ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2013, том 449, № 4, с. 416–419

МЕХАНИКА

УДК 531.01+531.552

ПОЛНЫЙ СПИСОК ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

© 2013 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком В.В. Козловым 03.12.2012 г.

Поступило 05.12.2012 г.

DOI: 10.7868/S0869565213100101

Как известно, изучение динамики многомерного твердого тела зависит от структуры силового поля. В нашем случае опорными результатами являются уравнения движения маломерных твердых тел в поле силы сопротивления среды. Тогда становится возможным обобщение динамической части уравнений на случай движения четырехмерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного списка трансцендентных первых интегралов. Полученные результаты важны с той точки зрения, что в системе присутствует неконсервативный момент, а ранее в основном использовалось поле сил потенциальное [1–4].

Ранее в [5, 6] была показана интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде при некоторых условиях, когда у системы динамических уравнений найден в явном виде первый интеграл, являющийся трансцендентной (прежде всего в смысле комплексного анализа и уже потом в смысле теории элементарных функций) функцией квазискоростей. При этом все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности, которая имеет форму (одномерной) пластины. Позднее [6, 7] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений также был найден в явном виде полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части его поверхности, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной работе исследуется динамическая часть уравнений движения динамически симметричного четырехмерного твердого тела, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного диска. При этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости, которая перпендикулярна данному диску. Более того, структура таких уравнений движения в некотором смысле сохраняется при переносе на случаи большей размерности (ср. с [8]).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ НА АЛГЕБРЕ so(4)

Рассмотрим движение однородного твердого тела массы m с “передним торцом” (двумерным диском, “взаимодействующим со средой, заполняющей четырехмерное пространство”) с динамической симметрией вида

$$I_1 = I_2, \quad I_3 = I_4 \tag{1}$$

в поле силы $\mathbf{S}$ сопротивления в условиях квазистационарности. Здесь I_1, I_2, I_3, I_4 – главные моменты инерции тела в некоторой связанной с ним системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$, при этом прямая CD лежит в плоскости Dx_1x_2 (C – центр масс), а оси Dx_3, Dx_4 лежат в плоскости диска. Пусть (v, α, β_1, β_2) – координаты вектора скорости $\mathbf{v}_D$ центра D двумерного диска такие, что α – угол между вектором $\mathbf{v}_D$ и плоскостью Dx_1x_2, β_2 – угол, измеряемый в плоскости Dx_1x_2 до проекции вектора $\mathbf{v}_D$ на плоскость Dx_1x_2, β_1 – угол, измеряемый в плоскости Dx_3x_4 до проекции вектора $\mathbf{v} = \mathbf{v}_D$ на плоскость Dx_3x_4. Расстояние от точки N приложения силы сопротивления до центра D диска является функцией, по крайней мере, одного параметра – угла α [6, 9, 10].

Примем следующие разложения:

$$\mathbf{DC} = \{\sin\gamma, -\sigma\cos\gamma, 0, 0\}, \quad \mathbf{S} = \{S_1, S_2, 0, 0\},$$

$$S_1 = S\sin\gamma, \quad S_2 = -S\cos\gamma, \quad \sigma = CD, \quad \gamma = \text{const},$$

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

при этом угол γ измеряется в плоскости Dx_1x_2. Величину силы примем в виде $S = s_1(\alpha)v^2$, где $s_1 \geq 0$, $s_1(\alpha) = s(\alpha)\operatorname{sign}\cos\alpha$.

Если Ω – тензор угловой скорости твердого тела, $\Omega \in so(4)$, то та часть уравнений движения тела, которая отвечает алгебре so(4), имеет следующий вид [6, 8]:

$$\Omega^{\bullet}\Lambda + \Lambda\Omega^{\bullet} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = \mathrm{M}, \tag{2}$$

где

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(-I_1 + I_2 + I_3 + I_4), \ldots$$
$$\ldots, \lambda_4 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + I_3 - I_4),$$

M – момент "внешних сил", действующих на тело в $\mathbf{R}^4$, спроектированный на "естественные" координаты в алгебре Ли so(4), [...] – коммутатор в so(4). Элемент (матрицу) $\Omega \in so(4)$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ – компоненты "угловой скорости" в проекциях на естественные координаты в алгебре so(4).

Если $(0, 0, x_{3N}, x_{4N})$ – координаты точки N в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, то при вычислении момента силы сопротивления необходимо построить отображение $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4\, so(4)$, переводящее пару векторов из $\mathbf{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры Ли so(4). В данном случае в проекциях на алгебру so(4) момент силы сопротивления имеет следующий вид (ср. с [6, 9, 10]):

$$(0, -x_{4N}s(\alpha)v^2\cos\gamma, \quad -x_{4N}s(\alpha)v^2\sin\gamma,$$
$$x_{3N}s(\alpha)v^2\cos\gamma,$$
$$x_{3N}s(\alpha)v^2\sin\gamma, 0) \in R^6 \simeq M \in so(4).$$

Здесь необходимо сделать важное замечание о введении зависимости функций координат точки N от тензора угловой скорости Ω. Зависимость будет использоваться линейная. При этом для того, чтобы момент имел диссипативный характер, выберем функции x_{3N}, x_{4N} в виде

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{3N} \\ x_{4N} \end{pmatrix} = Q - \frac{1}{v}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где Q – функции, не зависящие от тензора угловой скорости, $h_1, \ldots, h_4 > 0$, причем $h_1 = h_2$, $h_3 = h_4$ в силу соответствующей динамической симметрии тела (ср. со случаями меньшей размерности [5–8]). При этом

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R(\alpha)\cos\beta_1 \\ R(\alpha)\sin\beta_1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Впрочем, данные зависимости можно вводить и в случае n-мерного твердого тела.

С учетом сказанного можно получить уравнения движения в рассмотренном поле силы сопротивления, соответствующие алгебре so(4):

$$(\lambda_4 + \lambda_3)\omega_1^{\bullet} + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0, \tag{5}$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)\omega_2^{\bullet} + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = \\ = -x_{4N}s(\alpha)v^2\cos\gamma, \tag{6}$$

$$(\lambda_4 + \lambda_1)\omega_3^{\bullet} + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = \\ = -x_{4N}s(\alpha)v^2\sin\gamma, \tag{7}$$

$$(\lambda_3 + \lambda_2)\omega_4^{\bullet} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = \\ = x_{3N}s(\alpha)v^2\cos\gamma, \tag{8}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\omega_5^{\bullet} + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = \\ = x_{3N}s(\alpha)v^2\sin\gamma, \tag{9}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\omega_6^{\bullet} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = 0. \tag{10}$$

ДИНАМИКА В $\mathbf{R}^4$

Как и в трехмерном случае можно вывести формулы, аналогичные формулам Эйлера и Ривальса, т.е. скорости и ускорения любых двух точек A и B четырехмерного твердого тела в любой аффинной системе координат связаны соотношениями (ср. с [6])

$$v_B = v_A + \Omega AB, \quad w_B = w_A + \Omega^2 AB + \mathrm{E}AB, \tag{11}$$

где $\Omega \in so(4)$, $\mathrm{E} = \Omega^{\bullet} \in so(4)$. Матрица E является матрицей углового ускорения.

Таким образом, уравнение движения центра масс в $\mathbf{R}^4$ запишется при помощи (11) известным уравнением Ньютона

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}. \tag{12}$$

С помощью формул (5)–(12) получается полная динамическая часть системы уравнений движения четырехмерного твердого тела на $so(4) \times \mathbf{R}^4$.

ДВИЖЕНИЕ В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Рассмотрим такой класс движений тела, при котором во все время движения выполнены условия, достаточные для преобразования системы к системе с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [5, 6])

$$v \equiv \text{const}, \quad \beta_2 \equiv \text{const}. \tag{13}$$

Для достижения этого предположим, что на тело действует некоторая (следящая) сила **T**, обеспечивающая выполнение условий (13) (ср. с маломерными случаями [5–7]). Определенным выбором величины следящей силы в плоскости Dx_1x_2 выполнение условий (13) может быть достигнуто [6], при этом $\mathbf{F} = \mathbf{T} - \mathbf{S}$.

СЛУЧАЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поскольку выполнены равенства (1), то существуют два циклических первых интеграла у уравнений (5)–(10)

$$\omega_1 = \omega_1^0, \quad \omega_6 = \omega_6^0, \tag{14}$$

которые рассмотрим на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_6^0 = 0. \tag{15}$$

Для построения силового поля используется пара функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. По аналогии с маломерными случаями без ограничения общности [6] можно считать, что

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A > 0, \qquad s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad B > 0 \tag{16}$$

(функции Чаплыгина [11]).

Видно, что система (5)–(10) обладает двумя аналитическими первыми интегралами

$$\omega_2\sin\gamma - \omega_3\cos\gamma = W_1' = \mathrm{const}, \qquad \omega_4\sin\gamma - \omega_5\cos\gamma = W_1' = \mathrm{const}. \tag{17}$$

Прежде всего это означает, что ее можно редуцировать к системе четвертого порядка на своем четырехмерном фазовом многообразии.

Далее, применительно к нашему случаю в силу (3), (4), поскольку по выбору $x_{1N} \equiv x_{2N}$, имеем

$$x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{\nu}\right) = A\sin\alpha\cos\beta_1 - \frac{h}{\nu}(\omega_4 - \omega_5),$$
$$x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{\nu}\right) = A\sin\alpha\sin\beta_1 - \frac{h}{\nu}(\omega_3 - \omega_2), \tag{18}$$
$$h = h_1 = h_2.$$

Введем далее следующие безразмерные переменные, параметры и дифференцирование:

$$u_1 = \omega_2 - \omega_3, \quad u_2 = \omega_4 - \omega_5,$$
$$u_3 = \omega_2\cos\beta_2 - \omega_3\sin\beta_2,$$
$$u_4 = \omega_4\cos\beta_2 - \omega_5\sin\beta_2, \quad \cos\beta_2 \neq \sin\beta_2,$$
$$\nu_1 = -u_1\sin\beta_1 + u_2\cos\beta_1,$$
$$\nu_2 = u_1\cos\beta_1 + u_2\sin\beta_1,$$
$$\nu_3 = -u_3\sin\beta_1 + u_4\cos\beta_1,$$
$$\nu_4 = u_3\cos\beta_1 + u_4\sin\beta_1,$$
$$s_1 = \nu_3 + bH_1\nu_1, \quad s_2 = \nu_4 + bH_1\nu_2,$$
$$n_0^2 = \frac{AB}{I_1 + I_3}, \quad b = \sigma n_0, \quad H_1 = \frac{hB}{(I_1 + I_3)n_0},$$
$$[b] = [H_1] = 1,$$
$$\nu_k \to n_0\nu\nu_k, \quad k = 1, \ldots, 4, \quad n_0\nu\langle'\rangle'' = \langle\cdot\rangle.$$

В результате совместные уравнения (5)–(11) при условиях (1), (13), (15) примут следующий вид:

$$\alpha' = -s_1 + b\sin\alpha, \tag{19}$$

$$\beta_1' = s_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{20}$$

$$s_1' = R_1\sin\alpha\cos\alpha - s_2^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_1H_1\nu_1\cos\alpha, \tag{21}$$

$$s_2' = s_1s_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_1H_1\nu_2\cos\alpha, \tag{22}$$

$$\nu_1' = R_2\sin\alpha\cos\alpha - s_2\nu_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_2H_1\nu_1\cos\alpha, \tag{23}$$

$$\nu_2' = \nu_1s_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_2H_1\nu_2\cos\alpha, \tag{24}$$

где $R_1 = bH_1(\cos\gamma - \sin\gamma) + \cos(\gamma + \beta_2)$, $R_2 = \cos\gamma - \sin\gamma$ (случаи, где вводимые координаты вырождаются, исследуются отдельно).

Видно, что формально при $H_1 = 0$ в системе (19)–(24) выделяется независимая подсистема четвертого порядка (19)–(22) на касательном расслоении к двумерной сфере, в которой, в свою очередь, может быть выделена независимая подсистема третьего порядка (19), (21), (22) на своем трехмерном фазовом многообразии. Это, в принципе, и понятно, поскольку при $H_1 = 0$ мы попадаем в условия отсутствия зависимости момента сил от тензора угловой скорости (ср. с [12, 13]). Последнее позволяет аналогичным образом проинтегрировать рассматриваемую систему четвертого порядка (19)–(22), а значит, и рассматриваемую систему шестого порядка (19)–(24), поскольку существуют два независимых аналитических первых интеграла (17). В данном же случае для нас существенно, что $H_1 \neq 0$. Поэтому преобразуем имеющиеся аналитические первые интегралы:

$$R_1\nu_2\cos\beta_1 - R_1\nu_1\sin\beta_1 + R_2[s_1\sin\beta_1 - s_2\cos\beta_1] = W_1^0 = \mathrm{const}, \tag{25}$$

$$R_1\nu_2\sin\beta_1 + R_1\nu_1\cos\beta_1 - R_2[s_1\cos\beta_1 + s_2\sin\beta_1] = W_2^0 = \mathrm{const}. \tag{26}$$

Отсюда следует, что

$$R_1\nu_2 = R_2s_2 + \psi_1(\beta_1, W_1^0, W_2^0),$$
$$R_1\nu_1 = R_2s_1 + \psi_2(\beta_1, W_1^0, W_2^0),$$
$$\psi_1(\beta_1, W_1^0, W_2^0) = W_1^0\cos\beta_1 + W_2^0\sin\beta_1,$$
$$\psi_2(\beta_1, W_1^0, W_2^0) = W_2^0\cos\beta_1 - W_1^0\sin\beta_1.$$

Тогда система (19)–(24) примет вид независимой системы четвертого порядка:

$$\alpha' = -s_1 + b\sin\alpha, \tag{27}$$

$$s_1' = R_1\sin\alpha\cos\alpha - s_2^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_2H_1s_1\cos\alpha - H_1\psi_2(\beta_1, W_1^0, W_2^0)\cos\alpha, \tag{28}$$

$$s_2' = s_1 s_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_2 H_1 s_2 \cos\alpha -$$
$$- H_1 \psi_1(\beta_1, W_1^0, W_2^0)\cos\alpha, \qquad (29)$$
$$\beta_1' = s_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (30)$$

Систему (27)–(30) можно рассматривать как систему (19)–(24), редуцированную на уровни (W_1^0, W_2^0) аналитических первых интегралов (25), (26). Поскольку $\psi_1(\beta_1, 0, 0) \equiv \psi_2(\beta_1, 0, 0) \equiv 0$, то будем рассматривать систему (27)–(30) на нулевых уровнях аналитических первых интегралов (25), (26):

$$W_1^0, W_2^0 = 0. \qquad (31)$$

ПОЛНЫЙ СПИСОК ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Один из трансцендентных первых интегралов имеет вид

$$\frac{s_1^2 + s_2^2 - (b + R_2 H_1)s_1 \sin\alpha + R_1 \sin^2\alpha}{s_2 \sin\alpha} =$$
$$= C_1 = \text{const}. \qquad (32)$$

Второй трансцендентный интеграл имеет громоздкий вид, тем не менее, выражается через конечную комбинацию элементарных функций. Поэтому приведем лишь его структурный вид:

$$\ln|\sin\alpha| + G_1\left(\sin\alpha, \frac{s_1}{\sin\alpha}, \frac{s_2}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \qquad (33)$$

А первый интеграл, “привязывающий” уравнение (34) на угол β_1, имеет вид

$$2\beta_1 \pm \operatorname{arctg}\frac{s_2^2 - s_1^2 + (b + R_2 H_1)s_1 \sin\alpha - R_1 \sin^2\alpha}{s_2(2s_1 - (b + R_2 H_1)\sin\alpha)} =$$
$$= C_3 = \text{const}. \qquad (34)$$

Основная теорема. *Динамическая часть уравнений движения* (2), (12) *при условиях* (13), (15), (16), (18), (31) *обладает полным списком* (*девять*) *инвариантных соотношений, два из которых* ((13)) *являются неинтегрируемыми связями, четыре* ((14), (17)) *являются аналитическими элементарными функциями*, *а остальные три* ((32)–(34)) *— трансцендентными функциями своих переменных* (*после их формального продолжения в комплексную область*), *выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

В работах автора [6, 9, 10] уже рассматривались задачи о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил, а также при наличии дополнительной следящей силы. Данная работа дополняет предыдущие исследования и открывает новый цикл работ, поскольку ранее (см., например, [1–4]) рассматривались лишь такие движения четырехмерного тела, когда момент внешних сил был тождественно равен нулю ($M \equiv 0$) или поле внешних сил было потенциальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О.И.* // ДАН. 1986. Т. 287. № 5. С. 1105–1108.
2. *Богоявленский О.И*// ДАН. 1983. Т. 272. № 6. С. 1364–1367.
3. *Веселов А.П.* // ДАН. 1983. Т. 270. № 5. С. 1094–1097.
4. *Веселов А.П.* // ДАН. 1983. Т. 270. № 6. С. 1298–1300.
5. *Шамолин М.В.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 1. С. 52–58.
6. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.
7. *Шамолин М.В.* // ДАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.
8. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 448 с.
9. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.
10. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.
11. *Чаплыгин С.А.* В кн.: Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133–135.
12. *Шамолин М.В.* // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.
13. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.