ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2013, том 453, № 1, с. 1–4

МЕХАНИКА

УДК 517 + 531.01

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ МНОГОМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ

© 2013 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком В.В. Козловым 17.06.2013 г.

Поступило 18.06.2013 г.

DOI: 10.7868/S0869565213230126

Изучение динамики многомерного твердого тела зависит от структуры силового поля. Для нас опорными результатами являются уравнения движения маломерных твердых тел в поле силы сопротивления среды, и тогда становится возможным обобщение динамической части уравнений на случай движения тела многомерного в аналогично построенном поле сил и получение полного списка трансцендентных первых интегралов. Полученные результаты важны в том смысле, что в системе присутствует неконсервативный момент, а ранее в основном использовалось потенциальное поле сил (см., например, [1–4]).

Ранее в [5, 6] была показана интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде при некоторых условиях, когда у системы динамических уравнений был найден в явном виде первый интеграл, являющийся трансцендентной (прежде всего в смысле комплексного анализа и уже потом в смысле теории элементарных функций) функцией квазискоростей. При этом все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности, которая имеет форму (одномерной) пластины. Позднее [6, 7] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай. При этом у системы динамических уравнений также был найден в явном виде полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части его поверхности, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. Далее была исследована динамическая часть уравнений движения различных динамически симметричных четырехмерных твердых тел, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска; при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску [8, 9].

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ НА АЛГЕБРЕ ЛИ so(n)

Рассмотрим движение однородного твердого тела массы m, частью поверхности которого является $(n-1)$-мерный диск, находящийся в некотором неконсервативном поле силы $\mathbf{S}$, с динамической симметрией следующего вида:

$$I_1,\ I_2 = \ldots = I_n. \qquad (1)$$

Здесь $I_1,\ldots,I_n$ – главные моменты инерции тела в некоторой связанной с ним системе координат $Dx_1\ldots x_n$, при этом прямая $CD = Dx_1$ (C – центр масс, D – центр диска), а оси Dx_2, ..., Dx_n лежат в гиперплоскости диска. Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2})$ – обобщенные сферические координаты вектора скорости $\mathbf{v}_D$ центра D диска такие, что – угол между вектором $\mathbf{v}_D$ и прямой Dx_1. В данной работе расстояние $ND = R$ (N – точка приложения силы) является функцией одного параметра – угла α ($R = R(\alpha)$) [5–7].

Примем следующие разложения: $\mathbf{S} = \{-S, \ldots, 0\}$. Величину силы примем в виде $S = s_1(\alpha)\,v^2$, $v = |\mathbf{v}_D|$, $s_1 \geq 0$, $s_1(\alpha) = s(\alpha)\operatorname{sign}\cos\alpha$.

Если Ω – тензор угловой скорости твердого тела, $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, то та часть уравнений движения тела, которая отвечает алгебре Ли so(n), размерность которой $\dfrac{n(n-1)}{2}$, имеет следующий вид [8–12]:

$$\Omega^{\bullet}\Lambda + \Lambda\Omega^{\bullet} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \qquad (2)$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}(-I_1 + I_2 + \ldots + I_n)$, ..., $\lambda_n = \dfrac{1}{2}(I_1 + I_2 + \ldots + I_{n-1} - I_n)$, M – момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbf{R}^n$, спроектированный на "естественные" координаты в алгебре Ли so(n), $[\ldots]$ – коммутатор в so(n). Так, например, элемент $\Omega \in \mathrm{so}(n)$ при $n = 5$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}$ – компоненты “угловой скорости” в проекциях на естественные координаты в алгебре Ли so(5).

Если в системе $Dx_1 \ldots x_n$ $N = (0, x_{2N}, \ldots, x_{nN})$, то при вычислении момента силы $\mathbf{S}$ строится отображение

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathrm{so}(n), \tag{3}$$

переводящее пару векторов из $\mathbf{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$. Так например, при $n = 5$ в проекциях на алгебру Ли so(5) момент силы сопротивления имеет следующий вид (ср. с [8–11]):

$$(0, 0, 0, -x_{5N}s(\alpha)v^2, 0, 0, x_{4N}s(\alpha)v^2, 0, x_{3N}s(\alpha)v^2,$$
$$-x_{2N}s(\alpha)v^2) \in \mathbf{R}^{10} \simeq M \in \mathrm{so}(5).$$

При этом в общем случае элемент M будет иметь $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ нулевых компонент, поскольку вспомогательная матрица для построения отображения (3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -S & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

и именно $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ ее миноров второго порядка со знаком, которые и определяют элемент M, тождественно равны нулю.

Уравнения (2) можно переписать в виде системы $\frac{1}{2}n(n-1)$ уравнений. Так, в частности, при $n = 5$ система на алгебре Ли so(5) примет вид

$$\begin{gathered}
(\lambda_4+\lambda_5)\dot\omega_1 + (\lambda_4-\lambda_5)(\omega_4\omega_7+\omega_3\omega_6+\omega_2\omega_5) = 0,\\
(\lambda_3+\lambda_5)\dot\omega_2 + (\lambda_5-\lambda_3)(\omega_1\omega_5-\omega_3\omega_8-\omega_4\omega_9) = 0,\\
(\lambda_2+\lambda_5)\dot\omega_3 + (\lambda_2-\lambda_5)(\omega_4\omega_{10}-\omega_2\omega_8-\omega_1\omega_6) = 0,\\
(\lambda_1+\lambda_5)\dot\omega_4 + (\lambda_5-\lambda_1)(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7) = -x_{5N}S,\\
(\lambda_3+\lambda_4)\dot\omega_5 + (\lambda_3-\lambda_4)(\omega_7\omega_9+\omega_6\omega_8+\omega_1\omega_2) = 0,\\
(\lambda_2+\lambda_4)\dot\omega_6 + (\lambda_4-\lambda_2)(\omega_5\omega_8-\omega_7\omega_{10}-\omega_1\omega_3) = 0,\\
(\lambda_1+\lambda_4)\dot\omega_7 + (\lambda_1-\lambda_4)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9) = x_{4N}S,\\
(\lambda_2+\lambda_3)\dot\omega_8 + (\lambda_2-\lambda_3)(\omega_9\omega_{10}+\omega_5\omega_6+\omega_2\omega_3) = 0,\\
(\lambda_1+\lambda_3)\dot\omega_9 + (\lambda_3-\lambda_1)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4) = -x_{3N}S,\\
(\lambda_1+\lambda_2)\dot\omega_{10} + (\lambda_1-\lambda_2)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4) = x_{2N}S.
\end{gathered} \tag{4}$$

2. ДИНАМИКА В $\mathbf{R}^n$

По аналогии с трехмерным случаем можно вывести формулы, аналогичные формулам Эйлера и Ривальса, а именно, скорости и ускорения любых двух точек A и B многомерного твердого тела в любой декартовой системе координат связаны соотношениями

$$\begin{gathered} v_B = v_A + \Omega\mathbf{AB}, \\ w_B = w_A + \Omega^2\mathbf{AB} + E\mathbf{AB}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, $\mathrm{E} = \dot\Omega \in \mathrm{so}(n)$. Тензор Е называется тензором углового ускорения.

Таким образом, уравнение движения центра масс в $\mathbf{R}^n$ запишется при помощи (5) уравнением Ньютона:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}. \tag{6}$$

С помощью формул (2), (6) получается полная динамическая часть системы уравнений движения многомерного твердого тела на $\mathrm{so}(n) \times \mathbf{R}^n$, которая имеет порядок $\frac{1}{2}n(n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

3. ДВИЖЕНИЕ В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Рассмотрим такой класс движений тела, при котором выполнено следующее условие (неинтегрируемая связь):

$$v \equiv \mathrm{const}, \tag{7}$$

достаточное для преобразования полной системы динамических уравнений к системе с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [5]).

Таким образом, происходит понижение порядка системы (6) на единицу. Для достижения этого предположим, что по прямой $CD = Dx_1$ на тело действует некоторая следящая сила $\mathbf{T}$, обеспечивающая выполнение условия (7) (ср. с маломерными случаями [5]). Определенным выбором величины следящей силы выполнение условия (7) может быть достигнуто [5], при этом $\mathbf{F} = \mathbf{T} + \mathbf{S} = \{T - S, 0, \ldots, 0\}$.

4. СЛУЧАЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поскольку выполнены равенства (1), то существуют $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ циклических первых интегралов у уравнений (2):

$$\omega_{k_1} = \omega_{k_1}^0, \ldots, \omega_{k_s} = \omega_{k_s}^0, \tag{8}$$

где $s = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. При этом $k_1 = 1, \ldots, k_s$ – некоторые s неповторяющихся чисел из множества

$W=\left\{1,\ 2,\ ...,\ \frac{1}{2}n(n-1)\right\}$. Рассмотрим набор (8) первых интегралов на своих нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0=0,\ldots,\omega_{k_s}^0=0. \tag{9}$$

В частности, при $n = 5$ у системы (4) имеются шесть таких первых интегралов:

$$\omega_1=\omega_1^0,\quad \omega_2=\omega_2^0,\quad \omega_3=\omega_3^0,\quad \omega_5=\omega_5^0,$$
$$\omega_6=\omega_6^0,\quad \omega_8=\omega_8^0,$$

рассматриваемых на нулевых уровнях: $\omega_1^0=\omega_2^0==\omega_3^0=\omega_5^0=\omega_6^0=\omega_8^0=0$. Ненулевых компонент $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_p}$ тензора Ω осталось $p=\frac{1}{2}n(n-1)--\frac{1}{2}(n-1)(n-2)=n-1$ штук (здесь $r_1, ..., r_p$ – оставшиеся p чисел из множества W, не равные $k_1, ..., k_s$).

При выполнении условий (7)–(9) порядок общей системы (2), (6) опускается до $2(n-1)$.

Т е о р е м а 1. *Система* (2), (6) *при выполнении условий* (7)–(9) *редуцируется к динамической системе на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^{n-1}$ $(n-1)$-*мерной сферы* $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}$.

5. РЕДУКЦИИ В СИСТЕМЕ

Для построения силового поля используется пара функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. По аналогии с маломерными случаями без ограничения общности [5] можно считать, что

$$R(\alpha)=A\sin\alpha,\quad A>0,\quad s(\alpha)=B\cos\alpha,\quad B>0 \tag{10}$$

(функции типа Чаплыгина [13]).

Далее применительно к нашему случаю, в силу (10), поскольку гиперплоскость диска задается уравнением $x_{1N}\equiv 0$, имеем:

$$x_{2N}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})=A\sin\alpha\cos\beta_1,$$
$$x_{3N}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})=A\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2,$$
$$\ldots$$
$$x_{n-1N}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})=A\sin\alpha\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2},$$
$$x_{nN}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})=A\sin\alpha\ldots\sin\beta_{n-3}\sin\beta_{n-2}.$$

Преобразуем далее набор фазовых переменных $\omega_{r_1},\omega_{r2},\ldots,\omega_{r_{n-1}}$:

$$\begin{pmatrix} z_1\\ \ldots\\ z_{n-1}\end{pmatrix}=$$
$$=T_{n-2n-1}(-\beta_1)\circ T_{n-3n-2}(-\beta_2)\circ\ldots\circ T_{12}(-\beta_{n-2})\begin{pmatrix}\omega_{r_1}\\ \ldots\\ \omega_{r_{n-1}}\end{pmatrix},$$

где матрица $T_{kk+1}(\beta)$, $k = 1, ..., n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка M_{kk+1}:

$$T_{kk+1}(\beta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\ddots&0&0&0\\0&0&M_{kk+1}&0&0\\0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$
$$M_{kk+1}=\begin{pmatrix}m_{kk}&m_{kk+1}\\m_{k+1k}&m_{k+1k+1}\end{pmatrix},$$
$$m_{kk}=m_{k+1k+1}=\cos\beta,\quad m_{k+1k}=-m_{kk+1}=\sin\beta.$$

Введем следующие безразмерные переменные, параметры и дифференцирование:

$$w_1=\frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}},\ldots,\ w_{n-4}=\frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}},\quad w_{n-3}=\frac{z_2}{z_1},$$
$$w_{n-2}=w=\frac{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}}{n_0\nu},\quad w_{n-1}=\frac{z_{n-1}}{n_0\nu}, \tag{11}$$
$$n_0^2=\frac{AB}{(n-2)I_2},\quad b=\sigma n_0,\quad \sigma=CD,\quad n_0\nu\langle\,'\rangle''=\langle\dot{}\rangle.$$

В результате совместные уравнения (2), (6) при условиях (7)–(9) примут следующий вид:

$$\alpha'=-w_{n-1}+b\sin\alpha,$$
$$w'_{n-1}=\sin\alpha\cos\alpha-w^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{12}$$
$$w'=ww_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$w'_k=d_k\frac{1+w_k^2}{w_k}\frac{\cos\beta_k}{\sin\beta_k},$$
$$\beta'_k=d_k,\quad k=1,\ldots,n-3, \tag{13}$$

$$\beta'_{n-2}=Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{14}$$

где $Z_1(w_1,w_2,\ldots,w_{n-1})=z_1$ в силу замены (11), d_k, $k=1,2,\ldots,n-3$, – некоторые гладкие функции.

Видно, что система (12)–(14) порядка $2(n-1)$ распадается на совокупность независимых подсистем: система (12) – третьего порядка, $n-3$ систем (13) (после замены независимого переменного) – второго, при этом система (12), (13) – независимая подсистема порядка $2n-3$ (уравнение (14) отделяется).

Таким образом, для полного интегрирования системы (12)–(14) достаточно знать два независимых первых интеграла системы (12), $n-3$ независимых первых интеграла совокупности систем (13), а также одно инвариантное соотношение, “привязывающее” уравнение (14).

6. ПОЛНЫЙ СПИСОК ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Один из трансцендентных первых интегралов системы (12) имеет вид

$$\frac{w_{n-1}^2 + w^2 - bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (15)$$

И второй трансцендентный [14] интеграл, имеющий громоздкий вид, выражается через конечную комбинацию элементарных функций и имеет следующий структурный вид:

$$\ln|\sin\alpha| + G_1\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \quad (16)$$

Распавшаяся система (13) имеет $n - 3$ независимых первых интеграла

$$\frac{\sqrt{1 + w_k^2}}{\sin\beta_k} = C_{k+2} = \text{const}, \quad k = 1, 2, ..., n - 3, \quad (17)$$

а первый интеграл, “привязывающий” уравнение (14) на угол β_{n-2}, находим из уравнения

$$\frac{d\beta_{n-3}}{d\beta_{n-2}} = -\frac{w_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}};$$

при этом, используя первый интеграл (17) при $k = n - 3$, окончательно получим его вид:

$$\operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}w_{n-3}}{\sqrt{C_{n-1}^2 - 1 - w_{n-3}^2}} \pm \beta_{n-3} = C_n = \text{const}. \quad (18)$$

7. Теорема 2 (основная). *Динамическая часть* (2), (6) *уравнений движения n-мерного твердого тела при условиях* (1), (7)–(9), (10) *обладает полным списком инвариантных соотношений, одно из которых* (7) *является аналитической неинтегрируемой связью,* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *из которых* (8) *являются аналитическими функциями, а остальные* $n - 1$ (15)–(18) – *трансцендентными функциями своих переменных (после их формального продолжения в комплексную область), выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

В предыдущих работах автора [8–12] уже рассматривались задачи о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы. Данная работа открывает новый цикл работ по интегрированию многомерного твердого тела в неконсервативном поле, поскольку ранее, как уже указывалось (см., например, [1–4]), рассматривались лишь такие движения тела, когда поле внешних сил было потенциальным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12–01–00020-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О.И.* // ДАН. 1986. Т. 287. № 5. С. 1105–1108.
2. *Богоявленский О.И.* // ДАН. 1983. Т. 272. № 6. С. 1364–1367.
3. *Веселов А.П.* // ДАН. 1983. Т. 270. № 5. С. 1094–1097.
4. *Веселов А.П.* // ДАН. 1983. Т. 270. № 6. С. 1298–1300.
5. *Шамолин М.В.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1996. № 4. С. 57–69.
6. *Shamolin M.V.* Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body, In // J. Math. Sci. V. 122. № 1. 2004. P. 2841–2915.
7. *Шамолин М.В.* // ДАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.
8. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.
9. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.
10. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.
11. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.
12. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 448 с.
13. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости. В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд–во АН СССР, 1933. С. 133–135.
14. *Шамолин М.В.* // УМН. 1998, Т. 53. В. 3. С. 209–210.