Автоматика и телемеханика, № 8, 2013

© 2013 г. М.В. ШАМОЛИН, д-р физ.-мат. наук
(Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва)

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СРЕДОЙ[1]

Предъявлен полный список первых интегралов динамической части уравнений движения осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде при наличии дополнительной следящей силы. При этом первые интегралы являются трансцендентными функциями своих переменных в смысле комплексного анализа и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

1. Введение

Ранее в [1] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного) и имеющей существенно особые точки функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее в [2] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

Полученные автором ранее и опубликованные новые результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Эта зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

2. Более общая задача о движении со следящей силой

Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела с передним плоским торцом (двумерным диском) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности. Если (v, α, β_1) — сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00020-а).

тела (D — центр диска, лежащий на оси симметрии тела), $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — компоненты его угловой скорости в системе координат $Dx_1x_2x_3$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2, Dx_3 лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [3], см. далее), при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид:

$$\dot v\cos\alpha - \dot\alpha v\sin\alpha + \Omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \Omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \sigma(\Omega_2^2+\Omega_3^2) = \frac{F_x}{m},$$
$$\dot v\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \Omega_3 v\cos\alpha -$$
$$-\Omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \sigma\Omega_1\Omega_2 - \sigma\dot\Omega_3 = 0,$$
$$\dot v\sin\alpha\sin\beta_1 + \dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \Omega_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \tag{1}$$
$$-\Omega_2 v\cos\alpha - \sigma\Omega_1\Omega_3 + \sigma\dot\Omega_2 = 0,$$
$$\dot\Omega_1 = 0,$$
$$I_2\dot\Omega_2 + (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_3 = -z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$
$$I_2\dot\Omega_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

где

$$F_x = -S, \quad S = s(\alpha)v^2, \quad \sigma > 0, \quad v > 0. \tag{2}$$

Первые три уравнения (1) описывают движение центра масс в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^3$ в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3$. Вторые же три уравнения (1) получены из теоремы об изменении кинетического момента тела в осях Кенига.

Таким образом, фазовым пространством системы (1) шестого порядка является прямое произведение

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^2 \times \mathrm{so}(3) \tag{3}$$

трехмерного многообразия на алгебру Ли so(3).

Сразу же заметим, что система (1), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3, \tag{4}$$

обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \mathrm{const}. \tag{5}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \tag{6}$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во всё время движения выполнение равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс)

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \tag{7}$$

то в системе (1) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0, \quad \sigma = DC. \tag{8}$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{9}$$

Случай (9) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы пятого порядка после некоторого преобразования системы шестого порядка (1).

Действительно, пусть выполнено условие на величину T:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = \sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{3} \tau_{i,j}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\Omega_i\Omega_j = T_1\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)v^2,$$
$$\Omega_0 = v. \tag{10}$$

Введем для начала следующие квазискорости:

$$z_1 = \Omega_2\cos\beta_1 + \Omega_3\sin\beta_1, \quad z_2 = -\Omega_2\sin\beta_1 + \Omega_3\cos\beta_1. \tag{11}$$

Систему (1) в случаях (5) и (6) можно переписать в виде:

$$\begin{gathered}
\dot v + \sigma(z_1^2 + z_2^2)\cos\alpha - \\
-\sigma\frac{v^2}{I_2}s(\alpha)\sin\alpha\left[y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 + z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right] = \\
= \frac{T_1\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)v^2 - s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha, \\
\dot\alpha v + z_2 v - \sigma(z_1^2 + z_2^2)\sin\alpha - \\
-\sigma\frac{v^2}{I_2}s(\alpha)\cos\alpha\left[y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 + z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right] = \\
= \frac{s(\alpha)v^2 - T_1\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)v^2}{m}\sin\alpha, \\
\dot\Omega_3 = \frac{v^2}{I_2}y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \\
\dot\Omega_2 = -\frac{v^2}{I_2}z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \\
\dot\beta_1\sin\alpha - z_1\cos\alpha - \\
-\frac{\sigma v}{I_2}s(\alpha)\left[z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right] = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам:

$$z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, 2, \quad < \cdot >= n_1 v <'>, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \mathrm{const}, \tag{13}$$

система (12) приведется к виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = -Z_2 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \sin\alpha + \\ + \frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha) \cos\alpha \left[y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos\beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin\beta_1 \right] - \\ - \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin\alpha, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} Z_2' = \frac{s(\alpha)}{I_2 n_1^2} [1 - \sigma n_1 Z_2 \sin\alpha] \left[y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos\beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin\beta_1 \right] - \\ - Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sigma n_1 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos\alpha - \\ - \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \left[z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos\beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin\beta_1 \right] - \\ - Z_2 \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos\alpha, \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} Z_1' = \frac{1}{I_2 n_1^2} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} [\sigma n_1 Z_2 \sin\alpha - 1] \left[z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos\beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin\beta_1 \right] + \\ + Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos\alpha - \\ - \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 s(\alpha) \sin\alpha \left[z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin\beta_1 + y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos\beta_1 \right] - \\ - Z_1 \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos\alpha, \end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered} \beta_1' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ + \frac{\sigma}{I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \left[z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos\beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin\beta_1 \right], \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos\alpha + \\ + \frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha) \sin\alpha \left[y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos\beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin\beta_1 \right] + \\ + \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos\alpha. \end{gathered}$$

Видно, что в системе пятого порядка (14)–(18) может быть выделена независимая подсистема четвертого порядка (15)–(18), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем четырехмерном фазовом пространстве.

В частности, при выполнении условия (9) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы четвертого порядка также возможен.

3. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

3.1. Приведенная система

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [3], динамические функции s, y_N и z_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = y_0(\alpha, \beta_1) = A\sin\alpha\cos\beta_1,$$

$$z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = z_0(\alpha, \beta_1) = A\sin\alpha\sin\beta_1, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0, \tag{19}$$

убеждающем о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α и β_1).

Тогда благодаря условиям (7) и (19) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (14)–(18)) примет вид аналитической системы:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \tag{20}$$

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha,$$

$$Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{21}$$

$$Z_1' = Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

$$\beta_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{22}$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерный параметр b и постоянную n_1:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad n_1 = n_0. \tag{23}$$

Итак, система (20)–(22) может быть рассмотрена на своем фазовом пятимерном многообразии

$$W_1 = \mathbf{R}_+^1\{v\} \times T\mathbf{S}^2\{Z_1, Z_2, 0 < \alpha < \pi,\ 0 \leqslant \beta_1 < 2\pi\}, \tag{24}$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к двумерной сфере $\mathbf{S}^2\{0 < \alpha < \pi,\ 0 \leqslant \beta_1 < 2\pi\}$.

3.2. Полный список первых интегралов

От системы (20)–(22) отделилась независимая система четвертого порядка (21), (22).

Заметим, что в силу (7) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1), а именно: функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \beta_1, z_1, z_2) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + z_2^2) - 2\sigma z_2 v\sin\alpha = V_C^2 \tag{25}$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины z_1, z_2 выбираются в силу (11)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (20)–(22) также существует аналитический интеграл, а именно: функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + Z_2^2) - 2bZ_2 \sin\alpha) = V_C^2 \tag{26}$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (26) позволяет, не решая системы (20)–(22), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно: при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + Z_2^2) - 2bZ_2 \sin\alpha}. \tag{27}$$

Поскольку фазовое пространство (24) системы (20)–(22) пятимерно, а в нем существуют асимптотические предельные множества, то равенство (26) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (20)–(22) во всем фазовом пространстве.

Разберем подробнее вопрос существования других (дополнительных) первых интегралов системы (20)–(22). Фазовое пространство расслаивается на поверхности

$$\{(v, \alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) \in W_1 : \ \mathbf{V}_C = \mathrm{const}\}, \tag{28}$$

динамика на которых определяется с помощью первых интегралов системы (21), (22).

Для начала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (21) неавтономную систему второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_2}{d\alpha} &= \frac{\sin\alpha\cos\alpha + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha - Z_1^2\cos\alpha/\sin\alpha}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}, \\ \frac{dZ_1}{d\alpha} &= \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + Z_1Z_2\cos\alpha/\sin\alpha}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}. \end{aligned} \tag{29}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (29) в алгебраическом виде:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_2}{d\tau} &= \frac{\tau + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_2\tau^2 - Z_1^2/\tau}{-Z_2 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2)}, \\ \frac{dZ_1}{d\tau} &= \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_1\tau^2 + Z_1Z_2/\tau}{-Z_2 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2)}. \end{aligned} \tag{30}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$Z_k = u_k\tau, \quad k = 1, 2, \tag{31}$$

приводим систему (30) к виду:

$$\tag{32} \begin{gathered} \tau\frac{du_2}{d\tau}+u_2=\frac{1-bu_2\tau^2+bu_2(u_1^2+u_2^2)\tau^2-u_1^2}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau}+u_1=\frac{bu_1(u_1^2+u_2^2)\tau^2-bu_1\tau^2+u_1u_2}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)}, \end{gathered}$$

что эквивалентно системе:

$$\tag{33} \begin{gathered} \tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1-bu_2+u_2^2-u_1^2}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau}=\frac{2u_1u_2-bu_1}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)}. \end{gathered}$$

Сопоставим системе второго порядка (33) неавтономное уравнение первого порядка

$$\tag{34} \frac{du_2}{du_1}=\frac{1-bu_2+u_2^2-u_1^2}{2u_1u_2-bu_1},$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$\tag{35} d\left(\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1}\right)=0.$$

Итак, уравнение (34) имеет следующий первый интеграл:

$$\tag{36} \frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const},$$

который в прежних переменных выглядит так:

$$\tag{37} \frac{Z_2^2+Z_1^2-bZ_2\sin\alpha+\sin^2\alpha}{Z_1\sin\alpha}=C_1=\mathrm{const}.$$

З а м е ч а н и е 1. Рассмотрим систему (21) с переменной диссипацией с нулевым средним [2], становящейся консервативной при $b=0$:

$$\tag{38} \begin{gathered} \alpha'=-Z_2, \\ Z_2'=\sin\alpha\cos\alpha-Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ Z_1'=Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \end{gathered}$$

Эта система обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида:

$$\tag{39} Z_2^2+Z_1^2+\sin^2\alpha=C_1^*=\mathrm{const},$$

$$\tag{40} Z_1\sin\alpha=C_2^*=\mathrm{const}.$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (39), (40) также является первым интегралом системы (38). Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$Z_2^2 + Z_1^2 - bZ_2 \sin\alpha + \sin^2\alpha \tag{41}$$

и (40) по отдельности не является первым интегралом системы (21). Однако отношение функций (41), (40) является первым интегралом системы (21) при любом b.

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (21). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (36) при $u_1 \neq 0$:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{42}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{43}$$

и фазовое пространство системы (21) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (42).

Таким образом, в силу соотношения (36) первое уравнение системы (33) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1-\tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)}, \tag{44}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\right\}, \tag{45}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (43), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}. \tag{46}$$

Уравнение (46) (при помощи (45)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{47}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (47) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (47)), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1-(u_2-1)^2} \pm 1] \exp\left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1-(u_2-1)^2}}{1 \pm \sqrt{1-(u_2-1)^2}}}\right], \tag{48}$$
$$C = \text{const}.$$

Замечание 2. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (36).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$K_1\left(\sin\alpha, Z_2, Z_1, \frac{Z_2}{\sin\alpha}, \frac{Z_1}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{49}$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (21), (22) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, "привязывающий" уравнение (22).

Поскольку

$$\frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{u_1}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2+u_2^2) + b\tau(1-\tau^2)}, \tag{50}$$

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{u_1(2u_2-b)}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2+u_2^2) + b\tau(1-\tau^2)}, \tag{51}$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta_1} = 2u_2 - b. \tag{52}$$

Очевидно, что при $u_1 \neq 0$ выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(b \pm \sqrt{b_1^2 - 4\left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2}\right), \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4, \tag{53}$$

тогда интегрирование квадратуры

$$\beta_1 + \text{const} = \pm\int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - 4\left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2}} \tag{54}$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm\arcsin\frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \text{const}. \tag{55}$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm\frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}}, \tag{56}$$

или при переходе к старым переменным

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm\frac{2Z_1 - C_1 \sin\alpha}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}\ \sin\alpha}. \tag{57}$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, “привязывающего” уравнение (22), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому то, что в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (37).

Но проведем некоторые преобразования, приводящие к получению явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (36)):

$$\mathrm{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \frac{(u_1^2 - u_2^2 + bu_2 - 1)^2}{u_1^2(4u_2^2 - 4bu_2 + b^2)}. \tag{58}$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\mathrm{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \frac{(Z_1^2 - Z_2^2 + bZ_2 \sin\alpha - \sin^2\alpha)^2}{Z_1^2(4Z_2^2 - 4bZ_2 \sin\alpha + b^2 \sin^2\alpha)}, \tag{59}$$

или окончательно

$$-\beta_1 \pm \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{Z_1^2 - Z_2^2 + bZ_2 \sin\alpha - \sin^2\alpha}{Z_1(2Z_2 - b\sin\alpha)} = C_3 = \mathrm{const}. \tag{60}$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1) при условии (19) имеет пять инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (7), циклический первый интеграл вида (5), (6), первый интеграл вида (37), также имеется первый интеграл, находящийся из соотношения (47) ((49)), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентный первый интеграл вида (60).

Т е о р е м а 1. *Система* (1) *при условиях* (7), (5), (6), (19) *обладает пятью инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом по крайней мере четыре из пяти соотношений выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

4. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

4.1. Введение зависимости от угловой скорости и приведенная система

Продолжаем изучать динамику трехмерного твердого тела в трехмерном пространстве. Введем зависимость от угловой скорости. Напомним также, что данная точка зрения поможет вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на двумерный диск, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ — компоненты силы $\mathbf{S}$ воздействия среды, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}) = (x_N, y_N, z_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори неочевидно.

Итак, примем зависимость:

$$x = Q + R, \tag{61}$$

где $R = (R_1, R_2, R_3)$ — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции R от угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Здесь (h_1, h_2, h_3) — по-прежнему некоторые положительные параметры.

Теперь применительно к рассматриваемой задаче поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то

$$x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1 \frac{\Omega_3}{v}, \quad x_{3N} = z_N = Q_3 + h_1 \frac{\Omega_2}{v}. \tag{63}$$

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [3]

$$Q_2 = A \sin\alpha \cos\beta_1, \quad Q_3 = A \sin\alpha \sin\beta_1, \quad A > 0, \tag{64}$$

динамические функции s, y_N и z_N примем в виде:

$$\begin{gathered} s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad B > 0, \\ y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha\cos\beta_1 - h\frac{\Omega_3}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha\sin\beta_1 + h\frac{\Omega_2}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \end{gathered} \tag{65}$$

убеждающем в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости). Причем $h_2 = h_3$ в силу динамической симметрии тела.

Тогда благодаря условиям (7) и (65) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (14)–(18)) примет вид аналитической системы:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \tag{66}$$

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 Z_2\cos^2\alpha,$$

$$\begin{gathered} Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ + bH_1 Z_2^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_2\cos\alpha, \end{gathered} \tag{67}$$

$$\begin{gathered} Z_1' = (1 + bH_1)Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ + bH_1 Z_1 Z_2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_1\cos\alpha, \end{gathered}$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{68}$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1 Z_2\sin\alpha\cos\alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерные параметры b, H_1 и постоянную n_1:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh}{I_2 n_0}, \quad n_1 = n_0. \tag{69}$$

Видно, что в системе пятого порядка (66)–(68) выделилась независимая подсистема четвертого порядка (67), (68), которую, как будет показано далее, можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbf{S}^2$. При этом образовалась независимая система третьего порядка (67) на своем трехмерном многообразии.

4.2. Полный список первых интегралов

От системы (66)–(68) отделилась независимая система четвертого порядка (67), (68).

Заметим, что в силу (7) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1), а именно: функция фазовых переменных (25) постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины z_1, z_2 выбираются в силу (11)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (66)–(68) также существует аналитический интеграл, а именно: функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + Z_2^2) - 2bZ_2\sin\alpha) = V_C^2 \tag{70}$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (70) позволяет, не решая системы (66)–(68), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно: при $\mathbf{V}_C \neq 0$ выполнено равенство (27).

Поскольку фазовое пространство системы (66)–(68) пятимерно, а в нем существуют асимптотические предельные множества, то равенство (70) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (66)–(68) во всем фазовом пространстве.

Разберем подробнее вопрос существования других (дополнительных) первых интегралов системы (66)–(68). Фазовое пространство этой системы расслаивается на поверхности (28), динамика на которых определяется с помощью первых интегралов системы (67), (68).

Для начала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (67) неавтономную систему второго порядка:

$$\tag{71} \begin{gathered} \frac{dZ_2}{d\alpha} = \frac{R_2(\alpha, Z_1, Z_2)}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 Z_2\cos^2\alpha}, \\ \frac{dZ_1}{d\alpha} = \frac{R_1(\alpha, Z_1, Z_2)}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 Z_2\cos^2\alpha}, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} R_2(\alpha, Z_1, Z_2) = \sin\alpha\cos\alpha + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha - \\ -(1 + bH_1)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1 Z_2^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_2\cos\alpha, \\ R_1(\alpha, Z_1, Z_2) = bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ +(1 + bH_1)Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1 Z_1 Z_2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_1\cos\alpha. \end{gathered}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (71) в алгебраическом виде:

$$\tag{72} \begin{gathered} \frac{dZ_2}{d\tau} = \frac{\tau + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_2\tau^2 - (1 + bH_1)Z_1^2/\tau + bH_1 Z_2^2\tau - H_1 Z_2}{-Z_2 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) - bH_1 Z_2(1 - \tau^2)}, \\ \frac{dZ_1}{d\tau} = \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_1\tau^2 + (1 + bH_1)Z_1 Z_2/\tau + bH_1 Z_1 Z_2\tau - H_1 Z_1}{-Z_2 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) - bH_1 Z_2(1 - \tau^2)}. \end{gathered}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$\tag{73} Z_k = u_k\tau, \quad k = 1, 2,$$

приводим систему (72) к виду:

$$\tag{74} \begin{gathered} \tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - (1 + bH_1)u_1^2 - H_1 u_2 + bH_1 u_2^2\tau^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + (1 + bH_1)u_1 u_2 - H_1 u_1 + bH_1 u_1 u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}, \end{gathered}$$

что эквивалентно системе:

$$\tag{75} \begin{gathered} \tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}. \end{gathered}$$

Сопоставим системе второго порядка (75) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)u_1^2}{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}, \tag{76}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу

$$d\left(\frac{(1+bH_1)u_2^2+(1+bH_1)u_1^2-(b+H_1)u_2+1}{u_1}\right)=0. \tag{77}$$

Итак, уравнение (76) имеет первый интеграл вида

$$\frac{(1+bH_1)u_2^2+(1+bH_1)u_1^2-(b+H_1)u_2+1}{u_1}=C_1=\text{const}, \tag{78}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\frac{(1+bH_1)Z_2^2+(1+bH_1)Z_1^2-(b+H_1)Z_2\sin\alpha+\sin^2\alpha}{Z_1\sin\alpha}=C_1=\text{const}. \tag{79}$$

Замечание 3. Рассмотрим систему (67) с переменной диссипацией с нулевым средним [2], становящуюся консервативной при $b=H_1$:

$$\begin{aligned}
\alpha'&=-Z_2+b(Z_1^2+Z_2^2)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha-b^2Z_2\cos^2\alpha,\\
Z_2'&=\sin\alpha\cos\alpha-(1+b^2)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bZ_2(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha-bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha+\\
&\quad+b^2Z_2^2\sin\alpha\cos\alpha-bZ_2\cos\alpha,\\
Z_1'&=(1+b^2)Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bZ_1(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha-bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha+\\
&\quad+b^2Z_1Z_2\sin\alpha\cos\alpha-bZ_1\cos\alpha.
\end{aligned} \tag{80}$$

Система обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида:

$$(1+b^2)(Z_2^2+Z_1^2)-2bZ_2\sin\alpha+\sin^2\alpha=C_1^*=\text{const}, \tag{81}$$

$$Z_1\sin\alpha=C_2^*=\text{const}. \tag{82}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (81), (82) также является первым интегралом системы (80). Но при $b\neq H_1$ каждая из функций

$$(1+bH_1)(Z_2^2+Z_1^2)-(b+H_1)Z_2\sin\alpha+\sin^2\alpha \tag{83}$$

и (82) по отдельности не является первым интегралом системы (67). Однако отношение функций (83), (82) является первым интегралом системы (67) при любых b и H_1.

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (67). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (78) при $u_1\neq 0$:

$$\left(u_2-\frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2(1+bH_1)}\right)^2=\frac{(b-H_1)^2+C_1^2-4}{4(1+bH_1)^2}. \tag{84}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0 \tag{85}$$

и фазовое пространство системы (67) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (84).

Таким образом, в силу соотношения (78) первое уравнение системы (75) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1 - \tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}, \tag{86}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1)(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2)}\right\}, \tag{87}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (85), или вид уравнения Бернулли

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - (1 + bH_1)u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2 - H_1 u_2)}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}. \tag{88}$$

Уравнение (88) (при помощи (87)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1 + bH_1)u_2 - b)p + 2b(1 - H_1 u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2))}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{89}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (89) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (89), даже в частном случае:

$$|b - H_1| = 2, \quad C_1 = \frac{1 - A_1^4}{1 + A_1^4}, \quad A_1 = \frac{1}{2}(b + H_1)$$

имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[1 - A_1 u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \mp C_1} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times$$

$$\times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1 + A_1^4)A_1(A_1 u_2 - 1)}, \quad C = \text{const}. \tag{90}$$

Замечание 4. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (78).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$K_1\left(\sin\alpha, Z_2, Z_1, \frac{Z_2}{\sin\alpha}, \frac{Z_1}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{91}$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (67), (68) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же интегрируемости системы достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, "привязывающий" уравнение (68).

Поскольку

$$\frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{(1+bH_1)u_1}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2+u_2^2) + b\tau(1-\tau^2) - bH_1\tau u_2(1-\tau^2)}, \tag{92}$$

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2(1+bH_1)u_1u_2 - (b+H_1)u_1}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2+u_2^2) + b\tau(1-\tau^2) - bH_1\tau u_2(1-\tau^2)}, \tag{93}$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta_1} = 2u_2 - \frac{b+H_1}{1+bH_1}. \tag{94}$$

Очевидно, что при $u_1 \neq 0$ выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2(1+bH_1)}\left(b + H_1 \pm \sqrt{b_1^2 - (2(1+bH_1)u_1 - C_1)^2}\right), \tag{95}$$
$$b_1^2 = (b-H_1)^2 + C_1^2 - 4,$$

тогда интегрирование квадратуры

$$\beta_1 + \mathrm{const} = \pm(1+bH_1)\int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - (2(1+bH_1)u_1 - C_1)^2}} \tag{96}$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm\arcsin\frac{2(1+bH_1)u_1 - C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \mathrm{const}. \tag{97}$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm\frac{2(1+bH_1)u_1 - C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}} \tag{98}$$

или при переходе к старым переменным равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2(1 + bH_1)Z_1 - C_1 \sin\alpha}{\sqrt{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}\ \sin\alpha}. \tag{99}$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, “привязывающего” уравнение (68), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому, что в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (78).

Но проведем некоторые преобразования, приводящие к получению явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (78)):

$$\begin{gathered} \mathrm{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \\ = \frac{((1 + bH_1)u_1^2 - (1 + bH_1)u_2^2 + (b + H_1)u_2 - 1)^2}{u_1^2(2(1 + bH_1)u_2 - (b + H_1))^2}. \end{gathered} \tag{100}$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\begin{gathered} \mathrm{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \\ = \frac{((1 + bH_1)Z_1^2 - (1 + bH_1)Z_2^2 + (b + H_1)Z_2 \sin\alpha - \sin^2\alpha)^2}{Z_1^2(2(1 + bH_1)Z_2 - (b + H_1)\sin\alpha)^2} \end{gathered} \tag{101}$$

или окончательно

$$\begin{gathered} -\beta_1 \pm \frac{1}{2} \times \\ \times\, \mathrm{arctg}\, \frac{(1 + bH_1)Z_1^2 - (1 + bH_1)Z_2^2 + (b + H_1)Z_2 \sin\alpha - \sin^2\alpha}{Z_1(2(1 + bH_1)Z_2 - (b + H_1)\sin\alpha)} = C_3 = \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{102}$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1) при условии (65) имеет пять инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (7), циклический первый интеграл вида (5), (6), первый интеграл вида (79), также имеется первый интеграл, находящийся из соотношения (89) ((91)), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентный первый интеграл вида (102).

Т е о р е м а 2. *Система* (1) *при условиях* (7), (5), (6), (65) *обладает пятью инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом по крайней мере четыре из пяти соотношений выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

5. Заключение

Полученные результаты благодаря исследованию некоторой пространственной модельной задачи о движении твердого тела в среде с сопротивлением заставили иметь дело с первыми интегралами, обладающими нестандартными свойствами, а именно: они не являются всюду ни аналитическими, ни гладкими, а на некоторых множествах они даже разрывны. При этом они выражаются через конечную комбинацию элементарных функций. Последние обстоятельства тем не менее позволили-таки провести вполне ясный анализ полученных первых интегралов и указать на их соответствующие свойства "грубости". Последнее позволяет говорить о наличии в подобных системах некоторых нетривиальных симметрий скрытого типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Мамематика, механика. 1989. № 3. С. 51–55.
2. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2004.
3. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости / Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133–135.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Тхаем.

Поступила в редакцию 15.01.2013