Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере

М. В. Шамолин

Пусть четырехмерное твердое тело Θ массы m с гладкой трехмерной границей $\partial\Theta$ имеет в некоторой связанной с ним системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ тензор инерции вида $\operatorname{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}$. Расстояние от точки N приложения силы $\mathbf{S}$ до точки D является функцией, по крайней мере, некоторого угла α: $DN = R(\alpha,\dots)$ (ср. с [1]–[3]). Сила $\mathbf{S}$ имеет величину $S = s(\alpha)\operatorname{sgn}\cos\alpha\cdot v^2$, $|\mathbf{v}_D| = v$, где s – некоторая функция, характеризующая в системе как рассеяние, так и подкачку энергии [1], [2]. При этом $S = S_v(\alpha) = Bv^2\cos\alpha$, $B > 0$.

Если Ω – тензор угловой скорости тела Θ, $\Omega \in \mathrm{so}(4)$, то часть уравнений движения, отвечающая алгебре Ли $\mathrm{so}(4)$, имеет следующий вид [2]:

$$\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{1}$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, $\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2, \dots, \lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2$, M – момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbb{R}^4$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(4)$, $[\cdot,\cdot]$ – коммутатор в $\mathrm{so}(4)$. Кососимметрическая матрица $\Omega \in \mathrm{so}(4)$ определяется величинами ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 – компонентами в алгебре Ли $\mathrm{so}(4)$. При этом, очевидно, $\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i$ для любых $i, j = 1,\dots,4$.

При вычислении момента внешней силы строится отображение $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathrm{so}(4)$, переводящее пару векторов из $\mathbb{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathrm{so}(4)$ [2], [3].

Уравнение Ньютона движения центра масс C тела Θ представится в виде $m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}$, где по многомерной формуле Ривальса $\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}$, $\mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega\mathbf{v}_D$, $E = \dot\Omega$, $\mathbf{F}$ – внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$), E – тензор углового ускорения [1], [2].

Несколько расширим задачу: по прямой $Dx_1 = DC$ будет действовать некоторая следящая сила $\mathbf{T}$. В данной работе разобран такой класс движения, когда центр масс тела движется прямолинейно и равномерно (т. е. $\mathbf{V}_C \equiv \mathrm{const}$).

Если $N = (0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, $\mathbf{S} = \{-S, 0, 0, 0\}$, то момент силы в координатах алгебры Ли $\mathrm{so}(4)$ имеет следующий вид: $\{0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S\} \in \mathbb{R}^6 \cong M \in \mathrm{so}(4)$.

При этом, если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ – сферические координаты в $\mathbb{R}^4$, то $x_{2N} = A\sin\alpha\cos\beta_1 - h\omega_6/v$, $x_{3N} = A\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + h\omega_5/v$, $x_{4N} = A\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - h\omega_3/v$, $A, h > 0$.

Очевидно, что уравнения (1) существуют три циклических первых интеграла: $\omega_1 = \omega_1^0$, $\omega_2 = \omega_2^0$, $\omega_4 = \omega_4^0$, при этом считаем, что $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0$. В результате оставшиеся уравнения на $\mathrm{so}(4)$ примут вид $\dot\omega_3 = n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - hB\omega_3v\cos\alpha/(2I_2)$, $\dot\omega_5 = -n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - hB\omega_5v\cos\alpha/(2I_2)$, $\dot\omega_6 = n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1 - hB\omega_6v\cos\alpha/(2I_2)$.

Тогда замена угловых скоростей $z_1 = \omega_3\cos\beta_2 + \omega_5\sin\beta_2$, $z_2 = -\omega_3\sin\beta_2\cos\beta_1 + \omega_5\cos\beta_2\cos\beta_1 + \omega_6\sin\beta_1$, $z_3 = \omega_3\sin\beta_2\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_2\sin\beta_1 + \omega_6\cos\beta_1$ приводит совместную систему из уравнения Ньютона и (1) к следующему виду: ($\sigma = DC$, $b = \sigma n_0$, $H_1 = hB/(2I_2n_0)$, $[b] = [H_1] = 1$, $n_0^2 = AB/(2I_2)$):

$$\dot v = \sigma\cos\alpha[n_0^2v^2\sin^2\alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^3)] - bH_1vz_3\sin\alpha\cos\alpha, \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00020-а).
DOI: 10.4213/rm9541

$$\left.\begin{aligned}\dot\alpha = -z_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha\cos^2\alpha + \sigma\sin\alpha(z_1^2+z_2^2+z_3^3)/v - bH_1z_3\cos^2\alpha,\\ \dot z_3 = n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)(z_1^2+z_2^2)\operatorname{ctg}\alpha - H_1vz_3\cos\alpha,\\ \dot z_2 = (1+bH_1)z_2z_3\operatorname{ctg}\alpha + (1+bH_1)z_1^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta_1 - H_1vz_2\cos\alpha,\\ \dot z_1 = (1+bH_1)z_1z_3\operatorname{ctg}\alpha - (1+bH_1)z_1z_2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta_1 - H_1vz_1\cos\alpha,\\ \dot\beta_1 = (1+bH_1)z_2\operatorname{ctg}\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\dot\beta_2 = -(1+bH_1)z_1\operatorname{ctg}\alpha\csc\beta_1. \tag{4}$$

В системе седьмого порядка (2)–(4) появилась независимая подсистема шестого порядка (2), (3). Для полного интегрирования нужно искать, вообще говоря, шесть независимых первых интегралов. Однако после замен $z=\sqrt{z_1^2+z_2^2}$, $z_*=z_2/z_1$, $z=n_0vZ$, $z_k=n_0vZ_k$, $k=1,2,3$, $z_*=Z_*$, $\langle\cdot\rangle\mapsto n_0v\langle\,'\rangle$ она приводится к виду

$$v' = v\Psi(\alpha,Z,Z_3),\quad \Psi(\alpha,Z,Z_3) = b\cos\alpha[\sin^2\alpha-(Z^2+Z_3^2)] - bH_1Z_3\sin\alpha\cos\alpha, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha' = -Z_3 + b\sin\alpha\cos^2\alpha + b\sin\alpha(Z^2+Z_3^2) - bH_1Z_3\cos^2\alpha,\\ Z_3' = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)Z^2\operatorname{ctg}\alpha - Z_3\Psi(\alpha,Z,Z_3) - H_1Z_3\cos\alpha,\\ Z' = (1+bH_1)ZZ_3\operatorname{ctg}\alpha - Z\Psi(\alpha,Z,Z_3) - H_1Z\cos\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$Z_*' = \pm(1+bH_1)Z\sqrt{1+Z_*^2}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta_1,\qquad \beta_1' = \pm(1+bH_1)\frac{ZZ_*}{\sqrt{1+Z_*^2}}\operatorname{ctg}\alpha, \tag{7}$$

$$\beta_2' = \mp(1+bH_1)\frac{Z_1}{\sqrt{1+Z_*^2}}\operatorname{ctg}\alpha\csc\beta_1, \tag{8}$$

при этом систему (7)–(8) можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbb{S}^3$ трехмерной сферы.

Видно, что система пятого порядка (3) распалась на независимые подсистемы более низкого порядка: система (6) – третьего, а система (7) (после замены независимого переменного) – второго. Поэтому для полной интегрируемости достаточно указать два независимых интеграла системы (6), один – системы (7) и два дополнительных интеграла, “привязывающих” уравнения (5) и (8).

Полная система седьмого порядка обладает аналитическим первым интегралом вида $v^2(1-2bZ_3\sin\alpha+b^2(Z^2+Z_3^2))=V_C^2$.

Система (6) обладает двумя независимыми первыми интегралами, являющимися трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций (ср. [1]–[3]):

$$\frac{Z^2+Z_3^2-bZ_3\sin\alpha+\sin^2\alpha}{Z\sin\alpha} = C_1 = \text{const},\qquad G\left(\frac{Z}{\sin\alpha},\frac{Z_3}{\sin\alpha},\sin\alpha\right) = C_2 = \text{const}.$$

Система (7) имеет первый интеграл вида $\sqrt{1+Z_*^2}/\sin\beta_1 = C_3 = \text{const}$, и, в свою очередь, дополнительный первый интеграл, позволяющий определить величину β_2, имеет вид $\pm\cos\beta_1/\sqrt{C_3^2-1} = \sin\{C_3(\beta_2+C_4)\}$, $C_4=\text{const}$.

Список литературы

[**1**] М. В. Шамолин, *Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела*, Изд-во “Экзамен”, М., 2007, 352 с. [**2**] М. В. Шамолин, *Докл. РАН*, **375**:3 (2000), 343–346. [**3**] М. В. Шамолин, *УМН*, **53**:3(321) (1998), 209–210.

М. В. Шамолин (M. V. Shamolin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
05.08.2013