения тела, которые описывают движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$ , примет вид:

$$(\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3 \omega_5 + \omega_2 \omega_4) = 0, \quad (6.23)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3 \omega_6 - \omega_1 \omega_4) = 0, \quad (6.24)$$

$$(\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2 \omega_6 + \omega_1 \omega_5) = x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (6.25)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5 \omega_6 + \omega_1 \omega_2) = 0, \quad (6.26)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4 \omega_6 - \omega_1 \omega_3) = -x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (6.27)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2. \quad (6.28)$$

Таким образом, фазовым пространством системы (6.17)–(6.20), (6.23)–(6.28) десятого порядка является прямое произведение четырехмерного многообразия на алгебру Ли  $\mathfrak{so}(4)$ :

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^3 \times \mathfrak{so}(4). \quad (6.29)$$

Сразу же заметим, что система (6.17)–(6.20), (6.23)–(6.28), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3 = I_4, \quad (6.30)$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0 = \text{const}, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0 = \text{const}, \quad \omega_4 \equiv \omega_4^0 = \text{const}. \quad (6.31)$$

В дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \quad (6.32)$$

Если рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , лежащей на прямой  $CD = Dx_1$  и обеспечивающей в течение всего времени движения выполнение равенства (см. также [146–149])

$$v \equiv \text{const}, \quad (6.33)$$

то в системе (6.17)–(6.20), (6.23)–(6.28) вместо  $F_1$  будет стоять величина

$$T - s(\alpha)v^2, \quad \sigma = DC. \quad (6.34)$$

В результате соответствующего выбора величины  $T$  следящей силы можно формально добиться выполнения равенства (6.33) в течение всего времени движения. Действительно, выражая величину  $T$  формально, в силу системы (6.17)–(6.20), (6.23)–(6.28), получим при  $\cos \alpha \neq 0$ :

$$\begin{aligned} T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega) = m\sigma(\omega_3^2 + \omega_5^2 + \omega_6^2) + \\ + s(\alpha)v^2 \left[ 1 - \frac{m\sigma \sin \alpha}{2I_2 \cos \alpha} \Gamma_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.35)$$

где

$$\Gamma_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) = x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \sin \beta_2 +$$

$$+x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \sin \beta_1 \cos \beta_2 + x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_1. \quad (6.36)$$

При получении равенства (6.35) используются условия (6.31)–(6.33).

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при наличии в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (6.33). Во-вторых, на это можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (6.17)–(6.20), (6.23)–(6.28) в результате преобразований порождает независимую систему шестого порядка следующего вида:

$$\dot{\alpha}v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \omega_6 v \cos \alpha - \sigma \dot{\omega}_6 = 0, \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\alpha}v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \\ & - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_5 v \cos \alpha + \sigma \dot{\omega}_5 = 0, \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\alpha}v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \\ & + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_3 v \cos \alpha - \sigma \dot{\omega}_3 = 0, \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$2I_2 \dot{\omega}_3 = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \quad (6.40)$$

$$2I_2 \dot{\omega}_5 = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \quad (6.41)$$

$$2I_2 \dot{\omega}_6 = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \quad (6.42)$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр  $v$ .

Система (6.37)–(6.42) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} & \dot{\alpha}v \cos \alpha + v \cos \alpha [\omega_6 \cos \beta_1 - \omega_5 \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_3 \sin \beta_1 \sin \beta_2] + \\ & + \sigma [-\dot{\omega}_6 \cos \beta_1 + \dot{\omega}_5 \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \dot{\omega}_3 \sin \beta_1 \sin \beta_2] = 0, \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\beta}_1 v \sin \alpha - v \cos \alpha [\omega_5 \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 \sin \beta_1 - \omega_3 \cos \beta_1 \sin \beta_2] + \\ & + \sigma [\dot{\omega}_5 \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\omega}_6 \sin \beta_1 - \dot{\omega}_3 \cos \beta_1 \sin \beta_2] = 0, \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 + v \cos \alpha [\omega_3 \cos \beta_2 + \omega_5 \sin \beta_2] + \\ + \sigma [-\dot{\omega}_3 \cos \beta_2 - \dot{\omega}_5 \sin \beta_2] = 0, \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{v^2}{2I_2} x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (6.46)$$

$$\dot{\omega}_5 = -\frac{v^2}{2I_2} x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (6.47)$$

$$\dot{\omega}_6 = \frac{v^2}{2I_2} x_{2N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \quad (6.48)$$

Введем новые квазискорости в системе. Для этого преобразуем величины  $\omega_3$ ,  $\omega_5$ ,  $\omega_6$  посредством композиции двух поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = T_1(-\beta_1) \circ T_3(-\beta_2) \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix}, \quad (6.49)$$

где

$$\begin{aligned} T_1(\beta_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ 0 & \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{pmatrix}, \\ T_3(\beta_2) &= \begin{pmatrix} \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 & 0 \\ \sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Таким образом, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3 \cos \beta_2 + \omega_5 \sin \beta_2, \\ z_2 &= -\omega_3 \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \omega_5 \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 \sin \beta_1, \\ z_3 &= \omega_3 \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_5 \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Как видно из (6.43)–(6.48), на многообразии

$$\begin{aligned} O_1 = \\ = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6) \in \mathbf{R}^6 : \alpha = \frac{\pi}{2}k, \beta_1 = \pi l, k, l \in \mathbf{Z} \right\} \end{aligned} \quad (6.52)$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}_1$ ,  $\dot{\beta}_2$ . Таким образом, формально, на многообразии (6.52) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при  $k$  четном и любом  $l$  неопределенность возникает по причине вырождения

сферических координат  $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ , а при  $k$  нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (6.43) вырождается.

Из этого следует, что система (6.43)–(6.48) вне и только вне многообразия (6.52) эквивалентна системе

$$\dot{\alpha} = -z_3 + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \Gamma_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = & \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \Gamma_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) - \\ & -(z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_2 \Delta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) + \\ & + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_1 \Theta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \end{aligned} \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & -\frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \Delta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) + z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ & + z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_3 \Delta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) - \\ & - \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} z_1 \Theta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \Theta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) + z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\ & - z_1 z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_3 \Theta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) + \\ & + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} z_2 \Theta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (6.57)$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \Theta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (6.58)$$



где

$$\begin{aligned}\Delta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \\ &+ x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_1 \cos \beta_2 - x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \sin \beta_1,\end{aligned}\quad (6.59)$$

$$\begin{aligned}\Theta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_2 - \\ &- x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \sin \beta_2,\end{aligned}\quad (6.60)$$

а функция  $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$  представляется в виде (6.36).

Здесь и далее зависимость от групп переменных

$$(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$$

понимается как сложная зависимость от

$$(\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1/v, z_2/v, z_3/v)$$

в силу (6.51).

Нарушение теоремы единственности для системы (6.43)–(6.48) на многообразии (6.52) при нечетном  $k$  происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (6.52) при нечетном  $k$  проходит неособая фазовая траектория системы (6.43)–(6.48), пересекая многообразие (6.52) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (6.33) необходимо выбрать значение  $T$  при  $\cos \alpha \neq 0$  в виде (6.35).

Пусть

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = L\left(\beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right). \quad (6.61)$$

Заметим, что  $|L| < +\infty$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) \right) \right| < +\infty. \quad (6.62)$$

При  $\alpha = \pi/2$  нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2, \Omega\right) = m\sigma(\omega_3^2 + \omega_5^2 + \omega_6^2) - \frac{m\sigma Lv^2}{2I_2}. \quad (6.63)$$

где значения  $\omega_3, \omega_5, \omega_6$  произвольные.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки  $W$ , необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2, \Omega\right) = \frac{mv^2}{R_0}, \quad (6.64)$$

где  $R_0$  — расстояние  $CW$ .

Равенства (6.35) и (6.64) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы  $T$  для почти всех точек многообразия (6.52), что и доказывает сделанное замечание.

### § 3. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**3.1. Приведенная система.** Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183], возьмем динамические функции  $s, x_{2N}, x_{3N}$  и  $x_{4N}$  следующего вида:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha,$$

$$x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{2N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2) = A \sin \alpha \cos \beta_1,$$

$$x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{3N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = \\ = x_{4N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned}$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов  $\alpha, \beta_1, \beta_2$ ).

При этом функции  $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ ,  $\Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ ,  $\Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ , входящие в систему (6.53)–(6.58), примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= A \sin \alpha, \\ \Delta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &\equiv \Theta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \equiv 0.\end{aligned}\tag{6.66}$$

Тогда, в силу неинтегрируемой связи (6.33), вне и только вне многообразия (6.52) динамическая часть уравнений движения (система (6.53)–(6.58)) примет вид аналитической системы

$$\dot{\alpha} = -z_3 + \frac{\sigma ABv}{2I_2} \sin \alpha, \tag{6.67}$$

$$\dot{z}_3 = \frac{ABv^2}{2I_2} \sin \alpha \cos \alpha - (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \tag{6.68}$$

$$\dot{z}_2 = z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \tag{6.69}$$

$$\dot{z}_1 = z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_1 z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \tag{6.70}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \tag{6.71}$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}. \tag{6.72}$$

Вводя далее безразмерные переменные, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$\begin{aligned}z_k &\mapsto n_0 v z_k, \quad k = 1, 2, 3, \\ n_0^2 &= \frac{AB}{2I_2}, \quad b = \sigma n_0, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle,\end{aligned}\tag{6.73}$$

приведем систему (6.67)–(6.72) к виду

$$\alpha' = -z_3 + b \sin \alpha, \tag{6.74}$$

$$z_3' = \sin \alpha \cos \alpha - (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \tag{6.75}$$

$$z'_2 = z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \quad (6.76)$$

$$z'_1 = z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \quad (6.77)$$

$$\beta'_1 = z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.78)$$

$$\beta'_2 = -z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}. \quad (6.79)$$

Видно, что в системе шестого порядка (6.74)–(6.79), которую, как будет показано далее, можно рассматривать на касательном расслоении  $T\mathbf{S}^3$  к трехмерной сфере  $\mathbf{S}^3$ , образовалась независимая система пятого порядка (6.74)–(6.78) на своем пятимерном многообразии.

Для полного интегрирования системы (6.74)–(6.79) необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z \\ z_* \end{pmatrix}, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1}, \quad (6.80)$$

система (6.74)–(6.79) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -z_3 + b \sin \alpha, \quad (6.81)$$

$$z'_3 = \sin \alpha \cos \alpha - z^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.82)$$

$$z' = z z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.83)$$

$$z'_* = (\pm) z \sqrt{1 + z_*^2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \quad (6.84)$$

$$\beta'_1 = (\pm) \frac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.85)$$

$$\beta'_2 = (\mp) \frac{z}{\sqrt{1 + z_*^2}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}. \quad (6.86)$$

Видно, что система шестого порядка распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (6.81)–(6.83) — третьего, а система (6.84), (6.85) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.81)–(6.86) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.81)–(6.83), один — системы (6.84), (6.85), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (6.86).

При этом заметим, что систему (6.81)–(6.83) можно рассматривать на касательном расслоении  $TS^2$  двумерной сферы  $S^2$ .

### 3.2. Полный список инвариантных соотношений.

Система (6.81)–(6.83) имеет вид системы уравнений (4.22), возникающей в динамике трехмерного (3D-) твердого тела в неконсервативном поле сил (см. главу 4). При этом фазовые переменные  $z_1, z_2$  в системе (4.22) соответствуют фазовым переменным  $z, z_3$  системы (6.81)–(6.83). Но, поскольку данная глава может быть прочтена самостоятельно, повторим некоторые рассуждения главы 4 (в новых обозначениях).

Сначала сопоставим системе третьего порядка (6.81)–(6.83) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dz_3}{d\alpha} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha - z^2 \cos \alpha / \sin \alpha}{-z_3 + b \sin \alpha}, \\ \frac{dz}{d\alpha} &= \frac{zz_3 \cos \alpha / \sin \alpha}{-z_3 + b \sin \alpha}.\end{aligned}\tag{6.87}$$

Используя замену  $\tau = \sin \alpha$ , перепишем систему (6.87) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dz_3}{d\tau} &= \frac{\tau - z^2/\tau}{-z_3 + b\tau}, \\ \frac{dz}{d\tau} &= \frac{zz_3/\tau}{-z_3 + b\tau}.\end{aligned}\tag{6.88}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z = u_1 \tau, \quad z_3 = u_2 \tau,\tag{6.89}$$

приведем систему (6.88) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - u_1^2}{-u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{u_1 u_2}{-u_2 + b},\end{aligned}\tag{6.90}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{-u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1 u_2 - bu_1}{-u_2 + b}.\end{aligned}\tag{6.91}$$

Сопоставим системе второго порядка (6.91) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{2u_1 u_2 - bu_1},\tag{6.92}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0.\tag{6.93}$$

Следовательно, уравнение (6.92) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const},\tag{6.94}$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\frac{z_3^2 + z^2 - bz_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{z \sin \alpha} = C_1 = \text{const}.\tag{6.95}$$

**Замечание 6.1.** Рассмотрим систему (6.81)–(6.83) с переменной диссипацией с нулевым средним [175, 176, 178, 179, 247, 264, 266, 269, 286–290, 295, 299, 313, 328, 337, 344, 406, 413, 426–430, 434, 435, 443], которая становится консервативной при  $b = 0$ :

$$\begin{aligned}\alpha' &= -z_3, \\ z_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - z^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z' &= zz_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.\end{aligned}\tag{6.96}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$z_3^2 + z^2 + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (6.97)$$

$$z \sin \alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (6.98)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (6.97), (6.98) также является первым интегралом системы (6.96). Но при  $b \neq 0$  каждая из функций

$$z_3^2 + z^2 - bz_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha \quad (6.99)$$

и (6.98) по отдельности не является первым интегралом системы (6.81)–(6.83). Однако отношение функций (6.99), (6.98) является первым интегралом системы (6.81)–(6.83) при любом  $b$ .

Далее найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.81)–(6.83). Для этого преобразуем сначала инвариантное соотношение (6.94) при  $u_1 \neq 0$  следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \quad (6.100)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geq 0 \quad (6.101)$$

и фазовое пространство системы (6.81)–(6.83) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (6.100).

Таким образом, в силу соотношения (6.94), первое уравнение системы (6.91) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \quad (6.102)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)} \right\}, \quad (6.103)$$

при этом постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (6.101).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (6.81)–(6.83) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(b - u_2)du_2}{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\}/2}. \quad (6.104)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |\sin \alpha|. \quad (6.105)$$

Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = w_1, \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4, \quad (6.106)$$

то правая часть равенства (6.104) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4w_1^2)}{(b_1^2 - 4w_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}} - b \int \frac{dw_1}{(b_1^2 - 4w_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}} = \\ = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{b}{2} I_1, \end{aligned} \quad (6.107)$$

где

$$I_1 = \int \frac{dw_3}{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}(w_3 \pm C_1)}, \quad w_3 = \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}. \quad (6.108)$$

При вычислении интеграла (6.108) возможны три случая.

**I.**  $b > 2$ .

$$\begin{aligned} I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}} \right| + \text{const}. \end{aligned} \quad (6.109)$$

**II.**  $b < 2$ .

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 w_3 + b_1^2}{b_1(w_3 \pm C_1)} + \text{const}. \quad (6.110)$$



**III.**  $b = 2$ .

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{C_1(w_3 \pm C_1)} + \text{const} . \quad (6.111)$$

Возвращаясь к переменной

$$w_1 = \frac{z_3}{\sin \alpha} - \frac{b}{2}, \quad (6.112)$$

имеем окончательный вид для величины  $I_1$ :

**I.**  $b > 2$ .

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4} \pm 2w_1}{\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}} \right| + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4} \mp 2w_1}{\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}} \right| + \text{const} . \end{aligned} \quad (6.113)$$

**II.**  $b < 2$ .

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} + b_1^2}{b_1 (\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1)} + \text{const} . \quad (6.114)$$

**III.**  $b = 2$ .

$$I_1 = \mp \frac{2w_1}{C_1 (\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1)} + \text{const} . \quad (6.115)$$

Таким образом, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (6.81)–(6.83) — представлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

**Замечание 6.2.** В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (6.94).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln |\sin \alpha| + G_2 \left( \sin \alpha, \frac{z_3}{\sin \alpha}, \frac{z}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const} . \quad (6.116)$$

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка (6.81)–(6.86) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной ее интегрируемости, как указано выше, достаточно найти один первый интеграл, для (потенциально отделившейся) системы (6.84), (6.85), а также дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (6.86).

Для поиска первого интеграла (потенциально отделившейся) системы (6.84), (6.85) сопоставим ей следующее неавтономное уравнение первого порядка:

$$\frac{dz_*}{d\beta_1} = \frac{1 + z_*^2 \cos \beta_1}{z_* \sin \beta_1}. \quad (6.117)$$

Последнее равенство после несложного интегрирования приводит к искомому инвариантному соотношению

$$\frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = \text{const}, \quad (6.118)$$

что в переменных  $z_1, z_2$  переписывается как

$$\frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1 \sin \beta_1} = C_3 = \text{const}. \quad (6.119)$$

Далее для поиска дополнительного первого интеграла, «привязывающего» уравнение (6.86), сопоставим уравнениям (6.86) и (6.84) следующее неавтономное уравнение:

$$\frac{dz_*}{d\beta_2} = -(1 + z_*^2) \cos \beta_1. \quad (6.120)$$

Поскольку, в силу (6.118),

$$C_3 \cos \beta_1 = \pm \sqrt{C_3^2 - 1 - z_*^2}, \quad (6.121)$$

то

$$\frac{dz_*}{d\beta_2} = \mp \frac{1}{C_3} (1 + z_*^2) \sqrt{C_3^2 - 1 - z_*^2}. \quad (6.122)$$

Тогда, интегрируя последнее равенство, приходим к следующей квадратуре:

$$\mp(\beta_2 + C_4) = \int \frac{C_3 dz_*}{(1 + z_*^2) \sqrt{C_3^2 - 1 - z_*^2}}, \quad C_4 = \text{const}. \quad (6.123)$$

Дальнейшее интегрирование приводит к равенству

$$\mp \operatorname{tg}(\beta_2 + C_4) = \frac{C_3 z_*}{\sqrt{C_3^2 - 1 - z_*^2}}, \quad C_4 = \operatorname{const}. \quad (6.124)$$

В переменных  $z_1, z_2$  последнее инвариантное соотношение примет вид

$$\mp \operatorname{tg}(\beta_2 + C_4) = \frac{C_3 z_2}{\sqrt{(C_3^2 - 1)z_1^2 - z_2^2}}, \quad C_4 = \operatorname{const}. \quad (6.125)$$

Окончательно имеем вид дополнительного первого интеграла, «привязывающего» уравнение (6.86):

$$\operatorname{arctg} \frac{C_3 z_*}{\sqrt{C_3^2 - 1 - z_*^2}} \pm \beta_2 = C_4, \quad C_4 = \operatorname{const} \quad (6.126)$$

или

$$\operatorname{arctg} \frac{C_3 z_2}{\sqrt{(C_3^2 - 1)z_1^2 - z_2^2}} \pm \beta_2 = C_4, \quad C_4 = \operatorname{const}. \quad (6.127)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (6.17)–(6.20), (6.23)–(6.28) при условии (6.65) имеет восемь инвариантных соотношений: аналитическая неинтегрируемая связь вида (6.33), циклические первые интегралы вида (6.31), (6.32), первый интеграл вида (6.95), а также первый интеграл, выраженный соотношениями (6.109)–(6.116), который является трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражается через конечную комбинацию элементарных функций, и наконец, трансцендентные первые интегралы вида (6.118) ((6.119)) и (6.126) ((6.127)).

**Теорема 6.1.** Система (6.17)–(6.20), (6.23)–(6.28) при условиях (6.33), (6.65), (6.32) обладает восемью инвариантными соотношениями (полным набором), четыре из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

**3.3. Топологические аналогии.** Рассмотрим следующую систему уравнений пятого порядка:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + b_* \dot{\xi} \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - [\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 \sin^2 \eta_1] \frac{\sin \xi}{\cos \xi} &= 0, \\ \ddot{\eta}_1 + b_* \dot{\eta}_1 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_1 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} - \dot{\eta}_2^2 \sin \eta_1 \cos \eta_1 &= 0, \\ \ddot{\eta}_2 + b_* \dot{\eta}_2 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_2 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2 \frac{\cos \eta_1}{\cos \eta_1} &= 0, \quad b_* > 0,\end{aligned}\tag{6.128}$$

описывающую закрепленный четырехмерный маятник, помещенный в поток набегающей среды при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил [112, 144, 167, 177, 192, 205, 207, 239, 242, 280, 320, 321, 323, 324, 342, 381, 382, 398, 399, 408, 414]. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 6, но фазовая переменная  $\eta_2$  является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка.

Ее фазовым пространством является касательное расслоение

$$T\mathbf{S}^3\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \xi, \eta_1, \eta_2\}\tag{6.129}$$

к трехмерной сфере  $\mathbf{S}^3\{\xi, \eta_1, \eta_2\}$ , при этом уравнение, переводящее систему (6.128) в систему на касательном расслоении к двумерной сфере

$$\dot{\eta}_2 \equiv 0,\tag{6.130}$$

и уравнения больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0, \quad \dot{\eta}_2 \equiv 0\tag{6.131}$$

задают семейства интегральных многообразий.

Нетрудно убедиться, что система (6.128) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (6.129) к трехмерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.2.** Система (6.17)–(6.20), (6.23)–(6.28) при условиях (6.33), (6.65), (6.32) эквивалентна динамической системе (6.128).

Действительно, достаточно положить  $\alpha = \xi$ ,  $\beta_1 = \eta_1$ ,  $\beta_2 = \eta_2$ ,  $b = -b_*$ .

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

#### § 4. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**4.1. Введение зависимости от угловой скорости.** Глава 4 посвящена динамике четырехмерного твердого тела в четырехмерном пространстве. Но, поскольку данный параграф посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций. К тому же данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для многомерных тел.

Пусть  $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$  — координаты точки  $N$  воздействия неконсервативной силы (воздействия среды) на трехмерный диск,  $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Введем зависимость функций  $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$  от тензора угловой скорости лишь в линейной форме, поскольку само данное введение априори не очевидно [30, 31, 45, 46, 48, 81–90, 112, 113, 151, 186, 207, 209, 253, 254, 265, 278–280].

Таким образом, рассмотрим следующую зависимость:

$$x = Q + R, \quad (6.132)$$

где  $R = (R_1, R_2, R_3, R_4)$  — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции  $R$  от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}. \quad (6.133)$$

Здесь  $(h_1, h_2, h_3, h_4)$  — некоторые положительные параметры (ср. с [326, 334, 335, 349, 415]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку  $x_{1N} \equiv 0$ , то

$$\begin{aligned} x_{2N} &= Q_2 - h_1 \frac{\omega_6}{v}, & x_{3N} &= Q_3 + h_1 \frac{\omega_5}{v}, \\ x_{4N} &= Q_4 - h_1 \frac{\omega_3}{v}. \end{aligned} \quad (6.134)$$

**4.2. Приведенная система.** Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183]

$$\begin{aligned} Q_2 &= A \sin \alpha \cos \beta_1, \\ Q_3 &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, \\ Q_4 &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2, \quad A > 0, \end{aligned} \quad (6.135)$$

возьмем динамические функции  $s$ ,  $x_{2N}$ ,  $x_{3N}$  и  $x_{4N}$  следующего вида:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad B > 0,$$

$$\begin{aligned} x_{2N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \cos \beta_1 - h \frac{\omega_6}{v}, \\ h &= h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + h \frac{\omega_5}{v}, \\ h &= h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - h \frac{\omega_3}{v}, \\ h &= h_1 > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (6.136)$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости). Кроме того,  $h_2 = h_3 = h_4$  в силу динамической симметрии тела.

Функции

$$\begin{aligned} \Gamma_v (\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v), \quad \Delta_v (\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v), \\ \Theta_v (\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v), \end{aligned}$$

входящие в систему (6.53)–(6.58), примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= A \sin \alpha - \frac{h}{v} z_3, \\ \Delta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= \frac{h}{v} z_2, \\ \Theta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= -\frac{h}{v} z_1.\end{aligned}\tag{6.137}$$

Тогда, в силу неинтегрируемой связи (6.33), вне и только вне многообразия (6.52) динамическая часть уравнений движения (система (6.53)–(6.58)) примет вид аналитической системы

$$\dot{\alpha} = -\left(1 + \frac{\sigma B h}{2I_2}\right) z_3 + \frac{\sigma A B v}{2I_2} \sin \alpha, \tag{6.138}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= \frac{A B v^2}{2I_2} \sin \alpha \cos \alpha - \\ &- \left(1 + \frac{\sigma B h}{2I_2}\right) (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{B h v}{2I_2} z_3 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{6.139}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \left(1 + \frac{\sigma B h}{2I_2}\right) z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ \left(1 + \frac{\sigma B h}{2I_2}\right) z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \frac{B h v}{2I_2} z_2 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{6.140}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \left(1 + \frac{\sigma B h}{2I_2}\right) z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\ &- \left(1 + \frac{\sigma B h}{2I_2}\right) z_1 z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \frac{B h v}{2I_2} z_1 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{6.141}$$

$$\dot{\beta}_1 = \left(1 + \frac{\sigma B h}{2I_2}\right) z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \tag{6.142}$$

$$\dot{\beta}_2 = -\left(1 + \frac{\sigma B h}{2I_2}\right) z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}. \tag{6.143}$$

Вводя далее безразмерные переменные, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$z_k \mapsto n_0 v z_k, \quad k = 1, 2, 3, \\ n_0^2 = \frac{AB}{2I_2}, \quad b = \sigma n_0, \quad H_1 = \frac{Bh}{2I_2 n_0}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \quad (6.144)$$

приведем систему (6.138)–(6.143) к виду

$$\dot{\alpha} = -(1 + bH_1) z_3 + b \sin \alpha, \quad (6.145)$$

$$\dot{z}_3 = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1) (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 z_3 \cos \alpha, \quad (6.146)$$

$$\dot{z}_2 = (1 + bH_1) z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ + (1 + bH_1) z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - H_1 z_2 \cos \alpha, \quad (6.147)$$

$$\dot{z}_1 = (1 + bH_1) z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\ - (1 + bH_1) z_1 z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - H_1 z_1 \cos \alpha, \quad (6.148)$$

$$\dot{\beta}_1 = (1 + bH_1) z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.149)$$

$$\dot{\beta}_2 = -(1 + bH_1) z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}. \quad (6.150)$$

Видно, что в системе шестого порядка (6.145)–(6.150) которую, как будет показано далее, можно рассматривать на касательном расслоении  $TS^3$  к трехмерной сфере  $S^3$ , образовалась независимая система пятого порядка (6.145)–(6.149) на своем пятимерном многообразии.

Для полного интегрирования системы (6.145)–(6.150) необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z \\ z_* \end{pmatrix}, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = z_2/z_1, \quad (6.151)$$

система (6.145)–(6.150) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -(1 + bH_1) z_3 + b \sin \alpha, \quad (6.152)$$



$$z'_3 = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)z^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 z_3 \cos \alpha, \quad (6.153)$$

$$z' = (1 + bH_1)z z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 z \cos \alpha, \quad (6.154)$$

$$z'_* = (\pm)(1 + bH_1)z \sqrt{1 + z_*^2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \quad (6.155)$$

$$\beta'_1 = (\pm)(1 + bH_1) \frac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.156)$$

$$\beta'_2 = (\mp)(1 + bH_1) \frac{z}{\sqrt{1 + z_*^2}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}. \quad (6.157)$$

Видно, что система шестого порядка распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (6.152)–(6.154) — третьего, а система (6.155), (6.156) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.152)–(6.157) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.152)–(6.154), один — системы (6.155), (6.156) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (6.157).

Заметим, что систему (6.152)–(6.154) можно рассматривать на касательном расслоении  $TS^2$  к двумерной сфере  $S^2$ .

#### 4.3. Полный список инвариантных соотношений.

Система (6.152)–(6.154) имеет вид системы уравнений (4.74), возникающей в динамике трехмерного ( $3D$ -) твердого тела в неконсервативном поле сил (см. главу 4). Фазовые переменные  $z_1, z_2$  в системе (4.74) соответствуют фазовым переменным  $z, z_3$  системы (6.152)–(6.154). Но, поскольку данная глава может быть прочтена самостоятельно, повторим некоторые рассуждения главы 4 (в новых обозначениях).

Сначала сопоставим системе третьего порядка (6.152)–(6.154) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dz_3}{d\alpha} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)z^2 \cos \alpha / \sin \alpha - H_1 z_3 \cos \alpha}{-(1 + bH_1)z_3 + b \sin \alpha}, \\ \frac{dz}{d\alpha} &= \frac{(1 + bH_1)z z_3 \cos \alpha / \sin \alpha - H_1 z \cos \alpha}{-(1 + bH_1)z_3 + b \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (6.158)$$

Используя замену  $\tau = \sin \alpha$ , перепишем систему (6.158) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dz_3}{d\tau} &= \frac{\tau - (1 + bH_1)z^2/\tau - H_1z_3}{-(1 + bH_1)z_3 + b\tau}, \\ \frac{dz}{d\tau} &= \frac{(1 + bH_1)zz_3/\tau - H_1z}{-(1 + bH_1)z_3 + b\tau}.\end{aligned}\quad (6.159)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z = u_1\tau, \quad z_3 = u_2\tau, \quad (6.160)$$

приводим систему (6.159) к виду

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - (1 + bH_1)u_1^2 - H_1u_2}{-(1 + bH_1)u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{(1 + bH_1)u_1u_2 - H_1u_1}{-(1 + bH_1)u_2 + b},\end{aligned}\quad (6.161)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{(1 + bH_1)(u_2^2 - u_1^2) - (b + H_1)u_2 + 1}{-(1 + bH_1)u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1 + bH_1)u_1u_2 - (b + H_1)u_1}{-(1 + bH_1)u_2 + b}.\end{aligned}\quad (6.162)$$

Сопоставим системе второго порядка (6.162) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (1 + bH_1)(u_1^2 - u_2^2) - (b + H_1)u_2}{2(1 + bH_1)u_1u_2 - (b + H_1)u_1}, \quad (6.163)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1 + bH_1)(u_2^2 + u_1^2) - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \quad (6.164)$$

Следовательно, уравнение (6.163) имеет первый интеграл

$$\frac{(1 + bH_1)(u_2^2 + u_1^2) - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (6.165)$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\frac{(1 + bH_1)(z_3^2 + z^2) - (b + H_1)z_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{z \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (6.166)$$

**Замечание 6.3.** Рассмотрим систему (6.152)–(6.154) с переменной диссипацией с нулевым средним [175, 176, 178, 179, 247, 264, 266, 269, 286–290, 295, 299, 313, 328, 337, 344, 406, 413, 426–430, 434, 435, 443], которая становится консервативной при  $b = H_1$ :

$$\begin{aligned}\alpha' &= -(1 + b^2)z_3 + b \sin \alpha, \\ z_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + b^2)z^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - bz_3 \cos \alpha, \\ z' &= (1 + b^2)zz_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - bz \cos \alpha.\end{aligned}\tag{6.167}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b^2)(z_3^2 + z^2) - 2bz_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const},\tag{6.168}$$

$$z \sin \alpha = C_2^* = \text{const}.\tag{6.169}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (6.168), (6.169) также является первым интегралом системы (6.167). Но при  $b \neq H_1$  каждая из функций

$$(1 + bH_1)(z_3^2 + z^2) - (b + H_1)z_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha\tag{6.170}$$

и (6.169) по отдельности не является первым интегралом системы (6.152)–(6.154). Однако отношение функций (6.170), (6.169) является первым интегралом системы (6.152)–(6.154) при любых  $b, H_1$ .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.152)–(6.154). Для этого сначала преобразуем инвариантное соотношение (6.165) при  $u_1 \neq 0$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\left(u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 = \\ = \frac{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + bH_1)^2}.\end{aligned}\tag{6.171}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geq 0\tag{6.172}$$

и фазовое пространство системы (6.152)–(6.154) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (6.171).

Таким образом, в силу соотношения (6.165), первое уравнение системы (6.162) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1+bH_1)u_2^2 - 2(b+H_1)u_2 + 2 - C_1 U_1(C_1, u_2)}{b - (1+bH_1)u_2}, \quad (6.173)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2(1+bH_1)} \{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}, \quad (6.174)$$

$$U_2(C_1, u_2) = \sqrt{C_1^2 - 4(1+bH_1)(1 - (b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2)}$$

и постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (6.172).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (6.152)–(6.154) примет вид

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\tau}{\tau} = \\ & = \int \frac{(b - (1+bH_1)u_2) du_2}{2(1 - (b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2) - \frac{C_1 \{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}}{(2(1+bH_1))}}. \end{aligned} \quad (6.175)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |\sin \alpha|. \quad (6.176)$$

Если

$$u_2 - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)} = w_1, \quad b_1^2 = (b-H_1)^2 + C_1^2 - 4, \quad (6.177)$$

то правая часть равенства (6.175) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4(1+bH_1)w_1^2)}{(b_1^2 - 4(1+bH_1)w_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)w_1^2}} - \\ & -(b-H_1)(1+bH_1) \int \frac{dw_1}{(b_1^2 - 4(1+bH_1)w_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)w_1^2}} = \\ & = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)w_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{b-H_1}{2} I_1, \end{aligned} \quad (6.178)$$

где

$$I_1 = \int \frac{dw_3}{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}(w_3 \pm C_1)}, \quad w_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)w_1^2}. \quad (6.179)$$

При вычислении интеграла (6.179) возможны три случая.

**I.**  $|b - H_1| > 2$ .

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \times \\ & \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \right| + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \times \\ & \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \right| + \text{const.} \end{aligned} \quad (6.180)$$

**II.**  $|b - H_1| < 2$ .

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 w_3 + b_1^2}{b_1(w_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (6.181)$$

**III.**  $|b - H_1| = 2$ .

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{C_1(w_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (6.182)$$

Возвращаясь к переменной

$$w_1 = \frac{z_2}{\sin \alpha} - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}, \quad (6.183)$$

имеем окончательный вид для величины  $I_1$ :

**I.**  $|b - H_1| > 2$ .

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} \pm 2(1+bH_1)w_1}{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2w_1^2 \pm C_1}} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}} \right| + \\
& \quad + \frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}} \times \\
& \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} \mp 2(1+bH_1)w_1}{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2w_1^2 \pm C_1}} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}} \right| + \text{const} .
\end{aligned} \tag{6.184}$$

**II.**  $|b-H_1| < 2$ .

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-(b-H_1)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2w_1^2+b_1^2}}{b_1 \left( \sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2w_1^2 \pm C_1} \right)} + \text{const} . \tag{6.185}$$

**III.**  $|b-H_1| = 2$ .

$$I_1 = \mp \frac{2(1+bH_1)w_1}{C_1 \left( \sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2w_1^2 \pm C_1} \right)} + \text{const} . \tag{6.186}$$

Таким образом, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (6.152)–(6.154), т.е. представлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

**Замечание 6.4.** В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (6.165).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный виду трансцендентного первого интеграла из плоской динамики):

$$\ln |\sin \alpha| + G_2 \left( \sin \alpha, \frac{z_3}{\sin \alpha}, \frac{z}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const} . \tag{6.187}$$

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка (6.152)–(6.157) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной ее интегрируемости, как указано выше, достаточно найти один первый интеграл для (потенциально отделившейся) системы (6.155), (6.156), а также дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (6.157).

Для поиска первого интеграла (потенциально отделившейся) системы (6.155), (6.156) сопоставим ей следующее неавтономное уравнение первого порядка:

$$\frac{dz_*}{d\beta_1} = \frac{1 + z_*^2 \cos \beta_1}{z_* \sin \beta_1}. \quad (6.188)$$

Это равенство после несложного интегрирования приводит к искомому инвариантному соотношению

$$\frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = \text{const}, \quad (6.189)$$

что в переменных  $z_1, z_2$  переписывается как

$$\frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1 \sin \beta_1} = C_3 = \text{const}. \quad (6.190)$$

Далее, для поиска дополнительного первого интеграла, «привязывающего» уравнение (6.157), сопоставим уравнениям (6.157) и (6.155) следующее неавтономное уравнение:

$$\frac{dz_*}{d\beta_2} = -(1 + z_*^2) \cos \beta_1. \quad (6.191)$$

Поскольку, в силу (6.189),

$$C_3 \cos \beta_1 = \pm \sqrt{C_3^2 - 1 - z_*^2}, \quad (6.192)$$

то

$$\frac{dz_*}{d\beta_2} = \mp \frac{1}{C_3} (1 + z_*^2) \sqrt{C_3^2 - 1 - z_*^2}. \quad (6.193)$$

Тогда, интегрируя последнее равенство, получим следующую квадратуру:

$$\mp(\beta_2 + C_4) = \int \frac{C_3 dz_*}{(1 + z_*^2) \sqrt{C_3^2 - 1 - z_*^2}}, \quad C_4 = \text{const}. \quad (6.194)$$

Дальнейшее интегрирование приводит к равенству

$$\mp \text{tg}(\beta_2 + C_4) = \frac{C_3 z_*}{\sqrt{C_3^2 - 1 - z_*^2}}, \quad C_4 = \text{const}. \quad (6.195)$$

В переменных  $z_1, z_2$  последнее инвариантное соотношение примет вид

$$\mp \operatorname{tg}(\beta_2 + C_4) = \frac{C_3 z_2}{\sqrt{(C_3^2 - 1)z_1^2 - z_2^2}}, \quad C_4 = \operatorname{const}. \quad (6.196)$$

Окончательно, дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (6.157), имеет вид

$$\operatorname{arctg} \frac{C_3 z_*}{\sqrt{C_3^2 - 1 - z_*^2}} \pm \beta_2 = C_4, \quad C_4 = \operatorname{const} \quad (6.197)$$

или

$$\operatorname{arctg} \frac{C_3 z_2}{\sqrt{(C_3^2 - 1)z_1^2 - z_2^2}} \pm \beta_2 = C_4, \quad C_4 = \operatorname{const}. \quad (6.198)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (6.17)–(6.20), (6.23)–(6.28) при условии (6.136) имеет восемь инвариантных соотношений: аналитическая неинтегрируемая связь вида (6.33), циклические первые интегралы вида (6.31), (6.32), первый интеграл вида (6.166), а также первый интеграл, выраженный соотношениями (6.180)–(6.187), который является трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражается через конечную комбинацию элементарных функций, и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (6.189) ((6.190)) и (6.197) ((6.198)).

**Теорема 6.3.** Система (6.17)–(6.20), (6.23)–(6.28) при условиях (6.33), (6.136), (6.32) обладает восемью инвариантными соотношениями (полным набором), четыре из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. Все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.



**4.4. Топологические аналогии.** Рассмотрим следующую систему уравнений пятого порядка:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + (b_* - H_{1*})\dot{\xi} \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - [\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 \sin^2 \eta_1] \frac{\sin \xi}{\cos \xi} &= 0, \\ \ddot{\eta}_1 + (b_* - H_{1*})\dot{\eta}_1 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_1 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} - \dot{\eta}_2^2 \sin \eta_1 \cos \eta_1 &= 0, \\ \ddot{\eta}_2 + (b_* - H_{1*})\dot{\eta}_2 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_2 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2 \frac{\cos \eta_1}{\cos \eta_1} &= 0, \\ b_* > 0, \quad H_{1*} > 0, &\end{aligned}\tag{6.199}$$

описывающую закрепленный четырехмерный маятник, помещенный в поток набегающей среды при наличии зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил [112, 144, 167, 177, 192, 205, 207, 239, 242, 280, 320, 321, 323, 324, 342, 381, 382, 398, 399, 408, 414]. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 6, но фазовая переменная  $\eta_2$  является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка.

Ее фазовым пространством является касательное расслоение

$$T\mathbf{S}^3\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \xi, \eta_1, \eta_2\} \tag{6.200}$$

к трехмерной сфере  $\mathbf{S}^3\{\xi, \eta_1, \eta_2\}$ , при этом уравнение, переводящее систему (6.128) в систему на касательном расслоении к двумерной сфере

$$\dot{\eta}_2 \equiv 0, \tag{6.201}$$

и уравнения больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0, \quad \dot{\eta}_2 \equiv 0 \tag{6.202}$$

задают семейства интегральных многообразий.

Нетрудно убедиться, что система (6.199) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (6.200) к трехмерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.4.** Система (6.17)–(6.20), (6.23)–(6.28) при условиях (6.33), (6.136), (6.32) эквивалентна динамической системе (6.199).

Действительно, достаточно положить  $\alpha = \xi$ ,  $\beta_1 = \eta_1$ ,  $\beta_2 = \eta_2$ ,  $b = -b_*$ ,  $H_1 = -H_{1*}$ .

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

## Глава 7

### СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II

В данной главе систематизируются как некоторые опубликованные ранее, так и полученные новые результаты по исследованию уравнений движения осесимметричного четырехмерного ( $4D$ -) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твердых тел меньшей размерности, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно в течение всего времени движения, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил (см. также [1, 49, 51, 88, 111–113, 139, 146–149, 184, 185, 188, 195, 198, 216, 235, 262, 295, 375, 376, 396, 412, 436]).

Ранее в [146–149] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [197, 200, 206, 208, 212–213, 222, 236, 245] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной главе полученные ранее и в настоящее время результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

### § 1. Более общая задача о движении со следящей силой

Рассмотрим движение однородного динамически симметричного (случай (6.1)) твердого тела с «передним торцом» (трехмерным диском, взаимодействующим со средой, заполняющей четырехмерное пространство) в поле силы  $\mathbf{S}$  сопротивления в условиях квазистационарности [26, 75, 86–90, 105, 111–113, 142–151, 153, 169, 170, 182, 183].

Пусть  $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки  $D$  твердого тела ( $D$  — центр трехмерного диска, лежащий на оси симметрии тела),

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

— тензор угловой скорости тела,  $Dx_1x_2x_3x_4$  — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии  $CD$  совпадает с осью  $Dx_1$  ( $C$  — центр масс), а оси  $Dx_2$ ,  $Dx_3$ ,  $Dx_4$  лежат в гиперплоскости диска,  $I_1, I_2, I_3 = I_2$ ,  $I_4 = I_2$ ,  $m$  — инерционно-массовые характеристики.

Возьмем следующие разложения в проекциях на оси системы координат  $Dx_1x_2x_3x_4$ :

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, 0, 0\},$$

$$\mathbf{v}_D = \{v \cos \alpha, v \sin \alpha \cos \beta_1, v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2\}. \quad (7.1)$$

В случае (6.1) также будет справедливо разложение для функции воздействия среды на четырехмерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, 0, 0\}, \quad (7.2)$$

т.е. в данном случае  $\mathbf{F} = \mathbf{S}$ .

Тогда та часть динамических уравнений движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина [182, 183], см. далее), которые описывают движение центра масс и соответствуют пространству  $\mathbf{R}^4$ , при котором касательные силы воздействия среды на трехмерный диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \omega_6 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_5 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \\ - \omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \sigma(\omega_6^2 + \omega_5^2 + \omega_3^2) = -\frac{S}{m}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \\ + \omega_6 v \cos \alpha - \omega_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \\ - \sigma(\omega_4 \omega_5 + \omega_2 \omega_3) - \sigma \dot{\omega}_6 = 0, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \\ - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_5 v \cos \alpha + \omega_4 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \\ - \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \sigma(-\omega_1 \omega_2 + \omega_4 \omega_6) + \sigma \dot{\omega}_5 = 0, \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \\ + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_3 v \cos \alpha - \omega_2 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \\ + \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \sigma(\omega_2 \omega_6 + \omega_1 \omega_5) - \sigma \dot{\omega}_3 = 0, \end{aligned} \quad (7.6)$$

где

$$S = s(\alpha)v^2, \quad \sigma = CD, \quad v > 0. \quad (7.7)$$

Далее, вспомогательная матрица (6.11) для вычисления момента силы сопротивления примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ -S & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

тогда та часть динамических уравнений движения тела, которые описывают движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$ , примет вид:

$$(\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3 \omega_5 + \omega_2 \omega_4) = 0, \quad (7.9)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = 0, \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = \\ = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = 0, \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = \\ = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = \\ = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Таким образом, фазовым пространством системы (7.3)–(7.6), (7.9)–(7.14) десятого порядка является прямое произведение четырехмерного многообразия на алгебру Ли  $\mathfrak{so}(4)$ :

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^3 \times \mathfrak{so}(4). \quad (7.15)$$

Сразу же заметим, что система (7.3)–(7.6), (7.9)–(7.14), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3 = I_4, \quad (7.16)$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0 = \text{const}, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0 = \text{const}, \quad \omega_4 \equiv \omega_4^0 = \text{const}. \quad (7.17)$$

В дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \quad (7.18)$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , лежащей на прямой  $CD = Dx_1$  и обеспечивающей в течение всего времени движения выполнение равенства ( $\mathbf{V}_C$  — скорость центра масс, см. также [146–149])

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \quad (7.19)$$

то в системе (7.3)–(7.6), (7.9)–(7.14) вместо  $F_x$  должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0, \quad \sigma = DC. \quad (7.20)$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы  $T$  в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (7.21)$$

Случай (7.21) выбора величины  $T$  следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы пятого порядка после некоторого преобразования системы шестого порядка (7.3)–(7.6), (7.9)–(7.14).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину  $T$ :

$$\begin{aligned} T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega) &= \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \leq j}}^4 \tau_{i,j} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega_i \Omega_j = \\ &= T_1 \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \Omega_0 = v. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Введем новые квазискорости в системе. Для этого преобразуем величины  $\omega_3, \omega_5, \omega_6$  посредством композиции двух поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1(-\beta_1) \circ \mathbf{T}_3(-\beta_2) \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1(\beta_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ 0 & \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T}_3(\beta_2) &= \begin{pmatrix} \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 & 0 \\ \sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Таким образом, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3 \cos \beta_2 + \omega_5 \sin \beta_2, \\ z_2 &= -\omega_3 \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \omega_5 \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 \sin \beta_1, \\ z_3 &= \omega_3 \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_5 \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Систему (7.3)–(7.6), (7.9)–(7.14) в случаях (7.16)–(7.18), (7.22) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \cos \alpha - \sigma \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) = \\ = \frac{T_1 \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha) v^2}{m} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} v + z_3 v - \sigma(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \sin \alpha - \\ - \sigma \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) = \\ = \frac{s(\alpha) v^2 - T_1 \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$\dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_2 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{2I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) = 0. \quad (7.28)$$

$$\dot{\beta}_2 \sin \alpha \sin \beta_1 + z_1 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{2I_2} s(\alpha) \cdot \Theta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) = 0. \quad (7.29)$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{v^2}{2I_2} x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (7.30)$$

$$\dot{\omega}_5 = -\frac{v^2}{2I_2} x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (7.31)$$

$$\dot{\omega}_6 = \frac{v^2}{2I_2} x_{2N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \quad (7.32)$$

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$\begin{aligned} z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, 2, 3, \\ \langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const}, \end{aligned} \quad (7.33)$$

приведем систему (7.26)–(7.32) к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \quad (7.34)$$

$$\alpha' = -Z_3 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - \\
& - \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \quad (7.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z'_3 &= \frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - \\
& - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + \\
& + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - Z_3 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \quad (7.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z'_2 &= -\frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\
& + Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_3 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - \\
& - \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - Z_2 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \quad (7.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z'_1 &= \frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \\
& - \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) [Z_3 \sin \beta_1 - Z_2 \cos \beta_1] - \\
& - Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \quad (7.38)
\end{aligned}$$

$$\beta'_1 = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z), \quad (7.39)$$

$$\beta'_2 = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z), \quad (7.40)$$

где

$$\begin{aligned}
\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z) &= -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha + \\
& + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + \\
& + \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \quad (7.41)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \\ &+ x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \sin \beta_1 \cos \beta_2 + x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_1.\end{aligned}\quad (7.42)$$

$$\begin{aligned}\Delta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \\ &+ x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_1 \cos \beta_2 - x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \sin \beta_1,\end{aligned}\quad (7.43)$$

$$\begin{aligned}\Theta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= \\ &= x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_2 - x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \sin \beta_2.\end{aligned}\quad (7.44)$$

Видно, что в системе седьмого порядка (7.34)–(7.40) может быть выделена независимая подсистема шестого порядка (7.35)–(7.40), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем шестимерном фазовом пространстве.

В частности, при выполнении условия (7.21) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы шестого порядка также возможен.

Здесь и далее зависимость от переменных  $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$  понимается как сложная зависимость от  $(\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1/v, z_2/v, z_3/v)$  (и, далее, от  $(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z_1, n_1 Z_2, n_1 Z_3)$ ) в силу (7.25) и (7.33).

## § 2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**2.1. Приведенная система.** Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183], возьмем динамические функции  $s$ ,  $x_{2N}$ ,  $x_{3N}$  и  $x_{4N}$  следующего вида:

$$\begin{aligned}s(\alpha) &= B \cos \alpha, \\ x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= x_{2N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2) = A \sin \alpha \cos \beta_1, \\ x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= x_{3N0}(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2,\end{aligned}\quad (7.45)$$

$$x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{4N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2,$$

$$A, B > 0, \quad v \neq 0,$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов  $\alpha, \beta_1, \beta_2$ ).

При этом функции  $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ ,  $\Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ ,  $\Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ , входящие в систему (7.34)–(7.40), примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= A \sin \alpha, \\ \Delta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &\equiv \Theta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \equiv 0. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Тогда, в силу условий (7.19), (7.45), преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (7.34)–(7.40)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \quad (7.47)$$

$$\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} Z_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= Z_2Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (7.50)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= Z_1Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (7.51)$$

$$\beta_1' = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (7.52)$$

$$\beta_2' = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (7.53)$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбираем, как и выше, безразмерный параметр  $b$  и постоянную  $n_1$  следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{2I_2}, \quad n_1 = n_0. \quad (7.54)$$

Таким образом, система (7.47)–(7.53) может быть рассмотрена на своем фазовом семимерном многообразии

$$W_1 = \mathbf{R}_+^1 \{v\} \times \\ \times T\mathbf{S}^3\{Z_1, Z_2, Z_3, 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 \leq \beta_2 < 2\pi\}, \quad (7.55)$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расщепление к трехмерной сфере  $\mathbf{S}^3\{0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 \leq \beta_2 < 2\pi\}$ .

Видно, что в системе седьмого порядка (7.47)–(7.53) образовалась независимая система шестого порядка (7.48)–(7.53) на своем шестимерном многообразии.

Для полного интегрирования системы (7.47)–(7.53) необходимо, вообще говоря, знать шесть независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Z \\ Z_* \end{pmatrix}, \quad Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}, \quad Z_* = Z_2/Z_1, \quad (7.56)$$

система (7.48)–(7.53) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -Z_3 + b(Z^2 + Z_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad (7.57)$$

$$Z_3' = \sin \alpha \cos \alpha - Z^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_3(Z^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (7.58)$$

$$Z' = ZZ_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ(Z^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (7.59)$$

$$Z_*' = (\pm)Z \sqrt{1 + Z_*^2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \quad (7.60)$$

$$\beta_1' = (\pm) \frac{ZZ_*}{\sqrt{1 + Z_*^2}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (7.61)$$

$$\beta'_2 = (\mp) \frac{Z}{\sqrt{1 + Z_*^2}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}. \quad (7.62)$$

Видно, что система шестого порядка распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (7.57)–(7.59) — третьего, а система (7.60), (7.61) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (7.47), (7.57)–(7.62) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (7.57)–(7.59), один — системы (7.60), (7.61), и два дополнительных первых интеграла, «привязывающих» уравнения (7.62) и (7.47).

Заметим, что систему (7.57)–(7.59) можно рассматривать на касательном расслоении  $TS^2$  двумерной сферы  $S^2$ .

## 2.2. Полный список первых интегралов.

Система (7.57)–(7.59) имеет вид системы уравнений (5.21), возникающей в динамике трехмерного (3D-) твердого тела в неконсервативном поле сил (см. главу 5). При этом фазовые переменные  $Z_1, Z_2$  в системе (5.21) соответствуют фазовым переменным  $Z, Z_3$  системы (7.57)–(7.59). Но, поскольку данная глава может быть прочтена самостоятельно, повторим некоторые рассуждения главы 5 (в новых обозначениях).

Заметим, что, в силу (7.19), значение скорости центра масс является первым интегралом системы (7.26)–(7.32) (при условии (7.21)), и следовательно, функция фазовых переменных

$$\begin{aligned} \Psi_0(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, z_1, z_2, z_3) = \\ = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - 2\sigma z_3 v \sin \alpha = V_C^2 \end{aligned} \quad (7.63)$$

постоянна на ее фазовых траекториях (где величины  $z_1, z_2, z_3$  выбираются в силу (7.25)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при  $v \neq 0$ ), у системы (7.47), (7.57)–(7.62) также существует аналитический интеграл, следовательно, функция фазовых переменных

$$\begin{aligned} \Psi_1(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, Z, Z_*, Z_3) = \\ = v^2(1 + b^2(Z^2 + Z_3^2) - 2bZ_3 \sin \alpha) = V_C^2 \end{aligned} \quad (7.64)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (7.64) позволяет, не решая системы (7.47), (7.57)–(7.62), найти зависимость скорости характерной точки твердого

тела (центра  $D$  диска) от других фазовых переменных, следовательно, при  $V_C \neq 0$  выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z^2 + Z_3^2) - 2bZ_3 \sin \alpha}. \quad (7.65)$$

Поскольку фазовое пространство

$$W_2 = \mathbf{R}_+^1 \{v\} \times \\ \times T\mathbf{S}^3 \{Z, Z_*, Z_3, 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 \leq \beta_2 < 2\pi\} \quad (7.66)$$

системы (7.47), (7.57)–(7.62) семимерно, а в нем существуют асимптотические предельные множества, то равенство (7.64) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (7.47), (7.57)–(7.62) во всем фазовом пространстве (ср. с [22, 23, 42, 77, 96, 98, 127, 135–138, 165, 176, 217]).

Рассмотрим подробнее вопрос существования других (дополнительных) первых интегралов системы (7.47), (7.57)–(7.62). Ее фазовое пространство расслаивается на поверхности

$$\{(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, Z, Z_*, Z_3) \in W_2 : V_C = \text{const}\}, \quad (7.67)$$

динамика на которых определяется с помощью первых интегралов системы (7.47), (7.57)–(7.62).

Сначала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (7.57)–(7.59) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dZ_3}{d\alpha} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha + bZ_3(Z^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha - Z^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{-Z_3 + b(Z^2 + Z_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha}, \\ \frac{dZ}{d\alpha} &= \frac{bZ(Z^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ \sin^2 \alpha \cos \alpha + ZZ_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{-Z_3 + b(Z^2 + Z_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Используя замену  $\tau = \sin \alpha$ , перепишем систему (7.68) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned} \frac{dZ_3}{d\tau} &= \frac{\tau + bZ_3(Z^2 + Z_3^2) - bZ_3\tau^2 - Z^2/\tau}{-Z_3 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z^2 + Z_3^2)}, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= \frac{bZ(Z^2 + Z_3^2) - bZ\tau^2 + ZZ_3/\tau}{-Z_3 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z^2 + Z_3^2)}. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$Z = u_1\tau, \quad Z_3 = u_2\tau, \quad (7.70)$$

приводим систему (7.69) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}, \end{aligned} \quad (7.71)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} \tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Сопоставим системе второго порядка (7.72) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \quad (7.73)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \quad (7.74)$$

Следовательно, уравнение (7.73) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (7.75)$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\frac{Z_3^2 + Z^2 - bZ_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{Z \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (7.76)$$

**Замечание 7.1.** Рассмотрим систему (7.57)–(7.59) с переменной диссипацией с нулевым средним [175, 176, 178, 179, 247, 264, 266, 269, 286–290, 295, 299, 313, 328, 337, 344, 406, 413,

426–430, 434, 435, 443], которая становится консервативной при  $b = 0$ :

$$\begin{aligned}\alpha' &= -Z_3, \\ Z_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - Z^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ Z' &= ZZ_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.\end{aligned}\tag{7.77}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$Z_3^2 + Z^2 + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const},\tag{7.78}$$

$$Z \sin \alpha = C_2^* = \text{const}.\tag{7.79}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (7.78), (7.79) также является первым интегралом системы (7.77). Но при  $b \neq 0$  каждая из функций

$$Z_3^2 + Z^2 - bZ_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha\tag{7.80}$$

и (7.79) по отдельности не является первым интегралом системы (7.57)–(7.59). Однако отношение функций (7.80), (7.79) является первым интегралом системы (7.57)–(7.59) при любом  $b$ .

Далее найдем дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (7.57)–(7.59). Для этого сначала преобразуем инвариантное соотношение (7.75) при  $u_1 \neq 0$  следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1.\tag{7.81}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geq 0,\tag{7.82}$$

и фазовое пространство системы (7.57)–(7.59) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (7.81).

Таким образом, в силу соотношения (7.75), первое уравнение системы (7.72) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1 - \tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)},\tag{7.83}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\} \quad (7.84)$$

и постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (7.82), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}. \quad (7.85)$$

Уравнение (7.85) (при помощи (7.84)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (7.86)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (7.86) зависит от произвольной постоянной  $C_2$ . Полные выкладки здесь приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (7.86), даже в частном случае  $b = C_1 = 2$  имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} p &= p_0(u_2) = \\ &= C \left[ \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2} \pm 1 \right] \exp \left[ \sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}{1 \pm \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}} \right], \quad C = \text{const}. \end{aligned} \quad (7.87)$$

**Замечание 7.2.** В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (7.75).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный виду трансцендентного первого интеграла из плоской динамики):

$$\ln |\sin \alpha| + G_2 \left( \sin \alpha, \frac{z_3}{\sin \alpha}, \frac{z}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (7.88)$$

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка (7.57)–(7.62) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости, как указано выше, достаточно найти один первый интеграл для (потенциально отде-



лившейся) системы (7.60), (7.61), а также дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (7.62).

Для поиска первого интеграла (потенциально отделившейся) системы (7.60), (7.61) сопоставим ей следующее неавтономное уравнение первого порядка:

$$\frac{dZ_*}{d\beta_1} = \frac{1 + Z_*^2 \cos \beta_1}{Z_* \sin \beta_1}. \quad (7.89)$$

Это равенство после несложного интегрирования приводит к искомому инвариантному соотношению

$$\frac{\sqrt{1 + Z_*^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = \text{const}, \quad (7.90)$$

которое в переменных  $Z_1, Z_2$  переписывается как

$$\frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin \beta_1} = C_3 = \text{const}. \quad (7.91)$$

Далее, для поиска дополнительного первого интеграла, «привязывающего» уравнение (7.62), сопоставим уравнениям (7.62) и (7.60) следующее неавтономное уравнение:

$$\frac{dZ_*}{d\beta_2} = -(1 + Z_*^2) \cos \beta_1. \quad (7.92)$$

Поскольку, в силу (7.90),

$$C_3 \cos \beta_1 = \pm \sqrt{C_3^2 - 1 - Z_*^2}, \quad (7.93)$$

то

$$\frac{dZ_*}{d\beta_2} = \mp \frac{1}{C_3} (1 + Z_*^2) \sqrt{C_3^2 - 1 - Z_*^2}. \quad (7.94)$$

Тогда, интегрируя последнее равенство, приходим к следующей квадратуре:

$$\mp(\beta_2 + C_4) = \int \frac{C_3 dZ_*}{(1 + Z_*^2) \sqrt{C_3^2 - 1 - Z_*^2}}, \quad C_4 = \text{const}. \quad (7.95)$$

Дальнейшее интегрирование приводит к равенству

$$\mp \text{tg}(\beta_2 + C_4) = \frac{C_3 Z_*}{\sqrt{C_3^2 - 1 - Z_*^2}}, \quad C_4 = \text{const}. \quad (7.96)$$

В переменных  $Z_1, Z_2$  последнее инвариантное соотношение примет вид

$$\mp \operatorname{tg}(\beta_2 + C_4) = \frac{C_3 Z_2}{\sqrt{(C_3^2 - 1)Z_1^2 - Z_2^2}}, \quad C_4 = \operatorname{const}. \quad (7.97)$$

Окончательно имеем дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (7.62):

$$\operatorname{arctg} \frac{C_3 Z_*}{\sqrt{C_3^2 - 1 - Z_*^2}} \pm \beta_2 = C_4, \quad C_4 = \operatorname{const} \quad (7.98)$$

или

$$\operatorname{arctg} \frac{C_3 Z_2}{\sqrt{(C_3^2 - 1)Z_1^2 - Z_2^2}} \pm \beta_2 = C_4, \quad C_4 = \operatorname{const}. \quad (7.99)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (7.3)–(7.6), (7.9)–(7.14) при условии (7.45) имеет восемь инвариантных соотношений: аналитическая неинтегрируемая связь вида (7.19), соответствующая аналитическому первому интегралу (7.63), циклические первые интегралы вида (7.17), (7.18), первый интеграл вида (7.76), а также первый интеграл, который может быть найден из уравнения (7.86), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа), и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (7.90) ((7.91)) и (7.98) ((7.99)).

**Теорема 7.1.** Система (7.3)–(7.6), (7.9)–(7.14) при условиях (7.19), (7.45), (7.18), (7.17) обладает восемью инвариантными соотношениями (полным набором), четыре из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом, по крайней мере, семь из восьми соотношений выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

**2.3. Топологические аналогии.** Покажем, что существует еще одна механическая и топологическая аналогия.

**Теорема 7.2.** Первый интеграл (7.76) системы (7.3)–(7.6), (7.9)–(7.14) при условиях (7.19), (7.45), (7.18), (7.17) постоянен на фазовых траекториях системы (6.74)–(6.79).

**Доказательство.** Действительно, первый интеграл (7.76) может быть получен заменой координат через соотношение

(7.75), а первый интеграл (6.95) может быть получен заменой координат через соотношение (6.94). Но соотношения (7.75) и (6.94) совпадают. Теорема доказана.  $\square$

Таким образом, имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).

2) Движение закрепленного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).

3) Вращение твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

### § 3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**3.1. Введение зависимости от угловой скорости и приведенная система.** Продолжаем изучать динамику четырехмерного твердого тела в четырехмерном пространстве. Данный параграф (подобно аналогичному параграфу предыдущей главы) посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости. Поэтому введем такую зависимость аналогичным образом. К тому же, данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для многомерных тел.

Пусть  $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$  — координаты точки  $N$  воздействия неконсервативной силы (воздействия среды) на трехмерный диск,  $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций  $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$  от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [30, 31, 45, 46, 48, 81–90, 112, 113, 151, 186, 207, 209, 253, 254, 265, 278–280].

Таким образом, возьмем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \quad (7.100)$$

где  $R = (R_1, R_2, R_3, R_4)$  — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. Здесь зависимость функции  $R$

от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}, \quad (7.101)$$

где  $(h_1, h_2, h_3, h_4)$  — некоторые положительные параметры (ср. [326, 334, 335, 349, 415]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку  $x_{1N} \equiv 0$ , то

$$x_{2N} = Q_2 - h_1 \frac{\omega_6}{v}, \quad x_{3N} = Q_3 + h_1 \frac{\omega_5}{v}, \quad x_{4N} = Q_4 - h_1 \frac{\omega_3}{v}. \quad (7.102)$$

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183]

$$\begin{aligned} Q_2 &= A \sin \alpha \cos \beta_1, \\ Q_3 &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, \\ Q_4 &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2, \quad A > 0, \end{aligned} \quad (7.103)$$

возьмем динамические функции  $s$ ,  $x_{2N}$ ,  $x_{3N}$  и  $x_{4N}$  следующего вида:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \quad B > 0, \\ x_{2N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \cos \beta_1 - h \frac{\omega_6}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + h \frac{\omega_5}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - h \frac{\omega_3}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (7.104)$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости), причем  $h_2 = h_3 = h_4$  в силу динамической симметрии тела.

При этом функции  $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ ,  $\Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ ,  $\Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ , входящие в систему (7.35)–(7.40), примут сле-

дующий вид:

$$\begin{aligned}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= A \sin \alpha - \frac{h}{v} z_3, \\ \Delta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= \frac{h}{v} z_2, \\ \Theta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) &= -\frac{h}{v} z_1.\end{aligned}\tag{7.105}$$

Тогда, в силу условий (7.19), (7.104), преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (7.34)–(7.40)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z),\tag{7.106}$$

$$\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_3 \cos^2 \alpha,\tag{7.107}$$

$$\begin{aligned}Z_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_3^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_3 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{7.108}$$

$$\begin{aligned}Z_2' &= (1 + bH_1)Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_2 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{7.109}$$

$$\begin{aligned}Z_1' &= (1 + bH_1)Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_1 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{7.110}$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},\tag{7.111}$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1)Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1},\tag{7.112}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha +$$

$$+b \sin^2 \alpha \cos \alpha - bH_1 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha;$$

как и выше, безразмерные параметры  $b$ ,  $H_1$  и постоянную  $n_1$  выбираем следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{2I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh}{2I_2 n_0}, \quad n_1 = n_0. \quad (7.113)$$

Следовательно, система (7.106)–(7.112) может быть рассмотрена на своем фазовом семимерном многообразии

$$W_1 = \mathbf{R}_+^1 \{v\} \times \\ \times T\mathbf{S}^3\{Z_1, Z_2, Z_3, 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 \leq \beta_2 < 2\pi\}, \quad (7.114)$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к трехмерной сфере  $\mathbf{S}^3\{0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 \leq \beta_2 < 2\pi\}$ .

Видно, что в системе седьмого порядка (7.106)–(7.112) образовалась независимая система шестого порядка (7.107)–(7.112) на своем шестимерном многообразии.

Для полного интегрирования системы (7.106)–(7.112) необходимо, вообще говоря, знать шесть независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Z \\ Z_* \end{pmatrix}, \quad Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}, \quad Z_* = Z_2/Z_1, \quad (7.115)$$

система (7.107)–(7.112) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_3 + b(Z^2 + Z_3^2) \sin \alpha + \\ &+ b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_3 \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (7.116)$$

$$\begin{aligned} Z_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1) Z^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bZ_3(Z^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_3^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_3 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (7.117)$$

$$\begin{aligned} Z' &= (1 + bH_1) Z Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bZ(Z^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z Z_3 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z \cos \alpha, \end{aligned} \quad (7.118)$$

$$Z_*' = (\pm)(1 + bH_1) Z \sqrt{1 + Z_*^2} \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (7.119)$$

$$\beta'_1 = (\pm)(1 + bH_1) \frac{ZZ_*}{\sqrt{1 + Z_*^2}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (7.120)$$

$$\beta'_2 = (\mp)(1 + bH_1) \frac{Z}{\sqrt{1 + Z_*^2}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}. \quad (7.121)$$

Видно, что система шестого порядка распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (7.116)–(7.118) — третьего, а система (7.119), (7.120) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (7.106), (7.116)–(7.121) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (7.116)–(7.118), один — системы (7.119), (7.120) и два дополнительных первых интеграла, «привязывающих» уравнения (7.121) и (7.106).

Заметим, что систему (7.116)–(7.118) можно рассматривать на касательном расслоении  $TS^2$  двумерной сферы  $S^2$ .

### 3.2. Полный список первых интегралов.

Система (7.116)–(7.118) имеет вид системы уравнений (5.67), возникающей в динамике трехмерного ( $3D$ -) твердого тела в неконсервативном поле сил (см. главу 5). При этом фазовые переменные  $Z_1, Z_2$  в системе (5.67) соответствуют фазовым переменным  $Z, Z_3$  системы (7.116)–(7.118). Но, поскольку данная глава может быть прочтена самостоятельно, повторим некоторые рассуждения главы 5 (в новых обозначениях).

Заметим, что, в силу (7.19), значение скорости центра масс является первым интегралом системы (7.26)–(7.32) (при условии (7.21)), и следовательно, функция фазовых переменных

$$\begin{aligned} \Psi_0(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, z_1, z_2, z_3) = \\ = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - 2\sigma z_3 v \sin \alpha = V_C^2 \end{aligned} \quad (7.122)$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины  $z_1, z_2, z_3$  выбираются в силу (7.25)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при  $v \neq 0$ ), у системы (7.106), (7.116)–(7.121) также существует аналитический интеграл, и следовательно, функция фазовых переменных

$$\begin{aligned} \Psi_1(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, Z, Z_*, Z_3) = \\ = v^2(1 + b^2(Z^2 + Z_*^2) - 2bZ_3 \sin \alpha) = V_C^2 \end{aligned} \quad (7.123)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (7.123) позволяет, не решая системы (7.106), (7.116)–(7.121), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра  $D$  диска) от других фазовых переменных, и следовательно, при  $V_C \neq 0$  выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z^2 + Z_3^2) - 2bZ_3 \sin \alpha}. \quad (7.124)$$

Поскольку фазовое пространство

$$W_2 = \mathbf{R}_+^1 \{v\} \times \times TS^3\{Z, Z_*, Z_3, 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 \leq \beta_2 < 2\pi\} \quad (7.125)$$

системы (7.106), (7.116)–(7.121) семимерно, а в нем существуют асимптотические предельные множества, то равенство (7.123) определяет единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (7.106), (7.116)–(7.121) во всем фазовом пространстве (ср. [22, 23, 42, 77, 96, 98, 127, 135–138, 165, 176, 217]).

Рассмотрим подробнее вопрос существования других (дополнительных) первых интегралов системы (7.106), (7.116)–(7.121). Ее фазовое пространство расслаивается на поверхности

$$\{(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, Z, Z_*, Z_3) \in W_2 : V_C = \text{const}\}, \quad (7.126)$$

динамика на которых определяется с помощью первых интегралов системы (7.106), (7.116)–(7.121).

Сначала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (7.116)–(7.118) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dZ_3}{d\alpha} &= \frac{R_2(\alpha, Z, Z_3)}{-Z_3 + b(Z^2 + Z_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_3 \cos^2 \alpha}, \\ \frac{dZ}{d\alpha} &= \frac{R_1(\alpha, Z, Z_3)}{-Z_3 + b(Z^2 + Z_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_3 \cos^2 \alpha}, \end{aligned} \quad (7.127)$$

$$\begin{aligned} R_2(\alpha, Z, Z_3) &= \sin \alpha \cos \alpha + bZ_3(Z^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \\ &\quad - (1 + bH_1)Z^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bH_1 Z_3^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_3 \cos \alpha, \\ R_1(\alpha, Z, Z_3) &= bZ(Z^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &\quad + (1 + bH_1)Z Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bH_1 Z Z_3 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z \cos \alpha. \end{aligned}$$



Используя замену  $\tau = \sin \alpha$ , перепишем систему (7.127) в алгебраическом виде:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_3}{d\tau} &= \\ &= \frac{\tau + bZ_3(Z^2 + Z_3^2) - bZ_3\tau^2 - (1 + bH_1)Z^2/\tau + bH_1Z_3^2\tau - H_1Z_3}{-Z_3 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z^2 + Z_3^2) - bH_1Z_3(1 - \tau^2)}, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= \\ &= \frac{bZ(Z^2 + Z_3^2) - bZ_1\tau^2 + (1 + bH_1)ZZ_3/\tau + bH_1ZZ_3\tau - H_1Z}{-Z_3 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z^2 + Z_3^2) - bH_1Z_3(1 - \tau^2)}. \end{aligned} \quad (7.128)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$Z = u_1\tau, \quad Z_3 = u_2\tau, \quad (7.129)$$

приводим систему (7.128) к виду

$$\begin{aligned} \tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \\ &= \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - (1 + bH_1)u_1^2 - H_1u_2 + bH_1u_2^2\tau^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1u_2(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \\ &= \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + (1 + bH_1)u_1u_2 - H_1u_1 + bH_1u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1u_2(1 - \tau^2)}, \end{aligned} \quad (7.130)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} \tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1u_2(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1 + bH_1)u_1u_2 - (b + H_1)u_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1u_2(1 - \tau^2)}. \end{aligned} \quad (7.131)$$

Сопоставим системе второго порядка (7.131) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{2(1 + bH_1)u_1u_2 - (b + H_1)u_1}, \quad (7.132)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1+bH_1)u_2^2 + (1+bH_1)u_1^2 - (b+H_1)u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \quad (7.133)$$

Следовательно, уравнение (7.132) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1+bH_1)u_2^2 + (1+bH_1)u_1^2 - (b+H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (7.134)$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{(1+bH_1)Z_3^2 + (1+bH_1)Z^2 - (b+H_1)Z_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{Z \sin \alpha} = \\ = C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (7.135)$$

**Замечание 7.3.** Рассмотрим систему (7.116)–(7.118) с переменной диссипацией с нулевым средним [175, 176, 178, 179, 247, 264, 266, 269, 286–290, 295, 299, 313, 328, 337, 344, 406, 413, 426–430, 434, 435, 443], которая становится консервативной при  $b = H_1$ :

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_3 + b(Z^2 + Z_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - b^2 Z_3 \cos^2 \alpha, \\ Z_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1+b^2)Z^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_3(Z^2 + Z_3^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + b^2 Z_3^2 \sin \alpha \cos \alpha - bZ_3 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (7.136)$$

$$\begin{aligned} Z' &= (1+b^2)Z Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ(Z^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &\quad + b^2 Z Z_3 \sin \alpha \cos \alpha - bZ \cos \alpha. \end{aligned}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1+b^2)(Z_3^2 + Z^2) - 2bZ_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (7.137)$$

$$Z \sin \alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (7.138)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (7.137), (7.138) также является первым интегралом системы (7.136). Но при  $b \neq H_1$  каждая из функций

$$(1+bH_1)(Z_3^2 + Z^2) - (b+H_1)Z_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha \quad (7.139)$$

и (7.138) по отдельности не является первым интегралом системы (7.116)–(7.118). Однако отношение функций (7.139), (7.138) является первым интегралом системы (7.116)–(7.118) при любых  $b, H_1$ .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (7.116)–(7.118). Для этого сначала преобразуем инвариантное соотношение (7.134) при  $u_1 \neq 0$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 = \\ = \frac{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + bH_1)^2}. \end{aligned} \quad (7.140)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (7.141)$$

и фазовое пространство системы (7.116)–(7.118) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (7.140).

Таким образом, в силу соотношения (7.134), первое уравнение системы (7.131) примет вид

$$\begin{aligned} \tau \frac{du_2}{d\tau} = \\ = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1 - \tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2) - bH_1u_2(1 - \tau^2)}, \end{aligned} \quad (7.142)$$

где

$$\begin{aligned} U_1(C_1, u_2) = \\ = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1)(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2)} \right\} \end{aligned} \quad (7.143)$$

и постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (7.141), или оно имеет вид уравнения Бернулли:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{du_2} = \\ = \frac{(b - (1 + bH_1)u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2 - H_1u_2)}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}. \end{aligned} \quad (7.144)$$

Уравнение (7.144) (при помощи (7.3)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{du_2} = \\ = \frac{2((1+bH_1)u_2-b)p+2b(1-H_1u_2-u_2^2-U_1^2(C_1,u_2))}{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \end{aligned} \quad (7.145)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (7.145) зависит от произвольной постоянной  $C_2$ . Полные выкладки здесь приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (7.145), даже в частном случае

$$|b-H_1|=2, \quad C_1 = \frac{1-A_1^4}{1+A_1^4}, \quad A_1 = \frac{1}{2}(b+H_1)$$

имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} p = p_0(u_2) = \\ = C[1-A_1u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2-4A_1^2(1-A_1u_2)^2 \pm C_1}}{\sqrt{C_1^2-4A_1^2(1-A_1u_2)^2 \mp C_1}} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times \\ \times \exp \frac{2(A_1-b)}{(1+A_1^4)A_1(A_1u_2-1)}, \quad C = \text{const}. \end{aligned} \quad (7.146)$$

**Замечание 7.4.** В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (7.134).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный виду трансцендентного первого интеграла из плоской динамики):

$$\ln |\sin \alpha| + G_2 \left( \sin \alpha, \frac{Z_3}{\sin \alpha}, \frac{Z}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (7.147)$$

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка (7.116)–(7.121) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной ее интегрируемости, как указано выше, достаточно найти один первый интеграл для (потенциально от-

делившейся) системы (7.119), (7.120), а также дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (7.121).

Для поиска первого интеграла (потенциально отделившейся) системы (7.119), (7.120) сопоставим ей следующее неавтономное уравнение первого порядка:

$$\frac{dZ_*}{d\beta_1} = \frac{1 + Z_*^2 \cos \beta_1}{Z_* \sin \beta_1}. \quad (7.148)$$

Последнее равенство после несложного интегрирования приводит к искомому инвариантному соотношению

$$\frac{\sqrt{1 + Z_*^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = \text{const}, \quad (7.149)$$

которое в переменных  $Z_1, Z_2$  переписется как

$$\frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin \beta_1} = C_3 = \text{const}. \quad (7.150)$$

Далее, для поиска дополнительного первого интеграла, «привязывающего» уравнение (7.121), сопоставим уравнениям (7.121) и (7.119) следующее неавтономное уравнение:

$$\frac{dZ_*}{d\beta_2} = -(1 + Z_*^2) \cos \beta_1. \quad (7.151)$$

Поскольку, в силу (7.149),

$$C_3 \cos \beta_1 = \pm \sqrt{C_3^2 - 1 - Z_*^2}, \quad (7.152)$$

то

$$\frac{dZ_*}{d\beta_2} = \mp \frac{1}{C_3} (1 + Z_*^2) \sqrt{C_3^2 - 1 - Z_*^2}. \quad (7.153)$$

Тогда, интегрируя последнее равенство, приходим к следующей квадратуре:

$$\mp(\beta_2 + C_4) = \int \frac{C_3 dZ_*}{(1 + Z_*^2) \sqrt{C_3^2 - 1 - Z_*^2}}, \quad C_4 = \text{const}. \quad (7.154)$$

Дальнейшее интегрирование приводит к равенству

$$\mp \text{tg}(\beta_2 + C_4) = \frac{C_3 Z_*}{\sqrt{C_3^2 - 1 - Z_*^2}}, \quad C_4 = \text{const}. \quad (7.155)$$

В переменных  $Z_1, Z_2$  последнее инвариантное соотношение примет вид

$$\mp \operatorname{tg}(\beta_2 + C_4) = \frac{C_3 Z_2}{\sqrt{(C_3^2 - 1)Z_1^2 - Z_2^2}}, \quad C_4 = \operatorname{const}. \quad (7.156)$$

Окончательно имеем дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (7.121):

$$\operatorname{arctg} \frac{C_3 Z_*}{\sqrt{C_3^2 - 1 - Z_*^2}} \pm \beta_2 = C_4, \quad C_4 = \operatorname{const} \quad (7.157)$$

или

$$\operatorname{arctg} \frac{C_3 Z_2}{\sqrt{(C_3^2 - 1)Z_1^2 - Z_2^2}} \pm \beta_2 = C_4, \quad C_4 = \operatorname{const}. \quad (7.158)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (7.3)–(7.6), (7.9)–(7.14) при условии (7.104) имеет восемь инвариантных соотношений: аналитическая неинтегрируемая связь вида (7.19), соответствующая аналитическому первому интегралу (7.122), циклические первые интегралы вида (7.17), (7.18), первый интеграл вида (7.135), а также первый интеграл, который может быть найден из уравнения (7.145), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа), и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (7.149) ((7.150)) и (7.157) ((7.158)).

**Теорема 7.3.** Система (7.3)–(7.6), (7.9)–(7.14) при условиях (7.19), (7.104), (7.18), (7.17) обладает восемью инвариантными соотношениями (полным набором), четыре из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом, по крайней мере, семь из восьми соотношений выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

**3.3. Топологические аналогии.** Покажем, что существует еще одна механическая и топологическая аналогия.

**Теорема 7.4.** Первый интеграл (7.135) системы (7.3)–(7.6), (7.9)–(7.14) при условиях (7.19), (7.104), (7.18), (7.17) постоянен на фазовых траекториях системы (6.145)–(6.150).

**Доказательство.** Действительно, первый интеграл (7.135) может быть получен заменой координат через соотношение (7.134), а первый интеграл (6.166) может быть получен заменой координат через соотношение (6.165). Но соотношения (7.134) и (6.165) совпадают. Теорема доказана.  $\square$

Таким образом, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).

2) Движение закрепленного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).

3) Вращение твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

## *Глава 8*

### **СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. III**

В данной главе систематизируются полученные новые результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного четырехмерного ( $4D$ -) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил в случае особой динамической симметрии. Вид поля сил заимствован из динамики реальных твердых тел меньшей размерности, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая оставаться постоянными в течение всего времени движения как величину скорости некоторой характерной точки твердого тела, так и некоторую другую фазовую переменную. Последний факт означает наличие в системе неинтегрируемых сервосвязей (см. также [1, 49, 51, 88, 111–113, 139, 146–149, 186, 188, 195, 202, 241, 246, 350, 373, 374, 412]).

Ранее в [146–149] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в

сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [197, 200, 206, 208, 212–213, 222, 236, 245] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной главе полученные в настоящее время результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости, которая перпендикулярна данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

## § 1. Более общая задача о движении со следящей силой

Рассмотрим движение однородного динамически симметричного (случай (6.2)) твердого тела с «передним торцом» (двумерным диском, взаимодействующим со средой, заполняющей четырехмерное пространство) в поле силы  $\mathbf{S}$  сопротивления в условиях квазистационарности [26, 75, 86–90, 105, 111–113, 142–151, 153, 169, 170, 182, 183].

Пусть  $(v, \alpha, \beta_2, \beta_1)$  — координаты вектора скорости  $\mathbf{v}_D$  некоторой характерной точки  $D$  твердого тела ( $D$  — центр двумерного диска) такие, что  $\alpha$  — угол между вектором  $\mathbf{v}_D$  и плоскостью  $Dx_1x_2$ ,  $\beta_2$  — угол, измеряемый в плоскости  $Dx_1x_2$  до проекции вектора  $\mathbf{v}_D$  на плоскость  $Dx_1x_2$ ,  $\beta_1$  — угол, измеряемый в плоскости  $Dx_3x_4$  до проекции вектора  $\mathbf{v}_D$  на плоскость



$Dx_3x_4$ ,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

— тензор угловой скорости тела,  $Dx_1x_2x_3x_4$  — система координат, связанная с телом, при этом прямая  $CD$  лежит в плоскости  $Dx_1x_2$  ( $C$  — центр масс), а оси  $Dx_3$ ,  $Dx_4$  лежат в гиперплоскости диска,  $I_1, I_2 = I_1$ ,  $I_3, I_4 = I_3$ ,  $m$  — инерционно-массовые характеристики.

Возьмем следующие разложения в проекциях на оси системы координат  $Dx_1x_2x_3x_4$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{DC} &= \{\sigma \sin \gamma, -\sigma \cos \gamma, 0, 0\}, \\ \mathbf{v}_D &= \{v \cos \alpha \sin \beta_2, v \cos \alpha \cos \beta_2, v \sin \alpha \cos \beta_1, v \sin \alpha \sin \beta_1\}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

В случае (6.2) также будет справедливо разложение для функции воздействия среды на четырехмерное тело:

$$\mathbf{S} = \{S_1, S_2, 0, 0\}, \quad (8.2)$$

и

$$S_1 = S \sin \gamma, \quad S_2 = -S \cos \gamma, \quad \gamma = \text{const}, \quad (8.3)$$

т.е. в данном случае  $\mathbf{F} = \mathbf{S}$  и угол  $\gamma$  измеряется в плоскости  $Dx_1x_2$ .

Тогда та часть динамических уравнений движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина [182, 183], см. далее), которые описывают движение центра масс и соответствуют пространству  $\mathbf{R}^4$ , при котором касательные силы воздействия среды на двумерный диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{v} \cos \alpha \sin \beta_2 - \dot{\alpha} v \sin \alpha \sin \beta_2 + \dot{\beta}_2 v \cos \alpha \cos \beta_2 - \\ & - \omega_6 v \cos \alpha \cos \beta_2 + \omega_5 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \\ & - \sigma(\omega_6^2 + \omega_5^2 + \omega_3^2) \sin \gamma - \sigma(\omega_4 \omega_5 + \omega_2 \omega_3) \cos \gamma + \\ & + \sigma \dot{\omega}_6 \cos \gamma = \frac{S_1}{m}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} &\dot{v} \cos \alpha \cos \beta_2 - \dot{\alpha} v \sin \alpha \cos \beta_2 - \dot{\beta}_2 v \cos \alpha \sin \beta_2 + \\ & + \omega_6 v \cos \alpha \sin \beta_2 - \omega_4 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\sigma(\omega_6^2 + \omega_4^2 + \omega_2^2) \cos \gamma + \sigma(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) \sin \gamma + \\
& +\sigma\dot{\omega}_6 \sin \gamma = \frac{S_2}{m},
\end{aligned} \tag{8.5}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \\
& -\omega_5 v \cos \alpha \sin \beta_2 + \omega_4 v \cos \alpha \cos \beta_2 - \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \\
& +\sigma(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) \sin \gamma - \sigma(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) \cos \gamma - \\
& -\sigma\dot{\omega}_5 \sin \gamma - \sigma\dot{\omega}_4 \cos \gamma = 0,
\end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \\
& +\omega_3 v \cos \alpha \sin \beta_2 - \omega_2 v \cos \alpha \cos \beta_2 + \omega_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \\
& -\sigma(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) \sin \gamma + \sigma(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) \cos \gamma + \\
& +\sigma\dot{\omega}_3 \sin \gamma + \sigma\dot{\omega}_2 \cos \gamma = 0,
\end{aligned} \tag{8.7}$$

где

$$S = s(\alpha)v^2, \quad \sigma = CD, \quad v > 0. \tag{8.8}$$

Далее, вспомогательная матрица (6.11) для вычисления момента силы сопротивления примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{3N} & x_{4N} \\ S_1 & S_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.9}$$

и следовательно, та часть динамических уравнений движения тела, которые описывают движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$ , примет вид:

$$(\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0, \tag{8.10}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = \\
& = -x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2 \cos \gamma,
\end{aligned} \tag{8.11}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = \\
& = -x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2 \sin \gamma,
\end{aligned} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = \\
& = x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2 \cos \gamma,
\end{aligned} \tag{8.13}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = \\
& = x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2 \sin \gamma,
\end{aligned} \tag{8.14}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = 0. \tag{8.15}$$

Таким образом, фазовым пространством системы (8.4)–(8.7), (8.10)–(8.15) десятого порядка является прямое произведение четырехмерного многообразия на алгебру Ли  $\mathfrak{so}(4)$ :

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^3 \times \mathfrak{so}(4). \tag{8.16}$$

Сразу же заметим, что система (8.4)–(8.7), (8.10)–(8.15), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_1 = I_2, \quad I_3 = I_4, \tag{8.17}$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0 = \text{const}, \quad \omega_6 \equiv \omega_6^0 = \text{const}. \tag{8.18}$$

В дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_6^0 = 0. \tag{8.19}$$

Если рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , действующей на плоскости  $Dx_1x_2$  и обеспечивающей в течение всего времени движения выполнение равенств (см. также [146–149])

$$v \equiv \text{const}, \quad \beta_2 \equiv \text{const}, \tag{8.20}$$

то в системе (8.4)–(8.7), (8.10)–(8.15) вместо  $F_1$  и  $F_2$  будут стоять соответственно величины

$$T_1 + S_1, \quad T_2 + S_2. \tag{8.21}$$

В результате соответствующего выбора величины  $T$  следящей силы можно формально добиться выполнения равенств (8.20) в течение всего времени движения. Действительно, формально выражая величину  $T$ , в силу системы (8.4)–(8.7), (8.10)–(8.15), получим при  $\cos \alpha \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_{1,v,\beta_2}(\alpha, \beta_1, \Omega) = \\
&= -m\sigma(\omega_5^2 + \omega_3^2) \sin \gamma - m\sigma(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) \cos \gamma + \\
&+ m\omega_5 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos^2 \beta_2 - m\omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos^2 \beta_2 +
\end{aligned}$$

$$+m\omega_4 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_2 - m\omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_2 - \\ -s(\alpha)v^2 \left[ \sin \gamma - \frac{m\sigma}{I_1 + I_3} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin \beta_2 \cdot \Lambda_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \quad (8.22)$$

$$T_2 = T_{2,v,\beta_2}(\alpha, \beta_1, \Omega) = \\ = m\sigma(\omega_4^2 + \omega_2^2) \cos \gamma + m\sigma(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) \sin \gamma - \\ -m\omega_4 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin^2 \beta_2 + m\omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin^2 \beta_2 - \\ -m\omega_5 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_2 + m\omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_2 + \\ +s(\alpha)v^2 \left[ \cos \gamma - \frac{m\sigma}{I_1 + I_3} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos \beta_2 \cdot \Lambda_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \quad (8.23)$$

где

$$\Lambda_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) = x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 + \\ + x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1. \quad (8.24)$$

При получении равенств (8.22) и (8.23) используются условия (8.18)–(8.20).

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при наличии в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующих нас классов движений (8.20). Во-вторых, на это можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (8.4)–(8.7), (8.10)–(8.15) в результате преобразований порождает независимую систему шестого порядка следующего вида:

$$\dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \omega_5 v \cos \alpha \sin \beta_2 + \\ + \omega_4 v \cos \alpha \cos \beta_2 - \sigma \dot{\omega}_5 \sin \gamma - \sigma \dot{\omega}_4 \cos \gamma = 0, \quad (8.25)$$

$$\dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_3 v \cos \alpha \sin \beta_2 - \\ - \omega_2 v \cos \alpha \cos \beta_2 + \sigma \dot{\omega}_3 \sin \gamma + \sigma \dot{\omega}_2 \cos \gamma = 0, \quad (8.26)$$

$$(I_1 + I_3) \dot{\omega}_2 = -x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2 \cos \gamma, \quad (8.27)$$

$$(I_1 + I_3) \dot{\omega}_3 = -x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2 \sin \gamma, \quad (8.28)$$

$$(I_1 + I_3)\dot{\omega}_4 = x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2 \cos \gamma, \quad (8.29)$$

$$(I_1 + I_3)\dot{\omega}_5 = x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2 \sin \gamma, \quad (8.30)$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляются параметры  $v$ ,  $\beta_2$ .

### 1.1. Две системы рассуждений об интегрируемости.

#### Замечание (об аналитических первых интегралах).

Видно, что система (8.25)–(8.30) обладает двумя аналитическими первыми интегралами, выраженными через конечную комбинацию элементарных функций:

$$\omega_2 \sin \gamma - \omega_3 \cos \gamma = W'_1 = \text{const}, \quad (8.31)$$

$$\omega_4 \sin \gamma - \omega_5 \cos \gamma = W'_2 = \text{const}. \quad (8.32)$$

Прежде всего, это означает, что систему (8.25)–(8.30) можно редуцировать к системе четвертого порядка на своем четырехмерном фазовом многообразии.

В дальнейшем при исследовании системы (8.25)–(8.30) можно пойти следующими путями (т.е. принять следующие системы рассуждений).

**I.** Во-первых, можно «не замечать» наличия в системе первых интегралов вида (8.31), (8.32). Тогда, проводя ряд эквивалентных преобразований, можно попытаться привести исследуемую систему (8.25)–(8.30) к эквивалентной системе, в которой произойдет отделение систем меньших размерностей. При этом для полного ее интегрирования достаточно будет получить количество независимых первых интегралов, меньшее на две единицы, в силу (8.31), (8.32).

**II.** Во-вторых, можно сразу же воспользоваться первыми интегралами (8.31), (8.32), выразив две интересующие нас фазовые переменные из списка  $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ . При этом получим систему четвертого порядка как систему, являющуюся редукцией системы (8.25)–(8.30) к системе четвертого порядка на своем четырехмерном фазовом многообразии.

Сначала выберем систему рассуждений **I**.

Действительно, система (8.25)–(8.30) эквивалентна системе

$$\dot{\alpha}v \cos \alpha - \omega_5 v \cos \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \omega_4 v \cos \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 +$$

$$+\omega_3 v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_2 v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \sigma \dot{\omega}_5 \sin \gamma \cos \beta_1 - \\ - \sigma \dot{\omega}_4 \cos \gamma \cos \beta_1 + \sigma \dot{\omega}_3 \sin \gamma \sin \beta_1 + \sigma \dot{\omega}_2 \cos \gamma \sin \beta_1 = 0, \quad (8.33)$$

$$\dot{\beta}_1 v \sin \alpha + \omega_3 v \cos \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_2 v \cos \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \\ + \omega_5 v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_4 v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \sigma \dot{\omega}_3 \sin \gamma \cos \beta_1 + \\ + \sigma \dot{\omega}_2 \cos \gamma \cos \beta_1 + \sigma \dot{\omega}_5 \sin \gamma \sin \beta_1 + \sigma \dot{\omega}_4 \cos \gamma \sin \beta_1 = 0, \quad (8.34)$$

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{v^2}{I_1 + I_3} x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \cos \gamma, \quad (8.35)$$

$$\dot{\omega}_3 = -\frac{v^2}{I_1 + I_3} x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \sin \gamma, \quad (8.36)$$

$$\dot{\omega}_4 = \frac{v^2}{I_1 + I_3} x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \cos \gamma, \quad (8.37)$$

$$\dot{\omega}_5 = \frac{v^2}{I_1 + I_3} x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \sin \gamma, \quad (8.38)$$

Введем новые квазискорости в системе. Для этого преобразуем величины  $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$  посредством композиции следующих поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ -z_2 \end{pmatrix} = T_*(-\beta_1) \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \end{pmatrix}, \quad (8.39)$$

$$\begin{pmatrix} z_3 \\ -z_4 \end{pmatrix} = T_*(-\beta_1) \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_4 \end{pmatrix},$$

где

$$T_*(\beta_1) = \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{pmatrix}, \quad (8.40)$$

а также

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = T_*(\beta_2) \begin{pmatrix} z_3 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad (8.41)$$

$$\begin{pmatrix} w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = T_*(-\beta_2) \begin{pmatrix} -z_4 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3 \cos \beta_1 + \omega_5 \sin \beta_1, & z_2 &= \omega_3 \sin \beta_1 - \omega_5 \cos \beta_1, \\ z_3 &= \omega_2 \cos \beta_1 + \omega_4 \sin \beta_1, & z_4 &= \omega_2 \sin \beta_1 - \omega_4 \cos \beta_1, \\ w_1 &= -z_1 \sin \beta_2 + z_3 \cos \beta_2, & w_2 &= z_3 \sin \beta_2 + z_1 \cos \beta_2, \\ w_3 &= z_2 \sin \beta_2 - z_4 \cos \beta_2, & w_4 &= z_4 \sin \beta_2 + z_2 \cos \beta_2. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Как видно из (8.33)–(8.38), на многообразии

$$O_2 = \left\{ (\alpha, \beta_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \in \mathbf{R}^6 : \alpha = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbf{Z} \right\} \quad (8.43)$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}_1$ . Таким образом, формально, на многообразии (8.43) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, во-первых, при  $k$  четном или нечетном неопределенность возникает по причине вырождения координат  $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ , параметризующих трехмерную сферу (но не являющихся классическими сферическими координатами), а, во-вторых, при  $k$  нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (8.33) вырождается.

Действительно, якобиан преобразования  $x_1, x_2, x_3, x_4 \longrightarrow v, \alpha, \beta_1, \beta_2$

$$\begin{aligned} x_1 &= v \cos \alpha \sin \beta_2, \\ x_2 &= v \cos \alpha \cos \beta_2, \\ x_3 &= v \sin \alpha \cos \beta_1, \\ x_4 &= v \sin \alpha \sin \beta_1 \end{aligned} \quad (8.44)$$

равен

$$v^3 \cos \alpha \sin \alpha;$$

он отличается от якобиана преобразования при переходе к обобщенным сферическим координатам  $v, \alpha, \beta_1, \beta_2$ , который, в свою очередь, равен

$$v^3 \sin \alpha \sin \beta_1.$$

Из этого следует, что система (8.33)–(8.38) вне и только вне многообразия (8.43) эквивалентна системе

$$\dot{\alpha} = -w_3 + \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \cdot \Lambda_{v, \beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (8.45)$$

$$\dot{z}_4 = -\frac{v^2}{I_1 + I_3} s(\alpha) \cos \gamma \cdot \Lambda_{v, \beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) +$$

$$+z_3 \left[ w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \quad (8.46)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= \frac{v^2}{I_1 + I_3} s(\alpha) \cos \gamma \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) - \\ &- z_4 \left[ w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \end{aligned} \quad (8.47)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= -\frac{v^2}{I_1 + I_3} s(\alpha) \sin \gamma \cdot \Lambda_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) + \\ &+ z_1 \left[ w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \end{aligned} \quad (8.48)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{v^2}{I_1 + I_3} s(\alpha) \sin \gamma \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) - \\ &- z_2 \left[ w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \end{aligned} \quad (8.49)$$

$$\dot{\beta}_1 = w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (8.50)$$

или окончательно

$$\dot{\alpha} = -w_3 + \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \cdot \Lambda_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (8.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_4 &= -\frac{v^2}{I_1 + I_3} s(\alpha) \sin(\beta_2 + \gamma) \cdot \Lambda_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) + \\ &+ w_2 \left[ w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \end{aligned} \quad (8.52)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_3 &= \frac{v^2}{I_1 + I_3} s(\alpha) \cos(\beta_2 + \gamma) \cdot \Lambda_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) - \\ &- w_1 \left[ w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \end{aligned} \quad (8.53)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_2 &= \frac{v^2}{I_1 + I_3} s(\alpha) \sin(\beta_2 + \gamma) \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) - \\ &- w_4 \left[ w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \end{aligned} \quad (8.54)$$



$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \frac{v^2}{I_1 + I_3} s(\alpha) \cos(\beta_2 + \gamma) \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) + \\ &+ w_3 \left[ w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \end{aligned} \quad (8.55)$$

$$\dot{\beta}_1 = w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (8.56)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) &= -x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 + \\ &+ x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1, \end{aligned} \quad (8.57)$$

а функция  $\Lambda_{v,\beta_2}(\alpha, \beta_1, \Omega/v)$  представляется в виде (8.24).

Здесь и далее зависимость от групп переменных

$$(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$$

понимается как сложная зависимость от

$$(\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1/v, z_2/v, z_3/v, z_4/v)$$

(или  $(\alpha, \beta_1, \beta_2, w_1/v, w_2/v, w_3/v, w_4/v)$ ) в силу (8.42).

Нарушение теоремы единственности для системы (8.33)–(8.38) на многообразии (8.43) при нечетном  $k$  происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (8.43) при нечетном  $k$  проходит неособая фазовая траектория системы (8.33)–(8.38), пересекая многообразие (8.43) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связей вида (8.20) необходимо выбрать значения  $T_1$  и  $T_2$  при  $\cos \alpha \neq 0$  в виде (8.22) и (8.23).

Пусть

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \Lambda_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) = L \left( \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right). \quad (8.58)$$

Заметим, что  $|L| < +\infty$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \Lambda_{v,\beta_2} \left( \alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right) \right| < +\infty. \quad (8.59)$$

При  $\alpha = \pi/2$  нужные величины проекций следящей силы найдутся из равенств

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_{1,v,\beta_2}\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \Omega\right) = \\
&= -m\sigma(\omega_5^2 + \omega_3^2) \sin \gamma - m\sigma(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) \cos \gamma + \\
&\quad + m\omega_5 v \cos \beta_1 \cos^2 \beta_2 - m\omega_3 v \sin \beta_1 \cos^2 \beta_2 + \\
&\quad + m\omega_4 v \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_2 - m\omega_2 v \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_2 + \\
&\quad + v^2 \frac{m\sigma}{I_1 + I_3} \sin \beta_2 \cdot L, \tag{8.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= T_{2,v,\beta_2}\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \Omega\right) = \\
&= m\sigma(\omega_4^2 + \omega_2^2) \cos \gamma + m\sigma(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) \sin \gamma - \\
&\quad - m\omega_4 v \cos \beta_1 \sin^2 \beta_2 + m\omega_2 v \sin \beta_1 \sin^2 \beta_2 - \\
&\quad - m\omega_5 v \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_2 + m\omega_3 v \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_2 - \\
&\quad - v^2 \frac{m\sigma}{I_1 + I_3} \cos \beta_2 \cdot L, \tag{8.61}
\end{aligned}$$

где значения  $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$  произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки  $W$ , необходимо выбрать проекции следящей силы в виде

$$T = T_1\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2, \Omega\right) = \frac{mv^2}{R_{01}}, \tag{8.62}$$

$$T = T_2\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2, \Omega\right) = \frac{mv^2}{R_{02}}, \tag{8.63}$$

где  $R_{01}, R_{02}$  — проекции отрезка  $CW$  на соответствующие оси координат.

Равенства (8.22), (8.23) и (8.62) (8.63) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы  $T$  для почти всех точек многообразия (8.43), что и доказывает сделанное замечание.

## § 2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**2.1. Приведенная система.** Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183], возьмем динамические функции  $s$ ,  $x_{3N}$  и  $x_{4N}$  следующего вида:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha,$$

$$x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{3N0}(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \cos \beta_1, \quad (8.64)$$

$$x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{4N0}(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \sin \beta_1, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0,$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов  $\alpha, \beta_1, \beta_2$ ).

Функции  $\Lambda_{v,\beta_2}(\alpha, \beta_1, \Omega/v)$ ,  $\Pi_{v,\beta_2}(\alpha, \beta_1, \Omega/v)$ , входящие в систему (8.51)–(8.56), примут следующий вид:

$$\Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin \alpha, \quad \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) \equiv 0. \quad (8.65)$$

Тогда, в силу неинтегрируемых связей (8.20), вне и только вне многообразия (8.43) динамическая часть уравнений движения (система (8.51)–(8.56)) примет вид аналитической системы

$$\dot{\alpha} = -w_3 + \frac{\sigma ABv}{I_1 + I_3} \sin \alpha, \quad (8.66)$$

$$\dot{w}_4 = -\frac{ABv^2}{I_1 + I_3} \sin(\beta_2 + \gamma) \sin \alpha \cos \alpha + w_1 w_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (8.67)$$

$$\dot{w}_3 = \frac{ABv^2}{I_1 + I_3} \cos(\beta_2 + \gamma) \sin \alpha \cos \alpha - w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (8.68)$$

$$\dot{w}_2 = -w_1 w_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (8.69)$$

$$\dot{w}_1 = w_1 w_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (8.70)$$

$$\dot{\beta}_1 = w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (8.71)$$

Вводя далее безразмерные переменные, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$\begin{aligned} w_k &\mapsto n_0 v w_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_1 + I_3}, \\ b &= \sigma n_0, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \end{aligned} \quad (8.72)$$

приведем систему (8.66)–(8.71) к виду

$$\alpha' = -w_3 + b \sin \alpha, \quad (8.73)$$

$$w_4' = -\sin(\beta_2 + \gamma) \sin \alpha \cos \alpha + w_1 w_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (8.74)$$

$$w_3' = \cos(\beta_2 + \gamma) \sin \alpha \cos \alpha - w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (8.75)$$

$$w_2' = -w_1 w_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (8.76)$$

$$w_1' = w_1 w_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (8.77)$$

$$\beta_1' = w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (8.78)$$

Видно, что в системе шестого порядка (8.73)–(8.78), которую можно рассматривать на своем шестимерном многообразии

$$T\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}^2 \quad (8.79)$$

— прямом произведении касательного расслоения  $T\mathbf{S}^2$  к двумерной сфере  $\mathbf{S}^2$  на двумерную плоскость, образовалась независимая система пятого порядка (8.73)–(8.77) на своем пятимерном многообразии.

Более того, у системы шестого порядка (8.73)–(8.78) появилась независимая подсистема третьего порядка

$$\alpha' = -w_3 + b \sin \alpha, \quad (8.80)$$

$$w_3' = \cos(\beta_2 + \gamma) \sin \alpha \cos \alpha - w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (8.81)$$

$$w_1' = w_1 w_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (8.82)$$

а также могут быть выделены (пока зависимая) система второго порядка

$$w_4' = -\sin(\beta_2 + \gamma) \sin \alpha \cos \alpha + w_1 w_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (8.83)$$

$$w'_2 = -w_1 w_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (8.84)$$

и уравнение

$$\beta'_1 = w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (8.85)$$

Для полного интегрирования системы (8.73)–(8.78) необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако, после разбиения системы на три части (система (8.80)–(8.82), система (8.83), (8.84) и уравнение (8.85)) для полного интегрирования достаточно знать два независимых первых интеграла системы (8.80)–(8.82), один — системы (8.83), (8.84) (после приведения последней к независимой подсистеме) и один первый интеграл, «присоединяющий» уравнение (8.85).

Сразу же заметим, что последние рассуждения характерны для выбора системы рассуждений **I** (см. выше). Действительно, мы пока «не замечаем» наличия двух аналитических первых интегралов (8.31), (8.32). Поэтому, получая два независимых первых интеграла независимой системы третьего порядка (8.80)–(8.82), а также первый интеграл, «присоединяющий» уравнение (8.85), имеем полный набор независимых первых интегралов системы четвертого порядка (8.80)–(8.82), (8.85). Полученный данный полный набор (три интеграла) вместе с аналитическими первыми интегралами (8.31), (8.32) образует полный набор пяти первых интегралов системы шестого порядка (8.80)–(8.85).

В дальнейшем, в частности, будет видно, что композиция аналитических первых интегралов (8.31), (8.32) дает первый интеграл (потенциально отделившейся) системы (8.83), (8.84).

## 2.2. Полный список инвариантных соотношений.

Система (8.80)–(8.82) имеет вид системы уравнений, подобной системе (4.22), возникающей в динамике трехмерного (3D-) твердого тела в неконсервативном поле сил (см. главу 4). При этом фазовые переменные  $z_1, z_2$  в системе (4.22) соответствуют фазовым переменным  $w_1, w_3$  системы (8.80)–(8.82). Но, поскольку данная глава может быть прочтена самостоятельно, повторим некоторые рассуждения главы 4 (в новых обозначениях).

Сначала сопоставим системе третьего порядка (8.80)–(8.82)

неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{\cos(\beta_2 + \gamma) \sin \alpha \cos \alpha - w_1^2 \cos \alpha / \sin \alpha}{-w_3 + b \sin \alpha}, \\ \frac{dw_1}{d\alpha} &= \frac{w_1 w_3 \cos \alpha / \sin \alpha}{-w_3 + b \sin \alpha}.\end{aligned}\quad (8.86)$$

Используя замену  $\tau = \sin \alpha$ , перепишем систему (8.86) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dw_3}{d\tau} &= \frac{\cos(\beta_2 + \gamma)\tau - w_1^2/\tau}{-w_3 + b\tau}, \\ \frac{dw_1}{d\tau} &= \frac{w_1 w_3/\tau}{-w_3 + b\tau}.\end{aligned}\quad (8.87)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_1 = u_1 \tau, \quad w_3 = u_2 \tau, \quad (8.88)$$

приводим систему (8.87) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{\cos(\beta_2 + \gamma) - u_1^2}{-u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{u_1 u_2}{-u_2 + b},\end{aligned}\quad (8.89)$$

что эквивалентно системе

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{\cos(\beta_2 + \gamma) - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{-u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1 u_2 - bu_1}{-u_2 + b}.\end{aligned}\quad (8.90)$$

Сопоставим системе второго порядка (8.90) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\cos(\beta_2 + \gamma) - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{2u_1 u_2 - bu_1}, \quad (8.91)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + \cos(\beta_2 + \gamma)}{u_1}\right) = 0. \quad (8.92)$$

Следовательно, уравнение (8.91) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + \cos(\beta_2 + \gamma)}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (8.93)$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\frac{w_3^2 + w_1^2 - bw_3 \sin \alpha + \cos(\beta_2 + \gamma) \sin^2 \alpha}{w_1 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (8.94)$$

**Замечание 8.1.** Рассмотрим систему (8.80)–(8.82) с переменной диссипацией с нулевым средним [175, 176, 178, 179, 247, 264, 266, 269, 286–290, 295, 299, 313, 328, 337, 344, 406, 413, 426–430, 434, 435, 443], которая становится консервативной при  $b = 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha' &= -w_3, \\ w_3' &= \cos(\beta_2 + \gamma) \sin \alpha \cos \alpha - w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ w_1' &= w_1 w_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (8.95)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_3^2 + w_1^2 + \cos(\beta_2 + \gamma) \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (8.96)$$

$$w_1 \sin \alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (8.97)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (8.96), (8.97) также является первым интегралом системы (8.95). Но при  $b \neq 0$  каждая из функций

$$w_3^2 + w_1^2 - bw_3 \sin \alpha + \cos(\beta_2 + \gamma) \sin^2 \alpha \quad (8.98)$$

и (8.97) по отдельности не является первым интегралом системы (8.80)–(8.82). Однако отношение функций (8.98), (8.97) является первым интегралом системы (8.80)–(8.82) при любом  $b$ .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (8.80)–(8.82). Для этого сначала преобразуем инвариантное соотношение (8.93) при  $u_1 \neq 0$  следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \cos(\beta_2 + \gamma). \quad (8.99)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \cos(\beta_2 + \gamma) \geq 0, \quad (8.100)$$

и фазовое пространство системы (8.80)–8.82 расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (8.99).

Таким образом, в силу соотношения (8.93), первое уравнение системы (8.90) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(\cos(\beta_2 + \gamma) - bu_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \quad (8.101)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + \cos(\beta_2 + \gamma))} \right\} \quad (8.102)$$

и постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (8.100).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (8.80)–(8.82) примет вид

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\tau}{\tau} = \\ & = \int \frac{(b - u_2) du_2}{2(\cos(\beta_2 + \gamma) - bu_2 + u_2^2) - C_1 \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + \cos(\beta_2 + \gamma))}\}/2}. \end{aligned} \quad (8.103)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |\sin \alpha|. \quad (8.104)$$

Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = p_1, \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4 \cos(\beta_2 + \gamma), \quad (8.105)$$

то правая часть равенства (8.103) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4p_1^2)}{(b_1^2 - 4p_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4p_1^2}} - b \int \frac{dp_1}{(b_1^2 - 4p_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4p_1^2}} = \\ & = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4p_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{b}{2} I_1, \end{aligned} \quad (8.106)$$

где

$$I_1 = \int \frac{dp_3}{\sqrt{b_1^2 - p_3^2}(p_3 \pm C_1)}, \quad p_3 = \sqrt{b_1^2 - 4p_1^2}. \quad (8.107)$$



При вычислении интеграла (8.107) возможны три случая.

**I.**  $b > 2$ .

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} + \sqrt{b_1^2-p_3^2}}{p_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} - \sqrt{b_1^2-p_3^2}}{p_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \text{const.} \quad (8.108)$$

**II.**  $b < 2$ .

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 p_3 + b_1^2}{b_1(p_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (8.109)$$

**III.**  $b = 2$ .

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2-p_3^2}}{C_1(p_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (8.110)$$

Возвращаясь к переменной

$$p_1 = \frac{w_3}{\sin \alpha} - \frac{b}{2}, \quad (8.111)$$

имеем окончательный вид для величины  $I_1$ :

**I.**  $b > 2$ .

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} \pm 2p_1}{\sqrt{b_1^2-4p_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} \mp 2p_1}{\sqrt{b_1^2-4p_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \text{const.} \quad (8.112)$$

**II.**  $b < 2$ .

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2-4p_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4p_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (8.113)$$

**III.**  $b = 2$ .

$$I_1 = \mp \frac{2p_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4p_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (8.114)$$

Таким образом, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (8.80)–(8.82),

т.е. представлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

**Замечание 8.2.** В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (8.93).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный виду трансцендентного первого интеграла из плоской динамики):

$$\ln |\sin \alpha| + G_2 \left( \sin \alpha, \frac{w_3}{\sin \alpha}, \frac{w_1}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (8.115)$$

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка (8.80)–(8.85) уже найдены два независимых первых интеграла. Теперь, при рассуждениях типа **I** (см. выше, когда мы как бы «не замечаем» наличия двух аналитических первых интегралов (8.31), (8.32)), для полной ее интегрируемости достаточно найти один первый интеграл для (потенциально отделившейся) системы (8.83), (8.84), а также дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (8.85).

После замены переменных

$$\begin{aligned} w_* &= w_3 \sin(\gamma + \beta_2) + w_4 \cos(\gamma + \beta_2), \\ w_{**} &= w_1 \sin(\gamma + \beta_2) - w_2 \cos(\gamma + \beta_2) \end{aligned} \quad (8.116)$$

система (8.83), (8.84) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \frac{dw_*}{d\beta_1} &= -w_{**}, \\ \frac{dw_{**}}{d\beta_1} &= w_*, \end{aligned} \quad (8.117)$$

который предполагает наличие аналитического первого интеграла:

$$w_*^2 + w_{**}^2 = C_3 = \text{const}. \quad (8.118)$$

Зададим вопрос: как связан только что полученный первый интеграл (8.118) с аналитическими первыми интегралами вида (8.31), (8.32)?

Действительно, два типа рассуждений (**I** и **II**, см. выше) соответствуют двум следующим альтернативам. Для полного интегрирования системы шестого порядка (8.25)–(8.30):

- 1) или мы находим пять независимых первых интегралов системы шестого порядка (8.25)–(8.30),
- 2) или мы преобразуем систему шестого порядка (8.25)–(8.30) так, что в ней выделяются независимые подсистемы еще более низкого порядка.

Так, например, поскольку после нахождения таких координат  $w_*$ ,  $w_{**}$  происходит расслоение векторного поля системы таким образом, что образуется независимая подсистема второго порядка (8.117), вместо пяти независимых первых интегралов нужно найти четыре (три — для интегрирования системы четвертого порядка (8.80)–(8.82), (8.85) и один — для интегрирования отделившейся системы второго порядка (8.117)).

Теперь, окончательно, перепишем аналитические первые интегралы вида (8.31), (8.32) в новых переменных следующим образом:

$$w_{**} \cos \beta_1 - w_* \sin \beta_1 = W_1'' = \text{const}, \quad (8.119)$$

$$w_{**} \sin \beta_1 + w_* \cos \beta_1 = W_2'' = \text{const}. \quad (8.120)$$

Видно, что аналитические первые интегралы (8.119), (8.120) влекут найденный аналитический первый интеграл (8.118) (для этого достаточно сложить квадраты левых частей равенств (8.119), (8.120)).

Далее, окончательно, для интегрирования системы четвертого порядка (8.80)–(8.82), (8.85) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (8.85).

Поскольку

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{u_1(2u_2 - b)}{(b - u_2)\tau}, \quad \frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{u_1}{(b - u_2)\tau}, \quad (8.121)$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta_1} = 2u_2 - b. \quad (8.122)$$

Очевидно, что при  $u_1 \neq 0$  выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2} \left( b \pm \sqrt{b_1^2 - 4 \left( u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2} \right), \quad (8.123)$$

$$b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4 \cos(\beta_2 + \gamma),$$

тогда интегрирование квадратуры

$$\beta_1 + \text{const} = \pm \int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - 4 \left( u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2}} \quad (8.124)$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_4) = \pm \arcsin \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4 \cos(\beta_2 + \gamma)}}, \quad C_4 = \text{const}. \quad (8.125)$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_4)] = \pm \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4 \cos(\beta_2 + \gamma)}} \quad (8.126)$$

или при переходе к старым переменным

$$\sin[2(\beta_1 + C_4)] = \pm \frac{2w_1 - C_1 \sin \alpha}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4 \cos(\beta_2 + \gamma) \sin \alpha}}. \quad (8.127)$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, «привязывающего» уравнение (8.85), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому, что в последнем выражении формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (8.93).

Но мы проведем некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (8.93)):

$$\text{tg}^2[2(\beta_1 + C_4)] = \frac{(u_1^2 - u_2^2 + bu_2 - \cos(\beta_2 + \gamma))^2}{u_1^2(4u_2^2 - 4bu_2 + b^2)}. \quad (8.128)$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\operatorname{tg}^2[2(\beta_1 + C_4)] = \frac{(w_1^2 - w_3^2 + bw_3 \sin \alpha - \cos(\beta_2 + \gamma) \sin^2 \alpha)^2}{w_1^2(4w_3^2 - 4bw_3 \sin \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)} \quad (8.129)$$

или, окончательно,

$$\begin{aligned} -\beta_1 \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{w_1^2 - w_3^2 + bw_3 \sin \alpha - \cos(\beta_2 + \gamma) \sin^2 \alpha}{w_1(2w_3 - b \sin \alpha)} = \\ = C_4 = \operatorname{const}. \end{aligned} \quad (8.130)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (8.4)–(8.7), (8.10)–(8.15) при условии (8.64) имеет восемь инвариантных соотношений: аналитические неинтегрируемые связи вида (8.20), циклические первые интегралы вида (8.18), (8.19), первый интеграл вида (8.94), а также первый интеграл, выраженный соотношениями (8.108)–(8.115), который является трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражается через конечную комбинацию элементарных функций, и, наконец, трансцендентный первый интеграл вида (8.130) ((8.129)) и аналитический первый интеграл (8.118).

**Теорема 8.1.** Система (8.4)–(8.7), (8.10)–(8.15) при условиях (8.20), (8.64), (8.19) обладает восемью инвариантными соотношениями (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

**2.3. Топологические аналогии.** Рассмотрим следующую систему уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + b_* \dot{\xi} \cos \xi + R_3 \sin \xi \cos \xi - \dot{\eta}_1^2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = 0, \\ \ddot{\eta}_1 + b_* \dot{\eta}_1 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_1 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} = 0, \quad b_* > 0, \end{aligned} \quad (8.131)$$

описывающую закрепленный сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил [112, 144, 167, 177, 192, 205, 207, 239,

242, 280, 320, 321, 323, 324, 342, 381, 382, 398, 399, 408, 414]. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 4, но фазовая переменная  $\eta_1$  является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка.

Ее фазовым пространством является касательное расслоение

$$TS^2\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \xi, \eta_1\} \quad (8.132)$$

к двумерной сфере  $S^2\{\xi, \eta_1\}$ , при этом уравнение больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0 \quad (8.133)$$

задает семейство интегральных многообразий.

Нетрудно убедиться, что система (8.131) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (8.132) к двумерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

**Теорема 8.2.** Система (8.4)–(8.7), (8.10)–(8.15) при условиях (8.20), (8.138), (8.19) эквивалентна динамической системе (8.131).

Действительно, достаточно положить  $\alpha = \xi$ ,  $\beta_1 = \eta_1$ ,  $b = -b_*$ ,  $R_3 = \cos(\gamma + \beta_2)$ .

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

### § 3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

**3.1. Введение зависимости от угловой скорости.** Глава 8 посвящена динамике четырехмерного твердого тела в четырехмерном пространстве. Но, поскольку данный параграф посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций. К тому же, данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для многомерных тел.

Пусть  $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$  — координаты точки  $N$  воздействия неконсервативной силы (воздействия среды) на двумерный диск,  $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций  $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$  от тензора угловой скорости лишь

линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [30, 31, 45, 46, 48, 81–90, 112, 113, 151, 186, 207, 209, 253, 254, 265, 278–280].

Таким образом, рассмотрим следующую зависимость:

$$x = Q + R, \quad (8.134)$$

где  $R = (R_1, R_2, R_3, R_4)$  — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции  $R$  от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}. \quad (8.135)$$

Здесь  $(h_1, h_2, h_3, h_4)$  — некоторые положительные параметры (ср. [326, 334, 335, 349, 415]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку  $x_{1N} \equiv x_{2N} \equiv 0$ , то

$$x_{3N} = Q_3 - \frac{h_1}{v}(\omega_4 - \omega_5), \quad x_{4N} = Q_4 - \frac{h_1}{v}(\omega_3 - \omega_2). \quad (8.136)$$

**3.2. Приведенная система.** Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [182, 183]

$$Q_3 = A \sin \alpha \cos \beta_1, \quad Q_4 = A \sin \alpha \sin \beta_1, \quad A > 0, \quad (8.137)$$

возьмем динамические функции  $s$ ,  $x_{3N}$  и  $x_{4N}$  следующего вида:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad B > 0,$$

$$x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin \alpha \cos \beta_1 - \frac{h}{v}(\omega_4 - \omega_5), \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \quad (8.138)$$

$$x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin \alpha \sin \beta_1 - \frac{h}{v}(\omega_3 - \omega_2), \quad h = h_2 > 0, \quad v \neq 0,$$

что убеждает нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости), причем  $h_1 = h_2$ ,

$h_3 = h_4$  в силу рассматриваемой динамической симметрии (8.17) тела.

Выберем далее систему рассуждений **I**, которая в дальнейшем учитывает и систему рассуждений **II** (см. выше).

Для этого в данном пункте введем следующие фазовые переменные:

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2 - \omega_3, \\ u_2 &= \omega_4 - \omega_5, \\ u_3 &= \omega_2 \cos \beta_2 - \omega_3 \sin \beta_2, \\ u_4 &= \omega_4 \cos \beta_2 - \omega_5 \sin \beta_2. \end{aligned} \quad (8.139)$$

Действительно, данные координаты корректно определены при

$$\cos \beta_2 \neq \sin \beta_2, \quad (8.140)$$

а якобиан отображения равен

$$-\frac{1}{(\cos \beta_2 - \sin \beta_2)^2}, \quad (8.141)$$

при этом обратное преобразование задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{u_3 - u_1 \sin \beta_2}{\cos \beta_2 - \sin \beta_2}, \\ \omega_3 &= \frac{u_3 - u_1 \cos \beta_2}{\cos \beta_2 - \sin \beta_2}, \\ \omega_4 &= \frac{u_4 - u_2 \sin \beta_2}{\cos \beta_2 - \sin \beta_2}, \\ \omega_5 &= \frac{u_4 - u_2 \cos \beta_2}{\cos \beta_2 - \sin \beta_2}, \end{aligned} \quad (8.142)$$

а частный случай

$$\cos \beta_2 = \sin \beta_2, \quad (8.143)$$

который упрощает динамические уравнения, может быть рассмотрен отдельно.

Тогда уравнения (8.33)–(8.38) при условии (8.138) вне и только вне многообразия

$$O_3 = \left\{ (\alpha, \beta_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \in \mathbf{R}^6 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z} \right\} \quad (8.144)$$



преобразуются в следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} - u_3 \sin \beta_1 + u_4 \cos \beta_1 - \\ - \sigma n_0^2 v \sin \alpha + \sigma H'_1 [-u_1 \sin \beta_1 + u_2 \cos \beta_1] = 0, \end{aligned} \quad (8.145)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1 \sin \alpha - \cos \alpha [u_3 \cos \beta_1 + u_4 \sin \beta_1] - \\ - \sigma H'_1 \cos \alpha [u_1 \cos \beta_1 + u_2 \sin \beta_1] = 0, \end{aligned} \quad (8.146)$$

$$\dot{u}_1 = -n_0^2 v^2 r_1 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 - \frac{Bvh}{I_1 + I_3} r_1 u_1 \cos \alpha, \quad (8.147)$$

$$\dot{u}_2 = n_0^2 v^2 r_1 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta_1 - \frac{Bvh}{I_1 + I_3} r_1 u_2 \cos \alpha, \quad (8.148)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_3 = -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \cos(\gamma + \beta_2) - \\ - \frac{Bvh}{I_1 + I_3} u_1 \cos \alpha \cos(\gamma + \beta_2), \end{aligned} \quad (8.149)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_4 = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta_1 \cos(\gamma + \beta_2) - \\ - \frac{Bvh}{I_1 + I_3} u_2 \cos \alpha \cos(\gamma + \beta_2), \end{aligned} \quad (8.150)$$

где

$$r_1 = \cos \gamma - \sin \gamma \neq 0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_1 + I_3}, \quad H'_1 = \frac{Bh}{I_1 + I_3}. \quad (8.151)$$

Отметим также, что частный случай

$$\cos \gamma = \sin \gamma \quad (r_1 = 0), \quad (8.152)$$

который упрощает динамические уравнения, также может быть рассмотрен отдельно (подобно случаю (8.143)).

Введем далее следующие фазовые переменные по формулам:

$$\begin{aligned} v_1 &= -u_1 \sin \beta_1 + u_2 \cos \beta_1, \\ v_2 &= u_1 \cos \beta_1 + u_2 \sin \beta_1, \\ v_3 &= -u_3 \sin \beta_1 + u_4 \cos \beta_1, \\ v_4 &= u_3 \cos \beta_1 + u_4 \sin \beta_1. \end{aligned} \quad (8.153)$$

Тогда вне и только вне многообразия

$$O_4 = \{(\alpha, \beta_1, u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbf{R}^6 : \beta_1 = \pi k, k \in \mathbf{Z}\} \quad (8.154)$$

система (8.145)–(8.150) примет вид

$$\dot{\alpha} = -v_3 - bH_1v_1 + b\sin\alpha, \quad (8.155)$$

$$\dot{\beta}_1 = [v_4 + bH_1v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (8.156)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 = & n_0^2v^2r_1\sin\alpha\cos\alpha - \\ & -H_1'vr_1v_1\cos\alpha - v_2 \cdot [v_4 + bH_1v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{aligned} \quad (8.157)$$

$$\dot{v}_2 = -H_1'vr_1v_2\cos\alpha + v_1 \cdot [v_4 + bH_1v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (8.158)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_3 = & n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos(\gamma + \beta_2) - \\ & -H_1'vv_1\cos\alpha\cos(\gamma + \beta_2) - v_4 \cdot [v_4 + bH_1v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{aligned} \quad (8.159)$$

$$\dot{v}_4 = -H_1'vv_2\cos\alpha\cos(\gamma + \beta_2) + v_3 \cdot [v_4 + bH_1v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (8.160)$$

где, по-прежнему, вводим безразмерные параметры следующим образом:

$$\begin{aligned} n_0^2 &= \frac{AB}{I_1 + I_3}, \quad b = \sigma n_0, \quad [b] = 1, \\ H_1 &= \frac{H_1'}{n_0} = \frac{Bh}{(I_1 + I_3)n_0}, \quad [H_1] = 1. \end{aligned} \quad (8.161)$$

Введем также еще одну вспомогательную замену части фазовых переменных системы, а именно:

$$s_1 = v_3 + bH_1v_1, \quad s_2 = v_4 + bH_1v_2. \quad (8.162)$$

Тогда исследуемая система (8.155)–(8.160) после введения безразмерных переменных и дифференцирования

$$v_k \mapsto n_0vv_k, \quad k = 1, \dots, 4, \quad \langle \cdot \rangle = n_0v\langle' \rangle, \quad (8.163)$$

перепишется в виде

$$\alpha' = -s_1 + b\sin\alpha, \quad (8.164)$$

$$\beta_1' = s_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (8.165)$$

$$s_1' = R_1\sin\alpha\cos\alpha - s_2^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_1H_1v_1\cos\alpha, \quad (8.166)$$

$$s'_2 = s_1 s_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - R_1 H_1 v_2 \cos \alpha, \quad (8.167)$$

$$v'_1 = R_2 \sin \alpha \cos \alpha - s_2 v_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 R_2 v_1 \cos \alpha, \quad (8.168)$$

$$v'_2 = s_2 v_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 R_2 v_2 \cos \alpha, \quad (8.169)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= bH_1(\cos \gamma - \sin \gamma) + \cos(\gamma + \beta_2), \\ R_2 &= r_1 = \cos \gamma - \sin \gamma. \end{aligned} \quad (8.170)$$

Видно, что формально при  $H_1 = 0$  в системе (8.164)–(8.169) выделяется независимая подсистема четвертого порядка (8.164)–(8.167) на касательном расслоении  $T\mathbf{S}^2$  к двумерной сфере  $\mathbf{S}^2\{0 < \alpha < \pi, 0 \leq \beta_1 < 2\pi\}$ , в которой, в свою очередь, может быть выделена независимая подсистема третьего порядка (8.164), (8.166), (8.167) на своем трехмерном фазовом многообразии.

Но это, в принципе, понятно, поскольку при  $H_1 = 0$  выполняются условия отсутствия зависимости момента сил от тензора угловой скорости (см. предыдущий параграф и систему (8.80)–(8.82), (8.85)). Последнее позволяет аналогичным образом вполне проинтегрировать рассматриваемую систему четвертого порядка (8.164)–(8.167), а значит, и рассматриваемую систему шестого порядка (8.164)–(8.169), поскольку существуют два независимых аналитических первых интеграла (8.31), (8.32) или (8.119), (8.120) (см. выше о двух системах рассуждений **I** и **II**).

В данном случае для нас существенно, что  $H_1 \neq 0$ . Поэтому преобразуем имеющиеся аналитические первые интегралы (8.31), (8.32) или (8.119), (8.120). Имеем их явный вид в разных координатах:

$$\begin{aligned} & \frac{u_3 - u_1 \sin \beta_2}{\cos \beta - 2 - \sin \beta_2} \sin \gamma - \\ & - \frac{u_3 - u_1 \cos \beta_2}{\cos \beta - 2 - \sin \beta_2} \cos \gamma = W'_1 = \text{const}, \end{aligned} \quad (8.171)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_4 - u_2 \sin \beta_2}{\cos \beta - 2 - \sin \beta_2} \sin \gamma - \\ & - \frac{u_4 - u_2 \cos \beta_2}{\cos \beta - 2 - \sin \beta_2} \cos \gamma = W'_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (8.172)$$

Если мы рассматриваем случай (8.20) (т.е., в частности, случай, когда величина  $\beta_2$  является тождественной постоянной вдоль фазовых траекторий), то следующие аналитические функции постоянны на фазовых траекториях рассматриваемой системы:

$$u_3(\sin \gamma - \cos \gamma) + u_1 \cos(\gamma + \beta_2) = W_1^0 = \text{const}, \quad (8.173)$$

$$u_4(\sin \gamma - \cos \gamma) + u_2 \cos(\gamma + \beta_2) = W_2^0 = \text{const}. \quad (8.174)$$

В других переменных последние два инвариантных соотношения примут вид

$$(v_2 \cos \beta_1 - v_1 \sin \beta_1) \cos(\gamma + \beta_2) + (v_4 \cos \beta_1 - v_3 \sin \beta_1)(\sin \gamma - \cos \gamma) = W_1^0 = \text{const}, \quad (8.175)$$

$$(v_2 \sin \beta_1 + v_1 \cos \beta_1) \cos(\gamma + \beta_2) + (v_4 \sin \beta_1 + v_3 \cos \beta_1)(\sin \gamma - \cos \gamma) = W_2^0 = \text{const} \quad (8.176)$$

или

$$R_1 v_2 \cos \beta_1 - R_1 v_1 \sin \beta_1 + R_2[s_1 \sin \beta_1 - s_2 \cos \beta_1] = W_1^0 = \text{const}, \quad (8.177)$$

$$R_1 v_2 \sin \beta_1 + R_1 v_1 \cos \beta_1 - R_2[s_1 \cos \beta_1 + s_2 \sin \beta_1] = W_2^0 = \text{const}, \quad (8.178)$$

где, по-прежнему,

$$\begin{aligned} R_1 &= \cos(\gamma + \beta_2) + bH_1(\cos \gamma - \sin \gamma), \\ R_2 &= \cos \gamma - \sin \gamma. \end{aligned} \quad (8.179)$$

Далее, выразим из соотношений (8.177), (8.178) величины  $v_1$ ,  $v_2$ . Имеем:

$$v_2 R_1 = R_2 s_2 + \psi_1(\beta_1, W_1^0, W_2^0), \quad (8.180)$$

$$v_1 R_1 = R_2 s_1 + \psi_2(\beta_1, W_1^0, W_2^0), \quad (8.181)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(\beta_1, W_1^0, W_2^0) &= W_1^0 \cos \beta_1 + W_2^0 \sin \beta_1, \\ \psi_2(\beta_1, W_1^0, W_2^0) &= W_2^0 \cos \beta_1 - W_1^0 \sin \beta_1. \end{aligned} \quad (8.182)$$

Тогда система (8.164)–(8.167) примет вид независимой системы четвертого порядка:

$$\alpha' = -s_1 + b \sin \alpha, \quad (8.183)$$

$$s_1' = R_1 \sin \alpha \cos \alpha - s_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - R_2 H_1 s_1 \cos \alpha - H_1 \psi_2(\beta_1, W_1^0, W_2^0) \cos \alpha, \quad (8.184)$$

$$s_2' = s_1 s_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - R_2 H_1 s_2 \cos \alpha - H_1 \psi_1(\beta_1, W_1^0, W_2^0) \cos \alpha, \quad (8.185)$$

$$\beta_1' = s_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (8.186)$$

Систему (8.183)–(8.186) можно рассматривать как систему (8.164)–(8.167), редуцированную к уровням  $(W_1^0, W_2^0)$  аналитических первых интегралов (8.177), (8.178).

Очевидно, что

$$\psi_1(\beta_1, 0, 0) \equiv \psi_2(\beta_1, 0, 0) \equiv 0. \quad (8.187)$$

Поэтому будем рассматривать систему (8.183)–(8.186) на нулевых уровнях аналитических первых интегралов (8.177), (8.178):

$$W_1^0 = W_2^0 = 0, \quad (8.188)$$

которая примет вид

$$\alpha' = -s_1 + b \sin \alpha, \quad (8.189)$$

$$s_1' = R_1 \sin \alpha \cos \alpha - s_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - R_2 H_1 s_1 \cos \alpha, \quad (8.190)$$

$$s_2' = s_1 s_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - R_2 H_1 s_2 \cos \alpha, \quad (8.191)$$

$$\beta_1' = s_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (8.192)$$

Данная система может быть рассмотрена на касательном расщеплении  $T\mathbf{S}^2$  к двумерной сфере  $\mathbf{S}^2\{0 < \alpha < \pi, 0 \leq \beta_1 < 2\pi\}$ , в которой, в свою очередь, может быть выделена независимая подсистема третьего порядка (8.189)–(8.191) на своем трехмерном фазовом многообразии.

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка мы сначала использовали систему рассуждений **I** (см. выше), когда еще не учитывали наличие двух независимых аналитических первых интегралов вида (8.31), (8.32). Впоследствии мы сродуцировали рассматриваемую систему шестого порядка к уровням (в частности, нулевым) данных первых интегралов, т.е. была использована система рассуждений **II** (см. выше).

### 3.3. Полный список инвариантных соотношений.

Система (8.189)–(8.191) имеет вид системы уравнений (4.74), возникающей в динамике трехмерного ( $3D$ -) твердого тела в неконсервативном поле сил (см. главу 4). При этом фазовые переменные  $z_1, z_2$  в системе (4.74) соответствуют фазовым переменным  $s_2, s_1$  системы (8.189)–(8.191). Но, поскольку данная глава может быть прочтена самостоятельно, повторим некоторые рассуждения главы 4 (в новых обозначениях).

Сначала сопоставим системе третьего порядка (8.189)–(8.191) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{ds_1}{d\alpha} &= \frac{R_1 \sin \alpha \cos \alpha - s_2^2 \cos \alpha / \sin \alpha - R_2 H_1 s_1 \cos \alpha}{-s_1 + b \sin \alpha}, \\ \frac{ds_2}{d\alpha} &= \frac{s_1 s_2 \cos \alpha / \sin \alpha - R_2 H_1 s_2 \cos \alpha}{-s_1 + b \sin \alpha}.\end{aligned}\quad (8.193)$$

Используя замену  $\tau = \sin \alpha$ , перепишем систему (8.193) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{ds_1}{d\tau} &= \frac{R_1 \tau - s_2^2 / \tau - R_2 H_1 s_1}{-s_1 + b\tau}, \\ \frac{ds_2}{d\tau} &= \frac{s_1 s_2 / \tau - R_2 H_1 s_2}{-s_1 + b\tau}.\end{aligned}\quad (8.194)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$s_1 = t_1 \tau, \quad s_2 = t_2 \tau, \quad (8.195)$$

приводим систему (8.194) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{dt_1}{d\tau} + t_1 &= \frac{R_1 - t_2^2 - R_2 H_1 t_1}{-t_1 + b}, \\ \tau \frac{dt_2}{d\tau} + t_2 &= \frac{t_1 t_2 - R_2 H_1 t_2}{-t_1 + b},\end{aligned}\quad (8.196)$$

что эквивалентно системе

$$\begin{aligned}\tau \frac{dt_1}{d\tau} &= \frac{t_1^2 - t_2^2 - (b + R_2 H_1)t_1 + R_1}{-t_1 + b}, \\ \tau \frac{dt_2}{d\tau} &= \frac{2t_1 t_2 - (b + R_2 H_1)t_2}{-t_1 + b}.\end{aligned}\quad (8.197)$$

Сопоставим системе второго порядка (8.197) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{t_1^2 - t_2^2 - (b + R_2 H_1)t_1 + R_1}{2t_1 t_2 - (b + R_2 H_1)t_2}, \quad (8.198)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{t_1^2 + t_2^2 - (b + R_2 H_1)t_1 + R_1}{t_2}\right) = 0. \quad (8.199)$$

Следовательно, уравнение (8.198) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{t_1^2 + t_2^2 - (b + R_2 H_1)t_1 + R_1}{t_2} = C_1 = \text{const}, \quad (8.200)$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\frac{s_1^2 + s_2^2 - (b + R_2 H_1)s_1 \sin \alpha + R_1 \sin^2 \alpha}{s_2 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (8.201)$$

**Замечание 8.3.** Рассмотрим систему (8.189)–(8.191) с переменной диссипацией с нулевым средним [175, 176, 178, 179, 247, 264, 266, 269, 286–290, 295, 299, 313, 328, 337, 344, 406, 413, 426–430, 434, 435, 443], которая становится консервативной при  $b = R_2 H_1$ :

$$\begin{aligned}\alpha' &= -s_1 + b \sin \alpha, \\ s_1' &= R_1 \sin \alpha \cos \alpha - s_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - b s_1 \cos \alpha, \\ s_2' &= s_1 s_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - b s_2 \cos \alpha.\end{aligned}\quad (8.202)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$s_1^2 + s_2^2 - 2b s_1 \sin \alpha + R_1 \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (8.203)$$

$$s_2 \sin \alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (8.204)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (8.203), (8.204) также является первым интегралом системы (8.202). Но при  $b \neq R_2 H_1$  каждая из функций

$$s_1^2 + s_2^2 - (b + R_2 H_1)s_1 \sin \alpha + R_1 \sin^2 \alpha \quad (8.205)$$

и (8.204) по отдельности не является первым интегралом системы (8.189)–(8.191). Однако отношение функций (8.205), (8.204) является первым интегралом системы (8.189)–(8.191) при любых  $b, R_2 H_1$ .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (8.189)–(8.191). Для этого сначала преобразуем инвариантное соотношение (8.200) при  $t_2 \neq 0$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(t_1 - \frac{b + R_2 H_1}{2}\right)^2 + \left(t_2 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \\ = \frac{(b + R_2 H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1}{4}. \end{aligned} \quad (8.206)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b + R_2 H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1 \geq 0, \quad (8.207)$$

и фазовое пространство системы (8.189)–(8.191) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (8.206).

Таким образом, в силу соотношения (8.200), первое уравнение системы (8.197) примет вид

$$\tau \frac{dt_1}{d\tau} = \frac{2t_1^2 - 2(b + R_2 H_1)t_1 + 2R_1 - C_1 U_1(C_1, t_1)}{b - t_1}, \quad (8.208)$$

где

$$\begin{aligned} U_1(C_1, t_1) &= \frac{1}{2}\{C_1 \pm U_2(C_1, t_1)\}, \\ U_2(C_1, t_1) &= \sqrt{C_1^2 - 4(R_1 - (b + R_2 H_1)t_1 + t_1^2)} \end{aligned} \quad (8.209)$$

и постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (8.207).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (8.189)–(8.191) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} =$$



$$= \int \frac{(b - t_1) dt_1}{2(R_1 - (b + R_2 H_1)t_1 + t_1^2) - C_1\{C_1 \pm U_2(C_1, t_1)\}/2}. \quad (8.210)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |\sin \alpha|. \quad (8.211)$$

Если

$$t_1 - \frac{b + R_2 H_1}{2} = w_1, \quad (8.212)$$

$$b_1^2 = (b + R_2 H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1,$$

то правая часть равенства (8.210) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4w_1^2)}{(b_1^2 - 4w_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}} - \\ & -(b + R_2 H_1) \int \frac{dw_1}{(b_1^2 - 4w_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}} = \\ & = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{b + R_2 H_1}{2} I_1, \end{aligned} \quad (8.213)$$

где

$$I_1 = \int \frac{dw_3}{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}(w_3 \pm C_1)}, \quad w_3 = \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2}. \quad (8.214)$$

При вычислении интеграла (8.214) возможны три случая.

**I.**  $(b + R_2 H_1)^2 - 4R_1 > 0$ .

$$\begin{aligned} I_1 &= \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 - 4R_1}} \times \\ &\times \ln \left| \frac{\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 - 4R_1} + \sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 - 4R_1}} \right| + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 - 4R_1}} \times \end{aligned}$$

$$\times \ln \left| \frac{\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 - 4R_1} - \sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{w_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 - 4R_1}} \right| +$$

$$+ \text{const.} \quad (8.215)$$

$$\text{II. } (b + R_2 H_1)^2 - 4R_1 < 0.$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4R_1 - (b + R_2 H_1)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 w_3 + b_1^2}{b_1(w_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (8.216)$$

$$\text{III. } (b + R_2 H_1)^2 - 4R_1 = 0.$$

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - w_3^2}}{C_1(w_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (8.217)$$

Возвращаясь к переменной

$$w_1 = \frac{s_1}{\sin \alpha} - \frac{b + R_2 H_1}{2}, \quad (8.218)$$

получаем окончательный вид для величины  $I_1$ :

$$\text{I. } (b + R_2 H_1)^2 - 4R_1 > 0.$$

$$I_1 =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 - 4R_1} > 0} \times$$

$$\times \ln \left| \frac{\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 - 4R_1} \pm 2w_1}{\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 - 4R_1}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 - 4R_1}} \times$$

$$\times \ln \left| \frac{\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 - 4R_1} \mp 2w_1}{\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 - 4R_1}} \right| +$$

$$+ \text{const.} \quad (8.219)$$

$$\text{II. } (b + R_2 H_1)^2 - 4R_1 < 0.$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4R_1 - (b + R_2 H_1)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (8.220)$$

$$\text{III. } (b + R_2 H_1)^2 - 4R_1 = 0.$$

$$I_1 = \mp \frac{2w_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4w_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (8.221)$$

Таким образом, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (8.189)–(8.191), т.е. представлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

**Замечание 8.4.** В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (8.200).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный виду трансцендентного первого интеграла из плоской динамики):

$$\ln |\sin \alpha| + G_2 \left( \sin \alpha, \frac{s_1}{\sin \alpha}, \frac{s_2}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (8.222)$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (8.189)–(8.192) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной ее интегрируемости, как указано выше, достаточно найти дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (8.192).

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{dt_2}{d\tau} &= \frac{2t_1 t_2 - (b + R_2 H_1)t_2}{(b - t_1)\tau}, \\ \frac{d\beta_1}{d\tau} &= \frac{t_2}{(b - t_1)\tau}, \end{aligned} \quad (8.223)$$

то

$$\frac{dt_2}{d\beta_1} = 2t_1 - (b + R_2 H_1). \quad (8.224)$$

Очевидно, что при  $t_2 \neq 0$  выполнено равенство

$$t_1 = \frac{1}{2} \left( (b + R_2 H_1) \pm \sqrt{b_1^2 - (2t_2 - C_1)^2} \right), \quad (8.225)$$

$$b_1^2 = (b + R_2 H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1,$$

тогда интегрирование квадратуры

$$\beta_1 + \text{const} = \pm \int \frac{dt_2}{\sqrt{b_1^2 - (2t_2 - C_1)^2}} \quad (8.226)$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm \arcsin \frac{2t_1 - C_1}{\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1}}, \quad (8.227)$$

$$C_3 = \text{const}.$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2t_2 - C_1}{\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1}} \quad (8.228)$$

или, при переходе к старым переменным,

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2s_2 - C_1 \sin \alpha}{\sqrt{(b + R_2 H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1 \sin \alpha}}. \quad (8.229)$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, «привязывающего» уравнение (8.192), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому, что в последнем выражении формально необходимо вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (8.200).

Но мы проведем некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (8.200)):

$$\begin{aligned} \text{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] &= \\ &= \frac{(t_2^2 - t_1^2 + (b + R_2 H_1)t_1 - R_1)^2}{t_2^2(2t_1 - (b + R_2 H_1))^2}. \end{aligned} \quad (8.230)$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\begin{aligned} \text{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] &= \\ &= \frac{(s_2^2 - s_1^2 + (b + R_2 H_1)s_1 \sin \alpha - R_1 \sin^2 \alpha)^2}{s_2^2(2s_1 - (b + R_2 H_1) \sin \alpha)^2} \end{aligned} \quad (8.231)$$

или, окончательно,

$$\begin{aligned} -\beta_1 \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{s_2^2 - s_1^2 + (b + R_2 H_1) s_1 \sin \alpha - R_1 \sin^2 \alpha}{s_2(2s_1 - (b + R_2 H_1) \sin \alpha)} = \\ = C_3 = \operatorname{const}. \end{aligned} \quad (8.232)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (8.4)–(8.7), (8.10)–(8.15) при условии (8.138) имеет девять инвариантных соотношений: аналитические неинтегрируемые связи вида (8.20), циклические первые интегралы вида (8.18), (8.19), аналитические первые интегралы вида (8.31), (8.32), первый интеграл вида (8.201), а также первый интеграл, выраженный соотношениями (8.215)–(8.222), который является трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражается через конечную комбинацию элементарных функций, и, наконец, трансцендентный первый интеграл вида (8.4).

**Теорема 8.3.** Система (8.4)–(8.7), (8.10)–(8.15) при условиях (8.20), (8.138), (8.19), (8.188) обладает девятью инвариантными соотношениями (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Заметим также, что в аналогичной теореме 8.1 данной главы речь идет о полном наборе первых интегралов, состоящем из восьми первых интегралов, хотя имеются все девять первых интегралов. Но при доказательстве теоремы 8.1 используется система рассуждений **I** (см. выше), которая подразумевает введение таких фазовых координат (в частности,  $w_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ ), в которых векторное поле системы допускает дополнительные расслоения. При этом аналитические первые интегралы (8.31), (8.32) напрямую не используются, что позволяет обойтись меньшим количеством первых интегралов.

При доказательстве теоремы 8.3 используется система рассуждений **II** (см. выше), которая подразумевает редукцию исследуемой системы к (нулевым) уровням аналитических первых интегралов (8.31), (8.32). Последнее принципиально учитывает полный список имеющихся первых интегралов.

**3.4. Топологические аналогии.** Рассмотрим следующую систему уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + (b_* - H_1^*)\dot{\xi} \cos \xi + R_3 \sin \xi \cos \xi - \dot{\eta}_1^2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} + \\ + H_1^{**}[W_1^0 \sin \eta_1 - W_2^0 \cos \eta_1] = 0, \\ \ddot{\eta}_1 + (b_* - H_1^*)\dot{\eta}_1 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_1 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + \\ + H_1^{**}[W_1^0 \cos \eta_1 + W_2^0 \sin \eta_1] = 0, \quad b_* > 0, \quad H_1^{**} > 0, \end{aligned} \quad (8.233)$$

описывающую закрепленный сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды, при наличии зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил [112, 144, 167, 177, 192, 205, 207, 239, 242, 280, 320, 321, 323, 324, 342, 381, 382, 398, 399, 408, 414]. В отличие от предыдущих глав, порядок такой системы равен 4 (а не 3), поскольку фазовая переменная  $\eta_1$  не является циклической, что не приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка.

Ее фазовым пространством является касательное расслоение

$$T\mathbf{S}^2\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \xi, \eta_1\} \quad (8.234)$$

к двумерной сфере  $\mathbf{S}^2\{\xi, \eta_1\}$ , при этом уравнение больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0 \quad (8.235)$$

задает семейство интегральных многообразий лишь при  $W_1^0 = W_2^0 = 0$ .

Нетрудно убедиться, что система (8.233) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией (с нулевым средним) на касательном расслоении (8.234) к двумерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

**Теорема 8.4.** Система (8.4)–(8.7), (8.10)–(8.15) при условиях (8.20), (8.138), (8.19) эквивалентна динамической системе (8.233).

Действительно, достаточно положить  $\alpha = \xi$ ,  $\beta_1 = \eta_1$ ,  $b = -b_*$ ,  $H_1 = H_1^{**}$ ,  $R_2 H_1 = -H_1^*$ ,  $R_1 - b R_2 H_1 = R_3$ .

О более общих топологических аналогиях см. также [257, 269, 271, 313, 344, 346].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонов С. А., Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Некоторые актуальные задачи геометрии и механики// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 34.
2. Агафонов С. А., Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. О роли женщин в развитии современной механики// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика и ее приложения. Геометрия и механика. — 2012. — 76. — С. 3.
3. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Некоторое уточнение алгоритма Конвея// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2005. — 3. — С. 53–55.
4. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Архимедовы равномерные структуры// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 46–51.
5. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Многообразия непрерывных структур// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 71–86.
6. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Общий спектральный подход к динамике сплошной среды// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 52–70.
7. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Феноменологический подход к определению межфазных сил// Докл. РАН. — 2007. — 412, № 1. — С. 44–47.
8. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Группы цветов// Современная математика и ее приложения. Геометрия и механика. — 2009. 62. — С. 15–27.
9. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Операторы усреднения и реальные уравнения гидромеханики// Современная математика и ее приложения. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. — 2009. — 65. — С. 31–47.
10. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Псевдодифференциальные операторы в теории многофазных многоскоростных течений// Современная математика и ее приложения. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. — 2009. — 65. — С. 11–30.
11. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Формулы интегрирования десятого порядка точности и выше// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2010. — 4. — С. 3–7.

12. *Альев Г. А.* Пространственная задача о погружении диска в сжимаемую жидкость// Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. — 1988. — № 1. — С. 17–20.
13. *Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. — Минск: Изд-во БГУ, 1982.
14. *Андронов А. А.* Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
15. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.
16. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1967.
17. *Андронов А. А., Поптягин Л. С.* Грубые системы// Докл. АН СССР. — 1937. — 14, № 5. — С. 247–250.
18. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны// Тр. МИАН. — 1967. — 90.
19. *Аппель П.* Теоретическая механика: в 2-х т. — М.: Физматгиз, 1960.
20. *Арансон С. Х.* Динамические системы на двумерных многообразиях// Тр. Пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 2. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970.
21. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях// Успехи мат. наук. — 1986. — 41, № 1.
22. *Арнольд В. И.* Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела в идеальной жидкости// Успехи мат. наук. — 1969. — 24, № 3. — С. 225–226.
23. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики// Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы в математике. Фундаментальные направления — М.: ВИНТИ, 1985. — 3. — 304 с.
24. *Барбашин Е. А., Табуева В. А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. — М.: Наука, 1969.
25. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.
26. *Белецкий В. В., Яншин А. М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. — Киев: Наукова думка, 1984.
27. *Беляев А. В.* О движении многомерного тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести// Мат. сб. — 1981. — 114, № 3. — С. 465–470.



28. Бендиксон И. О кривых определяемых дифференциальными уравнениями// Успехи мат. наук. — 1941. — 9.
29. Бивин Ю. К. Изменение направления движения твердого тела на границе раздела сред// Изв. АН СССР. Мех. твердого тела. — 1981. — № 4. — С. 105–109.
30. Бивин Ю. К., Викторов В. В., Степанов Л. П. Исследование движения твердого тела в глинистой среде// Изв. АН СССР. Мех. твердого тела. — 1978. — № 2. — С. 159–165.
31. Бивин Ю. К., Глухов Ю. М., Пермяков Ю. В. Вертикальный вход твердых тел в воду// Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. — 1985. — № 6. — С. 3–9.
32. Биркгоф Дж. Динамические системы. — М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
33. Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астерофизике и газовой динамике. — М.: Наука, 1980.
34. Богоявленский О. И. Динамика твердого тела с  $n$  эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — 272, № 6. — С. 1364–1367.
35. Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — 287, № 5. — С. 1105–1108.
36. Богоявленский О. И., Ивал Г. Ф. Топологический анализ интегрируемых случаев В. А. Стеклова// Успехи мат. наук. — 1985. — 40, № 4. — С. 145–146.
37. Борисенок И. Т., Локишин Б. Я., Привалов В. А. О динамике полета осесимметричных вращающихся тел в воздушной среде// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела — 1984. — № 2. — С. 35–42.
38. Борисенок И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики// Фунд. и прикл. мат. — 1999. — 5, № 3. — С. 775–790.
39. Борисенок И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 29–31.
40. Браилов А. В. Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения// Докл. АН СССР. — 1983. — 268, № 5. — С. 1043–1046.
41. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979.
42. Бурбаки Н. Интегрирование. — М.: Наука, 1970.
43. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли — М.: Мир, 1972.
44. Буров А. А. Неинтегрируемость уравнений плоских колебаний спутника на эллиптической орбите// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 1. — С. 71–73.

45. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика продольного и бокового движения. — М.: Машиностроение, 1969.
46. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1988.
47. Вишик С. В., Должанский С. Ф. Аналогии уравнений Эйлера—Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли// Докл. АН СССР. — 238, № 5. — С. 1032–1035.
48. Вышкварко Ю. Г., Шамолин М. В. Некоторые вопросы качественной теории в динамике твердого тела// Материалы Всерос. конф., посвящ. 110-летию матем. ф-та МПГУ «Математика, информатика и методика их преподавания», Москва, 14–16 марта 2011 г. — М.: МПГУ, 2011. — С. 40–41.
49. Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрия и механика: задачи, подходы, методы// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики»/ Фунд. и прикл. мат. — 2001. — 7, № 1. — С. 301.
50. Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. О некоторых топологических инвариантах потоков с комплексным потенциалом// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики»/ Фунд. и прикл. мат. — 2001. — 7, № 1. — С. 305.
51. Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрия и механика: задачи, подходы, и методы// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики»/ Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 16.
52. Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. О некоторых топологических инвариантах потоков с комплексным потенциалом// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики»/ Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. — 23. — С. 19.
53. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
54. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. О кинематике твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики»/ Фунд. и прикл. мат. — 2001. — 7, № 1. — С. 315.
55. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
56. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в  $\mathbb{R}^n$ // Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — № 5. — С. 37–41.

57. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Валерий Владимирович Трофимов// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 5–15.
58. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики»/ Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 30.
59. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. О кинематике твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики»/ Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 24–25.
60. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в  $n$ -мерном пространстве// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики»/ Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 31.
61. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Современная математика и ее приложения. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. — 2009. — 65. — С. 3–10.
62. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. П-теорема теории размерностей (к 100-летию доказательства)// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики»/ Современная математика и ее приложения. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. — 2009. — 65. — С. 3.
63. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Современная математика и ее приложения. Геометрия и механика. — 2012. — 76. — С. 3–10.
64. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Современная математика и ее приложения. Геометрия и механика. — 2012. — 76. — С. 22–39.
65. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Тез. засед. сем. «Ак-

- туальные проблемы геометрии и механики»/ Современная математика и ее приложения. Геометрия и механика. — 2012. — 76. — С. 9.
66. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1973.
  67. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
  68. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
  69. *Горячев Д. Н.* Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера// Варшав. унив. изв. — 1916. — 3. — С. 1–15.
  70. *Градитейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и производных. — М.: Гостехиздат, 1963.
  71. *Гриффитс Ф.* Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. — М.: Мир, 1986.
  72. *Гробман Д. М.* О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. — 1959. — 128, № 5. — С. 880–881.
  73. *Гробман Д. М.* Топологическая классификация окрестностей особой точки в  $n$ -мерном пространстве// Мат. сб. — 1962. — 56, № 1. — С. 77–94.
  74. *Гудков Д. А.* О понятии грубости и степеней негрубости для плоских алгебраических кривых// Мат. сб. — 1965. — 67, № 4.
  75. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.
  76. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа// Докл. АН СССР. — 1984. — 279, № 2. — С. 294–297.
  77. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
  78. *Ерошин В. А.* Рикошет пластинки от поверхности идеальной несжимаемой жидкости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1970. — № 6. — С. 99–104.
  79. *Ерошин В. А.* Погружение диска в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности// Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. — 1983. — № 2. — С. 142–144.
  80. *Ерошин В. А.* Экспериментальное изучение волн сжатия, возбуждающихся в упругом цилиндре при входе в воду// Прикладные проблемы прочности и пластичности. — Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1990. — С. 54–59.
  81. *Ерошин В. А.* Проникание упругого цилиндра в воду с большой скоростью// Препринт № 5. М.: Ин-т механики МГУ, 1991.

82. *Ерошин В. А.* Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью// Изв. РАН. Мех. жидк. и газа. — 1992. — № 5. — С. 20–30.
83. *Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И, Якимов Ю. Л.* Экспериментальное определение давления на диске при погружении в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности// Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. — 1988. — № 2. — С. 21–25.
84. *Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И, Якимов Ю. Л.* Экспериментальное определение момента гидродинамических сил при несимметричном проникании диска в сжимаемую жидкость// Изв. АН СССР. — Мех. жидк. и газа. — 1990. — № 5. — С. 88–94.
85. *Ерошин В. А., Плюснин А. В., Созоненко Ю. А., Якимов Ю. Л.* О методике исследования изгибных колебаний упругого цилиндра при входе в воду под углом к свободной поверхности// Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. — 1989. — № 6. — С. 164–167.
86. *Ерошин В. А., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде// Сб. науч.-метод. статей по теор. мех. Вып. 18. — М.: Наука, 1987. — С. 75–78.
87. *Ерошин В. А., Романенков Н. И., Серебряков И. В., Якимов Ю. Л.* Гидродинамические силы при ударе тупых тел о поверхность сжимаемой жидкости// Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. — 1980. — № 6. — С. 44–51.
88. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* О движении тела в среде при струйном обтекании// Тез. всесоюзной конференции по устойчивости движения, колебаниям механических систем и аэродинамике. Москва, 2–4 февр. 1988. — М.: МАИ, 1988. — С. 21.
89. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Математическое моделирование в задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании. Тез. докл. Чебышевских чтений// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1995. — № 6. — С. 17.
90. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. и газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
91. *Жуковский Н. Е.* О падении легких, продолговатых тел, вращающихся вокруг своей продольной оси// Полное собр. соч. Т. 5. — М.: Физматгиз, 1937. — С. 72–80, 100–115.
92. *Жуковский Н. Е.* О парении птиц// Полное собр. соч. Т.5. — М.: Физматгиз, 1937. — С.49–59.

93. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Топология. — М.-Л.: Гостехиздат, 1938.
94. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
95. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. — М.: Наука, 1976.
96. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. — М.: МГУ, 1980.
97. *Козлов В. В.* Гидродинамика гамильтоновых систем// Вестн. МГУ. Сер.1. Мат. Мех. — 1983 — № 6. — С. 10–22.
98. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Успехи мат. наук. — 1983. — 38, № 1 — С. 3–67.
99. *Козлов В. В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. — 1985. — № 6. — С. 28–33.
100. *Козлов В. В.* О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. — 1989. — № 5. — С. 10–17.
101. *Козлов В. В.* К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. мех. — 1990. — № 1. — С. 79–87.
102. *Козлов В. В., Колесников Н. Н.* Об интегрируемости гамильтоновых систем// Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1979. — № 6, С. 88–91.
103. *Козлов В. В., Онищенко Д. А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа// Докл. АН СССР. — 1982. — 266, № 6. — С. 1298–1300.
104. *Комаров П. А., Шамолин М. В.* Оптимизация размещения нескольких космических аппаратов на ракете-носителе// Тр. Шестого Междун. Аэрокосм. Конгр. IAC'09, Москва, 23–27.08.2009. — М., 2009, С. 132–135.
105. *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1947.
106. *Лич Дж. У.* Классическая механика. — М.: ИЛ, 1961.
107. *Локшин Б. Я.* Об одном движении быстро вращающегося тела в воздухе// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. мех. — 1970. — № 6. — С. 93–98.
108. *Локшин Б. Я.* Об устойчивости плоского движения быстро вращающегося симметричного тела в атмосфере// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. мех. — 1971. — № 4. — С. 113–118.
109. *Локшин Б. Я.* О винтовом движении быстро вращающегося твердого симметричного тела в воздухе// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. мех. — 1973. — № 4. — С. 79–86.

110. *Локишин Б. Я.* Об устойчивости стационарных движений быстро вращающегося симметричного твердого тела в воздухе// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. — 1976. — № 2. — С. 18–24.
111. *Локишин Б. Я., Окунев Ю. М., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Некоторые интегрируемые случаи пространственных колебаний твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. докл. XXI науч. чтений по космонавтике (Москва, 28–31.01.1997). — М.: ИИЕТ РАН, 1997. — С. 82–83.
112. *Локишин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1986.
113. *Локишин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1992.
114. *Ляпунов А. М.* Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости// В кн.: Собр. соч. Т. I. — М.: Изд-во АН СССР, 1954. — С. 320–324.
115. *Манин Ю. И.* Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы в математике. — М.: ВИНТИ, 1978. — 11. — С. 5–112.
116. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1986.
117. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981.
118. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973.
119. *Мокеев А. В., Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной диагностики// Материалы Всерос. конф., посвящ. 110-летию матем. ф-та МПГУ «Математика, информатика и методика их преподавания», Москва, 14–16 марта 2011 г. — М.: МПГУ, 2011. — С. 72–74.
120. *Неймарк Ю. И.* О движениях, близких к двоякоасимптотическому движению// Докл. АН СССР. — 1967. — 172, № 5. — С. 1021–1024.
121. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
122. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.
123. *Новиков С. П., Шмельцер И.* Периодические решения уравнения Кирхгофа свободного движения твердого тела и идеальной жидкости и расширенная теория Люстерника—Шнирельмана—Морса (ЛМШ) I// Функци. анализ и его прил. — 1981. — 15, № 3. — С. 54–66.

124. *Одареев В. А.* Декомпозиционный анализ динамики и устойчивости продольного возмущенного движения экраноплана// Докторская диссертация. — М.: МГАИ, 1995.
125. *Окунев Ю. М., Садовничий В. А.* Модельные динамические системы одной задачи внешней баллистики и их аналитические решения// Проблемы современной механики/ Под ред. чл.-корр. РАН С. С. Григоряна. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — С. 28–46.
126. *Окунев Ю. М., Садовничий В. А., Самсонов В. А., Черный Г. Г.* Комплекс моделирования задач динамики полета// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — № 6. — С. 66–75.
127. *Окунев Ю. М., Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов комплексных неавтономных уравнений// Современная математика и ее приложения. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. — 2009. — 65. — С. 122–131.
128. *Пали Дж., Смейл С.* Теоремы структурной устойчивости// Сб. пер. Мат. — 1969. — 13, № 2. — С. 145–155.
129. *Палис Ж., Ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. Введение. — М.: Мир, 1986.
130. *Переломов А. М.* Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости// Функци. анализ и его прил. — 1981. — 15, № 2. — С. 83–85.
131. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.-Л.: Наука, 1964.
132. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1967.
133. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые приложения теории фракталов в динамике// Материалы Всерос. конф., посвящ. 110-летию матем. ф-та МПГУ «Математика, информатика и методика их преподавания», Москва, 14–16 марта 2011 г. — М.: МПГУ, 2011. — С. 81–82.
134. *Привалов В. А., Самсонов В. А.* Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. — 1990. — № 2. — С. 32–38.
135. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
136. *Пуанкаре А.* Новые методы в небесной механике// Избранные труды. Т. 1,2. — М.: Наука, 1971, 1972.
137. *Пуанкаре А.* О науке. — М.: Наука, 1983.
138. *Рейснинг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1974.
139. *Рыжова В. Е., Шамолин М. В.* О некоторых аналогиях в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Седьмой всесоюз.



- съезд по теоретич. и прикл. механ., Москва, 15–21 авг., 1991. — М., 1991.
140. *Садэтов С. Т.* Условия интегрируемости уравнений Кирхгофа// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1990. — № 3. — С. 56–62.
  141. *Сальникова Т. В.* Об интегрируемости уравнений Кирхгофа в симметричном случае// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1985. — № 4. — С. 68–71.
  142. *Самсонов В. А.* О квазистационарных движениях механических систем// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. — 1978. — № 1. — С. 32–50.
  143. *Самсонов В. А.* Очерки о механике. Некоторые задачи, явления и парадоксы. — М.: Наука, 1980.
  144. *Самсонов В. А., Ерошин В. А., Константинов Г. А., Макарушин В. М.* Две модельные задачи о движении тела в среде при струйном обтекании// Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3427. — Москва, 1987.
  145. *Самсонов В. А., Локишин Б. Я., Привалов В. А.* Качественный анализ// Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3245. — Москва, 1985.
  146. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
  147. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* О движении тела в сопротивляющейся среде// Современные проблемы механики и технологии машиностроения. Всес. конф. (16–18 апреля 1989 г.)/ Тез. докл. — М.: ВИНТИ, 1989. — С. 128–129.
  148. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием// Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3969. — Москва, 1990.
  149. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием// Нелинейные колебания механических систем/ Тез. докл. II Всес. конф. (сентябрь 1990 г.), Ч. 2. — Горький, 1990. — С. 95–96.
  150. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании// Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4141. — Москва, 1991.
  151. *Самсонов В. А., Шамолин М. В., Ерошин В. А., Макарушин В. М.* Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4396. — Москва, 1995.
  152. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1954.
  153. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, Т. 1, 2. — М.: Наука, 1983, 1984.

154. Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Исследование межфазной зоны в некоторой сингулярно предельной задаче// Материалы Воронежской весенней матем. шк. «Современные методы теории краевых задач. «Понтрягинские чтения-XXII». Воронеж, 3–9 мая 2011 г. — Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2011. — С. 164–165.
155. Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Локальная разрешимость одной задачи со свободной границей// Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2011. — № 8(89). — С. 86–94.
156. Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Локальная разрешимость одной однофазной задачи со свободной границей// Материалы Воронежской зимней матем. шк. «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж, 26 января–1 февраля 2011 г. — Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2011. — С. 307.
157. Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Исследование межфазной зоны в одной сингулярно предельной задаче// Современная математика и ее приложения. Дифференциальные уравнения в частных производных и оптимальное управление. — 2012. — 78. — С. 109–118.
158. Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Квазистационарная задача Стефана со значениями на фронте, зависящими от его геометрии// Современная математика и ее приложения. Дифференциальные уравнения в частных производных и оптимальное управление. — 2012. — 78. — С. 126–134.
159. Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Локальная разрешимость капиллярной задачи// Современная математика и ее приложения. Дифференциальные уравнения в частных производных и оптимальное управление. — 2012. — 78. — С. 119–125.
160. Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Локальная разрешимость однофазной задачи со свободной границей// Современная математика и ее приложения. Дифференциальные уравнения в частных производных и оптимальное управление. — 2012. — 78. — С. 99–108.
161. Синг Дж. Л. Классическая динамика. — М.: Физматгиз, 1963.
162. Смейл С. Грубые системы не плотны. — Сб. пер. Мат. — 1967. — 11, № 4. — С. 107–112.
163. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы// Успехи мат. наук. — 1970. — 25, № 1. — С. 113–185.
164. Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893.
165. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959.

166. *Стрекалов В. В.* Рикошет при входе в воду диска, плоскость которого близка к вертикальной// Уч. записки ЦАГИ. — 1977. — 8, № 5. — С. 66–73.
167. *Суворова Е. И., Шамолин М. В.* Топографические системы Пуанкаре и системы сравнения высших порядков// Материалы конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж, 26 января–2 февраля 2003 г. — Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2003. — С. 251–252.
168. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946.
169. *Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев Вик. В., Королев Г. Л.* Асимптотическая теория отрывных течений. — М.: Наука, 1987.
170. *Табачников В. Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки// Труды ЦАГИ. Вып. 1621. — Москва, 1974. — С. 18–24.
171. *Трофимов В. В.* Вложения конечных групп регулярными элементами в компактные группы Ли// Докл. АН СССР. — 1976. — 226, № 4. — С. 785–786.
172. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
173. *Трофимов В. В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
174. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6, С. 1349–1353.
175. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Диссипативные системы с нетривиальными обобщенными классами Арнольда—Маслова. Тез. докл. сем. по вект. и тенз. ан. им. П. К. Рашевского// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2000. — № 2, С. 62.
176. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фунд. и прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
177. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. — М.: ОНТИ, 1937.
178. *Фахрутдинова Р. Р., Шамолин М. В.* О сохранении фазового объема в динамических системах с переменной диссипацией «с нулевым средним»// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики»/ Фунд. и прикл. мат. — 2001. — 7, № 1. — С. 311.
179. *Фахрутдинова Р. Р., Шамолин М. В.* О сохранении фазового объема в динамических системах с переменной диссипацией «с нулевым средним»// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы

- геометрии и механики»/ Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 22.
180. *Фоменко А. Т.* Реализация циклов в компактных симметрических пространствах вполне геодезическими подмногообразиями// Докл. АН СССР. — 1970. — 195, № 4. — С. 789–792.
  181. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
  182. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// В кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
  183. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
  184. *Шамолин М. В.* Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — № 2. — С. 52–56.
  185. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — № 1. — С. 52–58.
  186. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. и мех. — 1993. — 57, № 4. — С. 40–49.
  187. *Шамолин М. В.* Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов задачи о движении тела в сопротивляющейся среде// Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. 24–28 мая 1993. Тезисы докладов. Ч. 2. — Киев: Знание, 1993. — С. 62–63.
  188. *Шамолин М. В.* Относительная структурная устойчивость задачи о движении тела в сопротивляющейся среде// Механика и ее применения. Научн. конф. 9–11 ноября 1993. Тез. докл. — Ташкент: ТашГУ, 1993. — С. 20–21.
  189. *Шамолин М. В.* Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1993. — № 2. — С. 66–70.
  190. *Шамолин М. В.* Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. 1993. — № 1. — С. 68–71.
  191. *Шамолин М. В.* Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде// Докл. РАН. — 1994. — 337, № 5. — С. 611–614.
  192. *Шамолин М. В.* Об относительной грубости динамических систем в задаче о движении тела в среде при струйном обтекании// Моделирование и исследование устойчивости систем. На-

- учн. конф. 16–20 мая 1994. Тез. докл. — Киев, 1994. — С. 144–145.
193. *Шамолин М. В.* Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов с предельными циклами в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. 15–19 мая 1995. Тезисы докладов (Исследование систем.). — Киев, 1995. — С. 125.
  194. *Шамолин М. В.* Об относительной грубости динамических систем в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде. Тез. докл. Чебышевских чтений// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1995. — № 6. — С. 17.
  195. *Шамолин М. В.* Относительная структурная устойчивость динамических систем задачи движения тела в среде// Аналитические, численные и экспериментальные методы в механике. Сб. науч. трудов/ Под ред. Б. Е. Победри и В. В. Козлова. — М.: Изд-во МГУ, 1995. — С. 14–19.
  196. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996, — № 4. — С. 57–69.
  197. *Шамолин М. В.* Введение в пространственную динамику движения твердого тела в сопротивляющейся среде// Материалы межд. конф. и Чебышевских чтений, посвящ. 175-летию со дня рожд. П. Л. Чебышева. Москва, 14–19 мая 1996 г. — Т. 2. — М.: МГУ. — С. 371–373.
  198. *Шамолин М. В.* Качественные методы в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// II Сибирский Конгресс по прикл. и индустр. матем. Новосибирск, 25–30.06.1996. Тезисы докладов. Ч. III — Новосибирск, 1996, — С. 267.
  199. *Шамолин М. В.* Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой// Докл. РАН, 1996. — 349, № 2. — С. 193–197.
  200. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае в динамике пространственного движения тела в сопротивляющейся среде// II Симпозиум по классической и небесной механике. Тез. докл. Великие Луки, 23–28.08.1996. — Москва: Великие Луки, 1996. — С. 91–92.
  201. *Шамолин М. В.* Определение относительной грубости и двухпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела// Успехи мат. наук. — 1996. — 51, № 1. — С. 175–176.
  202. *Шамолин М. В.* Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. — 1996. — № 2. — С. 55–63.

203. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения// Тез. докл. матем. конф. «Еругинские чтения III». (Брест, 14–16.05.1996). — Брест, 1996. — С. 107.
204. *Шамолин М. В.* Список интегралов динамических уравнений в пространственной задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. 20–24 мая 1996 г. Тезисы докладов (Исследование систем). — Киев, 1996. — С. 142.
205. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби задачи о пространственном маятнике, помещенном в поток набегающей среды// Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. 19–23 мая 1997 г. Тезисы докладов (Mechanical Systems). — Киев, 1997. — С. 143.
206. *Шамолин М. В.* Качественные методы в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// YSTM'96: «Молодежь и наука — третье тысячелетие». Тр. межд. конгресса — М.: НТА «АПФН», 1997 г. — (Сер. Профессионал), 2. — С. 1–4.
207. *Шамолин М. В.* Математическое моделирование динамики пространственного маятника, обтекаемого средой// Тр. VII Межд. Симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», 26–29 июня 1997 г., Феодосия. — Херсон: Изд-во ХГТУ, 1997. — С. 153–154.
208. *Шамолин М. В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. — 1997. — № 2. — С. 65–68.
209. *Шамолин М. В.* Пространственная динамика твердого тела, взаимодействующего со средой// Сем. по мех. систем и пробл. управления движ. и навиг. — Изв. РАН. Мех. тверд. тела. — 1997. — № 4. — С. 174.
210. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения// Успехи матем. наук. — 1997. — 52, № 3. — С. 177–178.
211. *Шамолин М. В.* Частичная стабилизация вращательных движений тела в среде при свободном торможении// Тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием «Проблемы небесной механики», Санкт-Петербург, 3–6 июня 1997 г. Под ред. А. Г. Сокольского, А. С. Баранова/ — СПб.: Изд-во ИТА РАН, 1997. — С. 183–184.
212. *Шамолин М. В.* Абсолютная и относительная структурная устойчивость в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Тр. Межд. конф. «Математика в индустрии» (ICIM-98, Таганрог, 29.06.–03.07.1998). — Таганрог: Изд-во ТГПИ, 1998. — С. 332–333.

213. *Шамолин М. В.* Качественные и численные методы в некоторых задачах пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. 5 Межд. совещ.-сем. «Инженерно-физические проблемы новой техники» (Москва, 19–22.05. 1998). — М.: Изд-во МГТУ, 1998. — С. 154–155.
214. *Шамолин М. В.* Методы нелинейного анализа в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. Межд. Конгр. «Нелинейный анализ и его приложения». Москва, 1–5 сент. 1998 г. — Москва, 1998. — С. 131.
215. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой в условиях квазистационарности// Тез. докл. Всерос. научн.-техн. конф. молодых ученых «Современные проблемы аэрокосмической науки». Жуковский, 27–29 мая 1998 г. — М.: Изд-во ЦАГИ, 1998. — С. 89–90.
216. *Шамолин М. В.* Методы нелинейного анализа в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой (Methods of non-linear analysis in dynamics of a rigid interacting with a medium), In: CD-Proc. of the Cong. «Nonlinear Analysis and It's Applications», Moscow, Russia, Sept. 1–5, 1998. — Москва, 1999. — С. 497–508.
217. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Успехи матем. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
218. *Шамолин М. В.* Семейства трехмерных фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// III межд. Симп. по клас. и небесн. механ. Тез. докл. Великие Луки, 23–27.08.1998 г. — Москва-Великие Луки: ВЦ РАН, 1998. — С. 165–167.
219. *Шамолин М. В.* Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. — 1998, № 6 — С. 29–37.
220. *Шамолин М. В.* Некоторые классы частных решений в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. — 1999. — № 2. — С. 178–189.
221. *Шамолин М. В.* Нелинейные динамические эффекты при пространственном торможении тела в сопротивляющейся среде// Тез. докл. III межд. конф. «Чкаловские чтения. Инж.-физ. пробл. авиац. и космич. техники», 1–4.06.1999. — Егорьевск: ЕАТК ГА, 1999. — С. 257–258.
222. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
223. *Шамолин М. В.* Семейства длиннопериодических траекторий в пространственной динамике твердого тела// Моделирование и

- исследование устойчивости систем. Научн. конф. 25–29.05.1999. Тезисы докладов (System Modelling). — Киев, 1999. — С. 60.
224. *Шамолин М. В.* О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией// Успехи матем. наук. — 1999, 54, № 5. — С. 181–182.
225. *Шамолин М. В.* Задача о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде и один случай интегрируемости// Book of Abs. Third Int. Conf. «Differential Equations and Applications», Saint-Petersburg, Russia, June 12–17, 2000. — Изд-во СПбГТУ, 2000. — С. 198.
226. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
227. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и динам. системам. Суздаль, 21–26.08.2000. — Владимир: Влад. гос. унив., 2000. — С. 196–197.
228. *Шамолин М. В.* Многомерные топографические системы Пуанкаре и трансцендентная интегрируемость// IV Сибирский Конгресс по прикл. и индустр. матем. Новосибирск, 26.06–01.07.2000. Тезисы докладов. — Новосибирск: Изд-во ин-та матем., Ч. I, 2000. — С. 25–26.
229. *Шамолин М. В.* Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН, 2000. — 371, № 4. — С. 480–483.
230. *Шамолин М. В.* Об одном случае интегрируемости по Якоби в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. Межд. конф. по дифферен. и интегр. уравнениям. Одесса, 12–14.09.2000. — Одесса: Изд-во «Астро-Принт», 2000. — С. 294–295.
231. *Шамолин М. В.* О грубости диссипативных систем и относительной грубости систем с переменной диссипацией. Тез. докл. сем. по вект. и тенз. ан. им. П. К. Рашевского// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2000. — № 2. — С. 63.
232. *Шамолин М. В.* О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек// Успехи мат. наук. — 2000. — 55, № 3. — С. 187–188.
233. *Шамолин М. В.* Сопоставление некоторых интегрируемых случаев из двумерной, трехмерной и четырехмерной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. V Крымской Межд. Мат. школы «Метод функции Ляпунова и его приложения» (МФЛ—2000). Крым, Алушта, 05–13.09.2000. — Симферополь, 2000. — С. 169.



234. *Шамолин М. В.* Интегрируемость задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Фунд. и прикл. мат. — 2001. — 7, 1. — С. 309.
235. *Шамолин М. В.* Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Фунд. и прикл. мат. — 2001. — 7, № 1. — С. 302–303.
236. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. VIII Всерос. съезда по теорет. и прикл. механ. Пермь, 23–29.08.2001. — Екатеринбург: УрО РАН, 2001. — С. 599–600.
237. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Моделирование и исследование устойчивости систем. (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. 22–25.05.2001. Thes. of Conf. Rep. — Kyiv, 2001. — С. 344.
238. *Шамолин М. В.* Об устойчивости движения твердого тела в сопротивляющейся среде, закрученного вокруг своей продольной оси// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. — 2001. — № 1. — С. 189–193.
239. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 5. — С. 22–28.
240. *Шамолин М. В.* Случаи интегрируемости уравнений пространственной динамики твердого тела// Прикл. мех. — 2001. — 37, № 6. — С. 74–82.
241. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и дин. системам. Суздаль, 01–06.07.2002. — Владимир: Влад. гос. унив., 2002. — С. 142–144.
242. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Успехи матем. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
243. *Шамолин М. В.* Интегрируемость в трансцендентных функциях в динамике твердого тела// Тез. докл. научн. конф. «Ломоносовские чтения–2003». Секц. механ. 17–27 апреля 2003 г., Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова — М.: Изд-во МГУ, 2003. — С. 130.
244. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости неконсервативных динамических систем в трансцендентных функциях// Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. 27–30.05.2003. Thes. of Conf. Rep. — Kyiv, 2003. — С. 377.

245. *Шамолин М. В.* Об одной пространственной задаче о движении твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. докл. межд. научн. конф. по мех. «Третьи Поляховские чтения». Санкт-Петербург, 4–6 февраля 2003 г. — СПб.: Изд-во НИИХ С.-Пб. ун-та, 2003. — С. 170–171.
246. *Шамолин М. В.* Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой// Прикл. мех. — 2004. — 40, № 4. — С. 137–144.
247. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры (Differential equations and computer algebra systems (DE&CAS'2005)). Матер. Междунар. конф., Брест, 5–8 окт. 2005 г. В 2 ч., Ч. 1. — Минск.: Изд-во БГПУ, 2005. — С. 231–233.
248. *Шамолин М. В.* Интегрируемость в трансцендентных функциях в динамике твердого тела// Мат. конф. «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования», Воронеж, 12–17.12.2005. — Воронеж: Воронежская гос. академия. — 2005. — С. 240.
249. *Шамолин М. В.* Интегрируемость неконсервативных систем в трансцендентных элементарных функциях// Мат. конф. «X Міжд. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука» 13–15 тр., 2004, Киев. — Киев, 2004. — С. 279.
250. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Изд-во "Экзамен", 2004.
251. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае в динамике на  $so(4)x\mathbb{R}^4$ // Тез. докл. Всеросс. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения» (СамДиф-2005), Самара, 27 июня–2 июля 2005 г. — Самара: Изд-во «Универс-групп», 2005. — С. 97–98.
252. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на  $so(4) \times \mathbb{R}^n$ // Успехи мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
253. *Шамолин М. В.* О движении твердого тела в сопротивляющейся среде при учете вращательных производных момента аэродинамических сил по угловой скорости// Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. 23–25.05.2005. Thes. of. Conf. Rep. — Kyiv, 2005. — С. 351.
254. *Шамолин М. В.* О движении тела в сопротивляющейся среде при учете вращательных производных момента аэродинамических сил по угловой скорости// Тез. докл. научн. конф. «Ломоносовские чтения-2005». Секц. механ. Апрель 2005 г., Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова — М.: Изд-во МГУ, 2005. — С. 182.

255. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. Межд. конф. «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посв. 100-летию С. М. Никольского, Москва, 23–29 мая 2005 г. — М.: Матем. инст. им. В. А. Стеклова РАН, 2005. — С. 244.
256. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости// Докл. РАН. — 2005. — 403, № 4. — С. 482–485.
257. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. и мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
258. *Шамолин М. В.* К задаче о пространственном торможении твердого тела в сопротивляющейся среде// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. — 2006. — № 3. — С. 45–57.
259. *Шамолин М. В.* К пространственной задаче взаимодействия твердого тела с сопротивляющейся средой// Тез. докл. IX Всеросс. съезда по теорет. и прикл. мех., Нижний Новгород, 22–28 авг. 2006 г. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госунта им. Н. И. Лобачевского, 2006. — Том I. — С. 120.
260. *Шамолин М. В.* Модельная задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4818. — Москва, 2006.
261. *Шамолин М. В.* О случае полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела// Тез. докл. межд. конф. по дифф. уравн. и дин. сист. Владимир, 10–15.07.2006. — Владимир: Влад. гос. ун-т, 2006. — С. 226–228.
262. *Шамолин М. В.* О траекториях характерных точек твердого тела, движущегося в среде// Межд. конф. «Пятые Окуневские чтения», 26–30 июня 2006 г. Тез. докл. — Санкт-Петербург: Балт. гос. техн. ун-т, 2006. — С. 34.
263. *Шамолин М. В.* Пространственная задача о движении твердого тела в сопротивляющейся среде // VIII Крымская межд. матем. школа «Метод функции Ляпунова и его приложения». Алушта, 10–17.09.2006. Таврич. нац. ун-т. Тез. докл. — Симферополь: ДиАйПи, 2006. — С. 184.
264. *Шамолин М. В.* Системы с переменной диссипацией в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Четвертые Поляховские чтения. Тез. докл. Межд. научн. конф. по механ., Санкт-Петербург, 7–10 февр. 2006 г. — Спб.: Изд-во «ВВМ», 2006. — С. 86.

265. *Шамолин М. В.* Влияние вращательных производных момента силы воздействия среды по угловой скорости твердого тела на его движение// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 44.
266. *Шамолин М. В.* Интегрируемость в элементарных функциях систем с переменной диссипацией// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 38.
267. *Шамолин М. В.* Интегрируемость задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 21.
268. *Шамолин М. В.* Интегрируемость сильно неконсервативных систем в трансцендентных элементарных функциях// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 40.
269. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Изд-во «Экзамен», 2007.
270. *Шамолин М. В.* Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 17.
271. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Издание 2-е, переработанное и дополненное. — М.: Изд-во «Экзамен», 2007.
272. *Шамолин М. В.* Некоторые модельные задачи динамики твердого тела при взаимодействии со средой// Прикл. мех. — 2007. — 43, № 10. — С. 49–67.
273. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 27.
274. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 34.
275. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем//

- Моделирование и исследование устойчивости систем. Intern. Conf. 22–25.05.2007. Thes. of. Conf. Rep. — Kyiv, 2007. — С. 249.
276. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости движения четырехмерного твердого тела–маятника, находящегося в потоке набегающей среды// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 37.
  277. *Шамолин М. В.* Об устойчивости одного режима движения твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. докл. научн. конф. «Ломоносовские чтения–2007», секц. механики. Москва, МГУ, апрель 2007 г. — М.: Изд-во МГУ, 2007. — С. 153.
  278. *Шамолин М. В.* Об учете вращательных производных момента аэродинамических сил на движение тела в сопротивляющейся среде// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 26.
  279. *Шамолин М. В.* О движении твердого тела в сопротивляющейся среде при учете вращательных производных момента аэродинамических сил по угловой скорости// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 44.
  280. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке среды при учете вращательных производных момента силы ее воздействия// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. — 2007. — № 3. — С. 187–192.
  281. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. Всерос. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», памяти Л. И. Седова в связи со 100-летием со дня рожд. Москва, 12–14.11.2007. — М.: МИАН, 2007. — С. 166–167.
  282. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Тез. докл. Междун. конф. «Анализ и особенности», посвящ. 70-летию В. И. Арнольда, 20–24 авг. 2007 г., Москва. — М.: МИАН, 2007. — С. 110–112.
  283. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем// Тез. докл. Междунар. конф. «Классические задачи динамики твердого тела», 09–13.06.2007. — Донецк: Ин-т прикл. мат. и мех. НАН Украины, 2007. — С. 81–82.
  284. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил// «Нелинейный динамический анализ–2007». Тез. докл. междунар.

- конгр., Санкт-Петербург, 4–8 июня 2007 г. — СПб.: Спб. гос. ун-т, 2007. — С. 178.
285. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// *Успехи мат. наук.* — 62, № 5, 2007. — С. 169–170.
  286. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// *Фунд. и прикл. мат.* — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
  287. *Шамолин М. В.* Качественные методы анализа систем с переменной диссипацией в динамике// *Межд. конф. «Шестые Окуневские чтения»*, 23–27.06.2008 г. Материалы докладов. Т. III. — Санкт-Петербург: Балт. гос. ун-т., 2008. — С. 34–39.
  288. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем со знакопеременной диссипацией// *Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и дин. системам.* Суздаль, 26.06–02.07.2008. — Владимир: Влад. гос. унив., 2008. — С. 259–260.
  289. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с определенной группой симметрий// *«Дифференциальные уравнения и топология».* Межд. конф. посвящ. 100-летию со дня рожд. Л. С. Понтрягина. Тез. докл. Москва, 17–22.06.2008. — М.: Изд. отдел фак-та ВМиК МГУ; МАКС Пресс, 2008. — С. 208–209.
  290. *Шамолин М. В.* Методы анализа систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// *Тез. докл. IX Крымской Междун. Матем. шк. «Метод функции Ляпунова и его приложения»*, Алушта, 15–20.09.2008. — Симферополь: Тавр. национ. ун-т., 2008. — С. 181–182.
  291. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учете зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости// *Прикл. мат. и мех.* — 2008. — 72, № 2. — С. 273–287.
  292. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// *Матер. межд. научн. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики»*, посвящ. 85-летию со дня рожд. Л. А. Толоконникова, Россия, Тула, 17–21.11.2008. — Тула: «Гриф и К», 2008. — С. 317–320.
  293. *Шамолин М. В.* Новый интегрируемый случай в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил// *Матер. Воронежской вес. матем. шк. «Понтрягинские чтения-XIX»*, Воронеж, май 2008 г. — Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2008. — С. 231–232.
  294. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов динамических систем// *Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех.* — 2008. — № 3. — С. 43–49.

295. *Шамолин М. В.* Системы со знакопеременной диссипацией в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. научн. конф. «Ломоносовские чтения-2008», секц. механики. Москва, МГУ, апрель 2008 г. — М.: Изд-во МГУ, 2008. — С. 159–160.
296. *Шамолин М. В.* Трехпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 2008. — 418, № 1. — С. 46–51.
297. *Шамолин М. В.* Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электронное моделирование. — 2009. — 31, № 4. — С. 55–66.
298. *Шамолин М. В.* Классификация случаев полной интегрируемости в динамике симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Современная математика и ее приложения. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. — 2009. — 65. — С. 132–142.
299. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика и ее приложения. Геометрия и механика. — 2009. — 72. — С. 13.
300. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика и ее приложения. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. — 2009. — 65. — С. 6.
301. *Шамолин М. В.* Некоторые случаи полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// V Поляховские чтения: Тез. докл. Междунар. научн. конф. по механ., Санкт-Петербург, 3–6 февр. 2009 г. — Спб.: Спб. ун-т, 2009. — С. 73.
302. *Шамолин М. В.* Некоторые случаи полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// V Поляховские чтения: Тр. Междунар. научн. конф. по механ., Санкт-Петербург, 3–6 февр. 2009 г. — Спб.: Спб. ун-т, 2009. — С. 144–150.
303. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
304. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. научн. конф. «Ломоносовские чтения-2009»,

- секц. механики. Москва, МГУ, апрель 2009 г. — М.: Изд-во МГУ, 2009. — С. 153–154.
305. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Мат. Воронежской весенней матем. шк. «Современные методы теории краевых задач». «Понтрягинские Чтения-XX». Воронеж, 3–9 мая 2009 г. — Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2009. — С. 191–192.
  306. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем// Современная математика и ее приложения. Геометрия и механика. — 2009. — 62. — С. 131–171.
  307. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости некоторых классов динамических систем// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика и ее приложения. Геометрия и механика. — 2009. — 62. — С. 10.
  308. *Шамолин М. В.* Об устойчивости некоторых режимов движения твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика и ее приложения. Геометрия и механика. — 2009. — 62. — С. 10–11.
  309. *Шамолин М. В.* Об устойчивости прямолинейного поступательного движения// Прикл. мех. — 2009. — 45, № 6. — С. 125–140.
  310. *Шамолин М. В.* О траекториях, уходящих на бесконечность, для динамических систем на плоскости// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика и ее приложения. Геометрия и механика. — 2009. — 62. — С. 7.
  311. *Шамолин М. В.* Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение// Электронное моделирование. — 2009. — 31, № 1. — С. 97–115.
  312. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой// Электронное моделирование. — 2009. — 31, № 3. — С. 73–90.
  313. *Шамолин М. В.* Системы с переменной диссипацией: методы, подходы, приложения// Моделирование и исследование устойчивости систем. Intern. Conf. (27–29.05.2009). Thes. of Conf. Rep. — Kyiv, 2009. — С. 163.
  314. *Шамолин М. В.* Случаи интегрируемости уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил// «Современные проблемы математики, механики и их приложений». Матер. межд. конф., посвящ. 70-летию ректора МГУ акад. В. А. Садовниченко. Москва, 30.03–02.04.2009. — М.: Изд-во «Университетская книга», 2009. — С. 233.



315. *Шамолин М. В.* Случаи полной интегрируемости в динамике симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика и ее приложения. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. — 2009. — 65. — С. 9.
316. *Шамолин М. В.* Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электронное моделирование. — 2010. — 32, № 5. — С. 31–44.
317. *Шамолин М. В.* Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электронное моделирование. — 2010. — 32, № 1. — С. 45–52.
318. *Шамолин М. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в трансцендентных функциях динамических систем// Воронежская зимняя матем. школа С. Г. Крейна. — 2010. Тез. докл. — Воронеж: ВорГУ, 2010. — С. 159–160.
319. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 5052. — М.: Ин-т механики МГУ, 2010.
320. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела// Докл. РАН. — 2010. — 431, № 3. — С. 339–343.
321. *Шамолин М. В.* Пространственное движение твердого тела в среде с сопротивлением// Прикл. мех. — 2010. — 46, № 7. — С. 120–133.
322. *Шамолин М. В.* Случаи полной интегрируемости уравнений движения динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и динам. системам. Суздаль, 02–07.07.2010. — Владимир: Влад. гос. унив., 2010. — С. 195.
323. *Шамолин М. В.* Случаи полной интегрируемости уравнений пространственного движения твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. докл. XI Межд. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Москва, ИПУ РАН, 1–4 июня 2010 г. — М.: ИПУ РАН, 2010. — С. 429–431.
324. *Шамолин М. В.* Случаи полной интегрируемости уравнений пространственной динамики твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. докл. научн. конф. «Ломоносовские чтения-2010». Секц. механики. Апрель 2010 г., Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова — М.: Изд-во МГУ, 2010. — С. 172.
325. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Успехи мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.

326. *Шамолин М. В.* Движение твердого тела в сопротивляющейся среде// Матем. модел. — 2011. — 23, № 12. — С. 79–104.
327. *Шамолин М. В.* Диагностика гиросtabilизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электронное моделирование. — 2011. — 33, № 3. — С. 121–126.
328. *Шамолин М. В.* Динамические инварианты интегрируемых динамических систем с переменной диссипацией// Вестник Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2011. — № 4, Ч. 2. — С. 356–357.
329. *Шамолин М. В.* Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2011. — № 3. — С. 24–30.
330. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
331. *Шамолин М. В.* Новый случай полной интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия. MISCELLANEOUS. — 2011. — № 5(86). — С. 187–189.
332. *Шамолин М. В.* Полные списки первых интегралов в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Межд. конф., посвящ. 110-й годовщине И. Г. Петровского (XXIII совместн. засед. ММО и сем. им. И. Г. Петровского). Тез. докл. — М.: Изд-во МГУ и ООО «Интуит.РУ», 2011. — С. 389–390.
333. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
334. *Шамолин М. В.* Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical System Modelling and Stability Investigation). XV Int. Conf. (25–27.05.2011). Тезисы докладов. — Киев, 2011. — С. 139.
335. *Шамолин М. В.* Задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости// Матем. моделирование. — 2012. — 24, № 10. — С. 109–132.
336. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике твердого тела в неконсервативном поле// Тез. докл. научн. конф. «Ломоносовские чтения-2012». Секц. механ. Апрель 2012

- г., Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: Изд-во МГУ, 2012. — С. 156.
337. *Шамолин М. В.* Некоторые вопросы качественной теории в динамике систем с переменной диссипацией// Современная математика и ее приложения. Дифференциальные уравнения в частных производных и оптимальное управление. — 2012. — 78. — С. 138–147.
  338. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике твердого тела в неконсервативном поле// «Современные методы теории краевых задач». Материалы Воронежской весенней матем. шк. «Понтрягинские чтения-XXIII». Воронеж, 3–9 мая 2012 г. — Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2012. — С. 200.
  339. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
  340. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
  341. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// XII Междунар. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конф. Пятницкого). Тез. докл. Москва, 5–8 июня 2012 г. — М.: ИПУ РАН, 2012. — С. 339–341.
  342. *Шамолин М. В.* Обзор случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и динам. системам. Суздаль, 29.06–04.07.2012. — Суздаль: Коллектив авторов, 2012. — С. 179–180.
  343. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения твердого тела в сопротивляющейся среде при учете линейного демпфирования// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2012. — № 4. — С. 44–47.
  344. *Шамолин М. В.* Системы с переменной диссипацией: методы, подходы приложения// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика и ее приложения. Геометрия и механика. — 2012. — 76. — С. 6.
  345. *Шамолин М. В.* Случаи интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Воронежская зимн. матем. шк. С. Г. Крейна, 2012. Материалы межд. конф., Воронеж, 25–30.01.2012. — Изд-во ВорГУ, 2012. — С. 213–215.

346. *Шамолин М. В.* Случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой при струйном обтекании// VI Поляховские чтения. Тез. докл. Междунар. научн. конф. по механ., Санкт-Петербург, 31 янв.–3 февр. 2012 г. — М.: Издатель И. В. Балабанов, 2012. — С. 75.
347. *Шамолин М. В.* Случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Тр. X Международной Четаевской конф. Т. 1. Секц. 1. Аналитическая механика. Казань, 12–16 июня 2012 г. — Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. — С. 508–514.
348. *Шамолин М. В.* Случаи полной интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика и ее приложения. Геометрия и механика. — 2012. — 76. — С. 7.
349. *Шамолин М. В.* Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Современная математика и ее приложения. Геометрия и механика. — 2012. — 76. — С. 84–99.
350. *Шамолин М. В., Цыпцын С. В.* Аналитическое и численное исследование траекторий движения тела в сопротивляющейся среде. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4289. — Москва, 1993.
351. *Шорыгин О. П., Шульман Н. А.* Вход диска в воду с углом атаки// Уч. записки ЦАГИ. — 1977. — 8, № 1. — С. 12–21.
352. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.
353. *Якоби К.* Лекции по динамике. — М.-Л.: ОНТИ, 1936.
354. *Airy H.* The Soaring of Birds. — «Nature», vol. XXVIII, 1.596.
355. *Blix M.* Une nouvelle theorie sur le vol a viole des oiseaux, «Revue generale sciences pures et appliquees», 1890.
356. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, «Urgent problems of geometry and mechanics» named after V. V. Trofimov// In: Journal of Mathematical Sciences. — 2008. — Vol. 154, №. 4. — С. 462–495. (пер. «Современная математика. Фундаментальные направления». — 2007. — 23. — С. 16–45).
357. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, «Urgent problems of geometry and mechanics»

- named after V. V. Trofimov// In: Journal of Mathematical Sciences. — 2009. — Vol. 161, №. 5. — С. 603–614 (пер. «Современная математика и ее приложения». Геометрия и механика. — 2009. — 76.)
358. *Liliental O.* Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. — Berlin, 1889.
359. *Marey E.-J.* Le vol des oiseaux, chap.XX. — Paris, 1890.
360. *Mouillard L.-P.* L'empire de l'air. — Paris, 1881.
361. *Onniere B.* Etude sur le vol plane. — «L'Aeronaute», 1891.
362. *Von Parseval A.* Die Mechanik des Vogelflugs. — Wisbaden, 1889.
363. *Rayleigh (Strutt J. W.)* The Soaring of Birds. — «Nature», vol. XXVIII, 1.534.
364. *Peal S. E.* Soaring of Birds — «Nature», vol. XXVIII, 1.11.
365. *Peizoto M.* On structural stability// Ann. of Math. — 1959. — 2, № 69. — С. 199–222.
366. *Peizoto M.* Structural stability on two-dimensional manifolds// Topology. — 1962. — 1, № 2. — С. 101–120.
367. *Peizoto M.* On an approximation theorem of Kupka and Smale// J. Diff. Eq. — 1966. — 3. — С. 214–227.
368. *Prandtl L., Betz A.* Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Gottingen. — Berlin, 1932.
369. *Shamolin M. V.* Global qualitative analysis of the nonlinear systems on the problem of a body motion in a resisting medium// Fourth Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, Bolyai Institute, August 18–21, 1993. — Szeged, Hungary, 1993. — С. 54.
370. *Shamolin M. V.* Relative structural stability on the problem of a body motion in a resisting medium// ICM'94, Abstract of Short Communications, Zurich, 3–11 August, 1994. — Zurich, Switzerland, 1994. — С. 207.
371. *Shamolin M. V.* New two-parameter families of the phase patterns on the problem of a body motion in a resisting medium// In: ICIAM'95, Book of Abstracts, Hamburg, 3–7 July, 1995. — Hamburg, Germany, 1995. — С. 436.
372. *Shamolin M. V.* Qualitative Methods to the Dynamic Model of an Interaction of a Rigid Body with a Resisting Medium and New Two-Parameter Families of the Phase Portraits// In: DynDays'95 (Sixteenth Annual Informal Workshop), Program and Abstracts, Lyon, June 28–July 1, 1995. — Lyon, France, 1995. — С. 185.
373. *Shamolin M. V.* Poisson-stable and dense orbits in rigid body dynamics// In: 3rd Experimental Chaos Conference, Advance Program, Edinburg, Scotland, August 21–23, 1995. — Edinburg, Scotland, 1995. — С. 114.

374. *Shamolin M. V.* Structural Optimization of the Controlled Rigid Motion in a Resisting Medium// In: WCSMO-1, Extended Abstracts. Posters, Goslar, May 28-June 2, 1995. — Goslar, Germany, 1995. — C. 18-19.
375. *Shamolin M. V.* Qualitative methods in interacting with the medium rigid body dynamics// In: Abstracts of GAMM Wissenschaftliche Jahrestagung'96, 27-31 May, 1996. — Prague, Czech Rep.; Karls-Universität Prague. — C. 129-130.
376. *Shamolin M. V.* Qualitative Methods in Interacting with the Medium Rigid Body Dynamics// In: Abstracts of XIXth ICTAM, Kyoto, Japan, August 25-31, 1996. — Kyoto, Japan, 1996. — C. 285.
377. *Shamolin M. V.* Relative structural stability and relative structural instability of different degrees in Topological Dynamics// In: Abstracts of International Topological Conference Dedicated to P.S. Alexandroff's 100th Birthday «Topology and Applications», Moscow, May 27-31, 1996. — Moscow: Phasys, 1996. — C. 207-208.
378. *Shamolin M. V.* Topographical Poincaré systems in many-dimensional spaces// In: Fifth Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, Bolyai Institute, Regional Committee of the Hungarian Academy of Sciences, July 29-August 2, 1996. — Szeged, Hungary, 1996. — C. 45.
379. *Shamolin M. V.* Classical problem of a three-dimensional motion of a pendulum in a jet flow// In: 3rd EUROMECH Solid Mechanics Conference, Book of Abstracts, Stockholm, Sweden, August 18-22, 1997. — Stockholm, Sweden: Royal Inst. of Technology, 1997. — C. 204.
380. *Shamolin M. V.* Families of three-dimensional phase portraits in dynamics of a rigid body// In: EQUADIFF 9, Abstracts, Enlarged Abstracts, Brno, Czech Rep., August 25-29, 1997. — Czech Rep., Brno: Masaryk Univ., 1997. — C. 76.
381. *Shamolin M. V.* Three-Dimensional Structural Optimization of Controlled Rigid Motion in a Resisting Medium// In: Proceedings of WCSMO-2, Zakopane, Poland, May 26-30, 1997. — Zakopane, Poland, 1997. — C. 387-392.
382. *Shamolin M. V.* Three-Dimensional Structural Optimization of Controlled Rigid Motion in a Resisting Medium// In: WCSMO-2, Extended Abstracts, Zakopane, Poland, May 26-30, 1997. — Zakopane, Poland, 1997. — C. 276-277.
383. *Shamolin M. V.* Lyapunov functions method and manydimensional topographical systems of Poincare in rigid body dynamics// IV Крымская Межд. мат. школа «Метод функции Ляпунова и его

- приложения». Тез. докл. Крым, Алушта 05–12.09.1998. — Крым, Симферополь: Изд-во Симф. госун-тет, 1998. — С. 80.
384. *Shamolin M. V.* Many-dimensional topographical Poincare systems in rigid body dynamics// In: Abstracts of GAMM Wissenschaftliche Jahrestagung'98, 6–9 April, 1998. — Germany, Bremen: Universität Bremen, 1998. — С. 128.
  385. *Shamolin M. V.* New two-parameter families of the phase portraits in three-dimensional rigid body dynamics// Межд. конф., посвященная 90-летию со дня рожд. Л. С. Понтрягина. Москва, 31.08–6.09.1998. Тез. докл. Дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — С. 97–99.
  386. *Shamolin M. V.* Some Classical Problems in a Three Dimensional Dynamics of a Rigid Body Interacting with a Medium// In: Proc. of ICTACEM'98, Kharagpur, India, Dec. 1–5, 1998; Aerospace Engineering Dep., Indian Inst. of Technology, Kharagpur, India, 1998, 11 p. (CD-Rome, Printed at: Printek Point, Technology Market, KGP-2).
  387. *Shamolin M. V.* Integrability in Terms of Transcendental Functions in Rigid Body Dynamics// In: Book of Abstracts of GAMM Annual Meeting, April 12–16 1999. — France, Metz: Universite de Metz, 1999. — С. 144.
  388. *Shamolin M. V.* Long-periodic Trajectories in Rigid Body Dynamics// In: Sixth Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, Bolyai Institute, Regional Committee of the Hungarian Academy of Sciences, August 10–14, 1999. — Hungary, Szeged, 1999. — С. 47.
  389. *Shamolin M. V.* Mathematical modelling in 3D dynamics of a rigid body interacting with a medium// In: Book of Abstracts of the Second Int. Conf. «Tools for Mathematical Modelling», St.-Petersburg, Russia, 14–19 June, 1999. — St.-Petersburg State Tech. Univ., 1999. — С. 122–123.
  390. *Shamolin M. V.* Methods of analysis of a deceleration of a rigid in 3D medium// In: Contributed Abstracts of 3rd ENOC, Copenhagen (Lyngby), Denmark, August 8–12, 1999. — Tech. Univ. of Denmark, 1999.
  391. *Shamolin M. V.* New Families of the Non-Equivalent Phase Portraits in 3D Rigid Body Dynamics// In: Abstracts of Second Congress ISAAC 1999, Fukuoka, Japan, August 16–21, 1999. — Fukuoka Ins. of Tech, 1999. — С. 205–206.
  392. *Shamolin M. V.* Properties of Integrability of Systems in Terms of Transcendental Functions// In: Final Progr. and Abstracts of Fifth SIAM Conf. on Appl. of Dynamic. Syst., May 23–27, 1999. — Snowbird, Utah, USA; SIAM, 1999. — С. 60.

393. *Shamolin M. V.* Some properties of transcendental integrable dynamical systems// In: Book of Abst. of EQUADIFF 10, Berlin, August 1–7, 1999; Free Univ. of Berlin, 1999. — C. 286–287.
394. *Shamolin M. V.* Structural Stability in 3D Dynamics of a Rigid Body// In: CD–Proc. of WCSMO–3, Buffalo, NY, May 17–21, 1999. — Buffalo, NY, 1999. — C. 6.
395. *Shamolin M. V.* Structural Stability in 3D Dynamics of a Rigid Body// In: WCSMO–3, Short Paper Proc., vol. 2, Buffalo, NY, May 17–21, 1999. State Univ. of NY at Buffalo, 1999. — C. 475–477.
396. *Shamolin M. V.* About interaction of a rigid body with a resisting medium under an assumption of a jet flow// In: Book of Abst. II (General sessions) of 4th EUROMECH Solid Mech. Conf., Metz, France (June 26–30, 2000). — Univ. of Metz, 2000. — C. 703.
397. *Shamolin M. V.* Integrability and non-integrability in terms of transcendental functions// In: CD-abs. of 3rd ECM (Poster sessions), Barcelona, Spain, June 10–14, 2000.
398. *Shamolin M. V.* Mathematical modelling of interaction of a rigid body with a medium and new cases of integrability// In: Book of Abst. of ECCOMAS 2000, Barcelona, Spaine, 11–14 September. — Barcelona, 2000. — C. 495.
399. *Shamolin M. V.* Mathematical modelling of interaction of a rigid body with a medium and new cases of integrability// In: CD-Proc. of ECCOMAS 2000, Barcelona, Spaine, 11–14 September. — Barcelona, 2000.
400. *Shamolin M. V.* Methods of analysis of dynamics of a rigid body interacting with a medium// In: Book of Abstracts of Annual Scient. Conf. GAMM 2000 at the Univ. of Göttingen, 2–7 April, 2000. — Univ. of Gött., 2000. — C. 144.
401. *Shamolin M. V.* New families of many-dimensional phase portraits in dynamics of a rigid body interacting with a medium// In: Book of Abs. of 16th IMACS World Cong. 2000, Lausanne, Switzerland, August 21–25; EPFL, 2000. — C. 283.
402. *Shamolin M. V.* New families of many-dimensional phase portraits in dynamics of a rigid body interacting with a medium// In: CD-Proc. of 16th IMACS World Cong. 2000, Lausanne, Switzerland, August 21–25; EPFL, 2000. — 3 c.
403. *Shamolin M. V.* Comparison of Some Cases of Integrability in Dynamics of a Rigid Body Interacting with a Medium// In: Book of Abs. of Annual Scient. Conf. GAMM 2001, ETH Zurich, 12–15 February, 2001. — Zurich: ETH, 2001. — C. 132.
404. *Shamolin M. V.* Pattern Recognition in the Model of the Interaction of a Rigid Body with a Resisting Medium// In: Col. of Abst. of First SIAM–EMS Conf. "Applied Mathematics in our Changing



- World", Berlin, Germany, Sept. 2–6, 2001. — Birkhäuser, Springer, 2001. — C. 66.
405. *Shamolin M. V.* Foundations in differential and topological diagnostics// In: Book of Abs. of Annual Scient. Conf. GAMM 2002, Univ. of Augsburg, March 25–28, 2002. — Univ. of Augsburg, 2002. — C. 154.
  406. *Shamolin M. V.* Dynamical systems with the variable dissipation in 3D dynamics of a rigid body interacting with a medium// In: Book of abstracts of 4th ENOC, Moscow, Russia, August 19–23, 2002. — Moscow: Inst. Probl. Mech. Russ. Acad. Sci., 2002. — C. 109.
  407. *Shamolin M. V.* Methods of Analysis of Dynamics of a 2D-, 3D- or 4D-rigid Body With a Medium// In: Abst. Short Commun. Post. Sess. Of ICM'2002, Beijing, 2002, August 20–28. — China, Beijing: Higher Education Press. — C. 268.
  408. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. of Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — C. 2526–2555.
  409. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. of Math. Sci. — 2003. — 114, № 1. — C. 976–1024.
  410. *Shamolin M. V.* Global Structural Stability in Dynamics of a Rigid Body Interacting with a Medium// In: 5th ICIAM, Sydney, Australia, 7–11 July, 2003. — Sydney: Univ. of Technology, 2003. — C. 306.
  411. *Shamolin M. V.* Integrability and Nonintegrability in Terms of Transcendental Functions// In: Book of Abs. of Annual Scient. Conf. GAMM 2003, Abano Terme–Padua, Italy, 24–28 March, 2003. — Univ. of Padua, 2003. — C. 77.
  412. *Shamolin M. V.* New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. of Math. Sci. — 2003. — 114, № 1. — C. 919–975.
  413. *Shamolin M. V.* Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body// J. of Math. Sci. — 2004. — 122, № 1. — C. 2841–2915.
  414. *Shamolin M. V.* Some cases of integrability in dynamics of a rigid body interacting with a resisting medium// Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и динам. системам, Суздаль, 05–10.07.2004. — Владимир: Влад. гос. унив., 2004. — C. 296–298.
  415. *Shamolin M. V.* Mathematical model of interaction of a rigid body with a resisting medium in a jet flow// In: Abs. Part 1, 76 Annual Sci. Conf. (GAMM), Luxembourg, March 28–April 1, 2005. — Luxembourg: Univ. du Luxembourg, 2005. — C. 94–95.

416. *Shamolin M. V.* Some cases of Integrability in 3D dynamics of a rigid body interacting with a medium// In: Book of Abst. IMA Int. Conf. «Recent Advances in Nonlinear Mechanics», Aberdeen, Scotland, August 30–September 1, 2005. — IMA, Aberdeen, 2005. — C. 112.
417. *Shamolin M. V.* Structural stable vector fields in rigid body dynamics// In: Abst. of 8th Conf. on DYNAMICAL SYSTEMS (Theory and Applications) (DSTA 2005), Lodz, Poland, Dec. 12–15, 2005. — Lodz: Tech. Univ., 2005. — C. 78.
418. *Shamolin M. V.* Structural stable vector fields in rigid body dynamics// In: Proc. of 8th Conf. on DYNAMICAL SYSTEMS (Theory and Applications) (DSTA 2005), Lodz, Poland, Dec. 12–15, 2005. — Lodz: Tech. Univ., 2005, Vol. 1. — C. 429–436.
419. *Shamolin M. V.* Almost conservative systems in dynamics of a rigid body// In: Book of Abs., 77th Annual Meeting of GAMM, March 27th–31st, 2006, Technische Univ. Berlin. — Berlin: Technische Univ., 2006. — C. 74.
420. *Shamolin M. V.* On the problem of a symmetric body motion in a resisting medium// In: Book of Abst. of EMAC-2007 (1–4 July, 2007, Hobart, Australia). — Australia, Hobart: Univ. Tasmania, 2007. — C. 25.
421. *Shamolin M. V.* The cases of complete integrability in dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: Book of Abs. of Int. Conf. on the Occasion of the 150th Birthday of A. M. Lyapunov (June 24–30, 2007, Kharkiv, Ukraine). — Kharkiv: Verkin Inst. Low Temper. Physics Engineer. NASU, 2007. — C. 147–148.
422. *Shamolin M. V.* The cases of integrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body interacting with a medium// In: Abst. of 9th Conf. on DYNAMICAL SYSTEMS (Theory and Applications) (DSTA 2007), Lodz, Poland, Dec. 17–20, 2007. — Lodz: Tech. Univ., 2007. — C. 115.
423. *Shamolin M. V.* The cases of integrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body interacting with a medium// In: Proc. of 9th Conf. on DYNAMICAL SYSTEMS (Theory and Applications) (DSTA 2007), Lodz, Poland, Dec. 17–20, 2007. — Lodz: Tech. Univ., 2007, Vol. 1. — C. 415–422.
424. *Shamolin M. V.* The cases of integrability in 2D-, 3D- and 4D-rigid body// In: Abstr. of Short Commun. and Post. of Int. Conf. «Dynamical Methods and Mathematical Modelling», Valladolid, Spain (Sept. 18–22, 2007). — Valladolid: ETSII, 2007. — C. 31.
425. *Shamolin M. V.* 4D rigid body and some cases of integrability// In: Abstracts of ICIAM07, Zurich, Switzerland, June 16–20, 2007. — Zurich: ETH, 2007. — C. 311.

426. *Shamolin M. V.* Methods of analysis of dynamic systems with various dissipation in dynamics of a rigid body// In: ENOC-2008, CD-Proc., June 30–July 4, 2008. — St.-Petersburg, Russia, 6 c.
427. *Shamolin M. V.* Methods of analysis of dynamic systems with various dissipation in dynamics of a rigid body// In: ENOC-2008, Final program and abstracts, June 30–July 4, 2008, St.-Petersburg, Russia. — St.-Petersburg: SPSU, 2008. — C. 78.
428. *Shamolin M. V.* Some methods of analysis of the dynamic systems with various dissipation in dynamics of a rigid body// Proc. Appl. Math. Mech. — 2008. — 8. — C. 10137–10138.
429. *Shamolin M. V.* Dynamical systems with variable dissipation: Methods and applications// In: Proc. of 10th Conf. on DYNAMICAL SYSTEMS (Theory and Applications) (DSTA 2009), Lodz, Poland, Dec. 7–10, 2009. — Lodz: Tech. Univ., 2009. — C. 91–104.
430. *Shamolin M. V.* Dynamical systems with variable dissipation: Methods, and applications// In: Programme/Abstract/Participants of XVI International Congress on Mathematical Physics (ICMP09), Prague, Czech Rep., August 3–8, 2009. — Prague, 2009. — C. 33.
431. *Shamolin M. V.* New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium// Proc. Appl. Math. Mech. — 2009. — 9. — C. 139–140. DOI 10.1002/pamm. 200910044.
432. *Shamolin M. V.* The various cases of complete integrability in dynamics of a rigid body interacting with a medium// In: Multibody Dynamics, ECCOMAS Thematic Conf. Warsaw, Poland, 29 June–2 July 2009, Book of Abst. — Warsaw: Polish Acad. Sci., 2009. — C. 276–277.
433. *Shamolin M. V.* The various cases of complete integrability in dynamics of a rigid body interacting with a medium// In: Multibody Dynamics, ECCOMAS Thematic Conf. Warsaw, Poland, 29 June–2 July 2009, CD-Proc. — Warsaw: Polish Acad. Sci., 2009. — C. 20.
434. *Shamolin M. V.* Dynamical systems with various dissipation: background, methods, applications// Book of Abs. of XXXVIII Summer School–Conf. «Advances Problems in Mechanics» (APM 2010), July 1–5, 2010, St.-Petersburg (Repino), Russia. — St.-Petersburg: IPME, 2010. — C. 86–87.
435. *Shamolin M. V.* Dynamical systems with various dissipation: Background, methods, applications// CD-Proc. of XXXVIII Summer School–Conf. «Advances Problems in Mechanics» (APM 2010), July 1–5, 2010, St.-Petersburg (Repino), Russia. — St.-Petersburg: IPME, 2010. — C. 612–621.

436. *Shamolin M. V.* Integrability and nonintegrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body// Proc. Appl. Math. Mech. — 2010. — 10. — C. 63–64.
437. *Shamolin M. V.* Cases of complete integrability in transcendental functions in dynamics and certain invariant indices// In: CD–Proc. 5th Int. Sci. Conf. on Physics and Control PHYSCON 2011, Leon, Spain, September 5–8, 2011. — Leon, Spain, 5 c.
438. *Shamolin M. V.* Cases of complete integrability in transcendental functions in dynamics and certain invariant indices// In: 5th Int. Sci. Conf. on Physics and Control PHYSCON 2011, Leon, Spain, September 5–8, 2011. — Leon, Spain, C. 135.
439. *Shamolin M. V.* Variety of the cases of integrability in dynamics of a 2D-, 3D-, and 4D-rigid body interacting with a medium// In: Proc. of 11th Conf. on DYNAMICAL SYSTEMS (Theory and Applications) (DSTA 2011), Lodz, Poland, Dec. 5–8, 2011. — Lodz: Tech. Univ., 2011. — C. 11–24.
440. *Shamolin M. V.* Cases of complete integrability in transcendental functions in dynamics and certain invariant indices// In: 83rd Annual Scientific Conference of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics. Book of Abstracts, Darmstadt, Germany, March 26–30, 2012. — Darmstadt: TU Darmstadt, 2012. — C. 48.
441. *Shamolin M. V.* Cases of integrability in dynamics of a rigid body interacting with a resistant medium// In: Abstract Book, 23th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, August 19–24, 2012, Beijing, China. — China, Beijing: Science Literature Publishing House, 2012. — C. 51.
442. *Shamolin M. V.* Cases of integrability in dynamics of a rigid body interacting with a resistant medium// In: CD–Proc., 23th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, August 19–24, 2012, Beijing, China. — China, Beijing: Science Literature Publishing House, 2012. — C. 2.
443. *Shamolin M. V.* Variety of the cases of integrability in dynamics of a 2D-, and 3D-rigid body interacting with a medium// In: 8th ESMC 2012, CD–Materials (Graz, Austria, July 9–13, 2012). — Graz, Graz, Austria, 2012. — C. 2.
444. *Weyher* Observations sur le vol plane par obres. — "L'Aeronaute", 1890.