

УДК 531.01+531.552

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

© 2012 г. *М.В. Шамолин*

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова
shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru

Построена нелинейная математическая модель плоскопараллельного и пространственного воздействия среды на твердое тело, учитывающая зависимость плеча силы от приведенной угловой скорости тела (типа числа Струхалия). В этом случае сам момент силы воздействия является также функцией угла атаки. Как показала обработка эксперимента о движении в воде однородных круговых цилиндров, эти обстоятельства необходимо учитывать при моделировании. При изучении плоской и пространственной моделей взаимодействия твердого тела со средой найдены новые случаи полной интегрируемости в элементарных функциях, что позволило обнаружить качественные аналогии между движениями тел, свободных в сопротивляющейся среде, и колебаниями тел, частично закрепленных и находящихся в потоке набегающей среды.

Ключевые слова: твердое тело, сопротивляющаяся среда, струйное обтекание, полная интегрируемость, вращательные производные.

THE PROBLEM OF A RIGID BODY MOTION IN A RESISTING MEDIUM WITH THE ASSUMPTION OF DEPENDENCE OF THE FORCE MOMENT FROM THE ANGULAR VELOCITY

M.V. Shamolin

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University

The nonlinear mathematical model of the planar and spatial interaction of a medium to the rigid body was constructed. That model takes into account the dependency of shoulder of force from effective angular velocity of the body (the type of Struhali number). In this case the moment of force of the interaction itself is also function of the angle of attack. As it has shown for processing the experiment on the motion of the uniform circular cylinders in water, these facts necessary to take into account at modeling. At study of flat and spatial model of the interaction of the rigid body with a medium the new cases of full integrability in elementary function are found that has allowed to find the qualitative analogies between the free moving bodies in a resisting medium and the oscillations of bolted bodies in a jet flow.

Key words: rigid body, resisting medium, jet flow, full integrability, rotating derivative.

Введение

Предлагаемая работа представляет собой исследование задачи плоскопараллельно-

го и пространственного движения твердого тела, взаимодействующего со средой лишь через плоский участок его внешней поверхности. При построении силового поля используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности [1–7]. Движение среды не изучается, а рассматривается такая задача динамики твердого тела, в которой характерное время движения тела относительно его центра масс соизмеримо с характерным временем движения самого центра.

При таком исследовании приведенные динамические системы сводятся к системам либо с рассеянием энергии (диссипативные системы), либо с ее подкачкой (так называемые системы с ускоряющими силами или с антидиссипацией). Подобные задачи уже появлялись в прикладной аэродинамике в исследованиях ЦАГИ.

По причине сложности нелинейного анализа начальным этапом такого исследования явилось пренебрежение зависимостью момента силы воздействия среды от угловой скорости тела и использование такой зависимости лишь от угла атаки [5, 6]. Результаты, найденные при указанном простейшем предположении, позволяют сделать вывод о невозможности нахождения таких условий, при которых у приведенных систем существовали бы решения, соответствующие угловым колебаниям тела ограниченной амплитуды [3, 7–9]. Эксперимент же о движении в воде однородных круговых цилиндров [2, 3, 5] подтвердил, что необходимо учитывать также зависимость момента силы воздействия среды и от угловой скорости тела.

В результате анализа приведенных динамических систем становится также естественным введение определения относительной грубости (относительной структурной устойчивости) и ее доказательство для исследуемых систем (см. [9]). Более того, становится актуальным проведение полного интегрирования динамической части уравнений движения в плоском и пространственном случаях, что и проделано в данной работе для различных модельных вариантов через конечные комбинации элементарных функций.

1. Плоскопараллельное движение симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде

1.1. Постановка задачи. Предположим, что однородное твердое тело массы m совершает плоскопараллельное движение в среде с квадратичным законом сопротивления, и некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой плоскую пластину AB , находящуюся в условиях струйного обтекания средой. Это означает, что, в случае отсутствия касательных сил воздействие среды на пластину (тело) сводится к силе S (приложенной в точке N), ортогональной к ней (рис.1). Остальная часть поверхности тела может быть размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края пластины, и не испытывает действия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа тела в воду [3, 5].

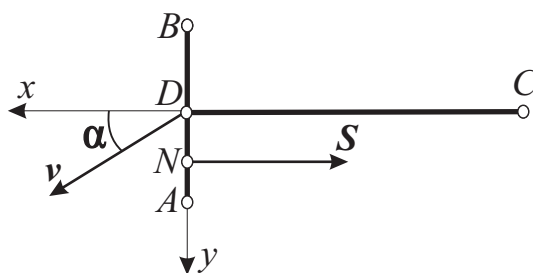


Рис.1.

Предполагается также, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления (воздействия) среды.

Свяжем с пластиной правую систему координат $Dxyz$ (ось z – перпендикулярна плоскости рисунка) и для простоты будем считать Dzx плоскостью геометрической симметрии тела. Тогда среди движений такого симметричного тела существует режим прямолинейного поступательного торможения (невозмущенного движения), перпендикулярного пластине AB . При этом срединный перпендикуляр Dx , опущенный из центра тяжести C тела на плоскость пластины, принадлежит линии действия силы S . При возмущении же данного режима вектор скорости v точки D отклоняется от оси геометрической симметрии на некоторый угол (атаки) α . При этом точка N приложения силы сопротивления S смещается от точки D на величину y_N .

Для построения динамической модели введем первые три фазовые координаты: v – величина скорости точки D относительно потока (рис.1), α – угол (атаки) между вектором v скорости точки D и осью Dx , Ω – значение угловой скорости, $AB = \Delta$.

Примем, что величина силы S квадратично зависит $S = s_1 v^2$ от v с некоторым коэффициентом s_1 . Обычно его представляют в виде $s_1 = \rho P c_x / 2$, где c_x – уже безразмерный коэффициент лобового сопротивления (ρ – плотность среды, P – площадь пластины). Этот коэффициент зависит от угла атаки, числа Струхаля и других величин, которые в статических моделях обычно считают параметрами. Мы же в дальнейшем вводим безразмерную фазовую переменную «типа Струхаля» $\omega \cong \Omega \Delta / v$, а также вспомогательную функцию $s(\alpha) = s_1(\alpha) \operatorname{sgn} \cos \alpha$. При этом воздействие среды на тело будут определять две функции фазовых переменных: y_N и s .

Ограничимся зависимостью c_x от угла атаки, т.е. будем считать величину s функцией α , а величину y_N – функцией пары безразмерных переменных (α, ω) .

Преыдушие авторы [2] исследовали плоское взаимодействие, при котором учитывается зависимость пары (y_N, s) лишь от угла атаки. В данной же работе изучаются движения тела в нелинейной постановке в случае зависимости величины s от угла атаки, и при условии дополнительной зависимости величины y_N от приведенной угловой скорости ω .

При тех же предположениях на характер взаимодействия тела со средой выделим такой более общий класс задач, при котором к телу, наряду с силой воздействия среды, приложена следящая сила (тяги) T по прямой CD (рис.1). Одна из таких задач уже решалась [2, 4] при условии, когда тяга постоянна, и была показана неустойчивость невозмущенного движения.

Отметим случай движения, который подвергся обстоятельному анализу: движение тела, при котором во все время постоянна величина скорости центра пластины (наличие неинтегрируемой связи):

$$v \equiv \text{const.} \tag{1.1}$$

1.2. Плоскопараллельное торможение с малыми углами атаки [8]. Задача о свободном торможении тела с малыми углами атаки формирует представление о нелинейных динамических системах, описывающих взаимодействие среды с телом, при уче-

те так называемых вращательных производных момента силы воздействия среды по угловой скорости тела.

На невозмущенном движении тела выполнены уравнения $\alpha(t) \equiv 0$, $\omega(t) \equiv 0$. Поэтому функция $y_N(\alpha, \omega)$ при малых (α, ω) принимается в виде

$$y_N = \Delta(k\alpha - h\omega), \quad (1.2)$$

где k и h – некоторые безразмерные постоянные. Зависимостью же s от α , в силу геометрической симметрии тела, обеспечивающей четность функции s , пренебрегаем.

Изучение свойств движения рассматриваемых классов тел в Институте механики МГУ им. М.В. Ломоносова В.А. Ерошиным и В.М. Макарашиным было начато экспериментами по регистрации движения в воде однородных круговых цилиндров. Эксперимент (обработку результатов которого проводил автор) позволил остановиться на важных выводах. Первый: режим прямолинейного поступательного торможения тела (в воде) неустойчив, по крайней мере, по отношению к углу ориентации тела. Стало возможным также определение безразмерных параметров k , h воздействия среды на твердое тело [5] (ср. также с [10]).

Второй вывод, полученный из проведенного натурального эксперимента, следующий: при моделировании воздействия среды на тело необходимо учитывать дополнительный параметр, эквивалентный так называемой вращательной производной момента гидроаэродинамических сил по угловой скорости тела. Этот параметр вносит в систему дополнительную диссипацию.

1.3. Уравнения движения. Положение тела на плоскости зададим координатами (x_0, y_0) точки D и углом отклонения φ . Полярные координаты (v, α) конца вектора скорости точки D и проекция угловой скорости Ω связаны с переменными $(x_0^\bullet, y_0^\bullet, \varphi^\bullet, \varphi)$ (неинтегрируемыми) кинематическими соотношениями:

$$\varphi^\bullet = \Omega, \quad x_0^\bullet = v \cos(\alpha + \varphi), \quad y_0^\bullet = v \sin(\alpha + \varphi). \quad (1.3)$$

Таким образом, фазовое состояние системы можно определять через функции $(v, \alpha, \Omega, x_0, y_0, \varphi)$, а первые три величины рассматривать в качестве квазискоростей системы. При этом кинетическая энергия тела и сила воздействия среды не зависят от положения тела на плоскости. Поэтому координаты (x_0, y_0, φ) являются циклическими. Это приводит к отделению динамической части уравнений движения.

В силу теорем о движении центра масс (в проекциях на связанные оси Dx) и об изменении кинетического момента, получаем динамическую часть дифференциальных уравнений движения, рассматриваемую в трехмерном фазовом пространстве квазискоростей (σ – расстояние DC , I – центральный момент инерции) (см. также [8]):

$$v^\bullet \cos \alpha - \alpha^\bullet v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = -s(\alpha)v^2 / m, \quad (1.4)$$

$$v^\bullet \sin \alpha + \alpha^\bullet v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \Omega^\bullet = 0, \quad (1.5)$$

$$I\Omega^{\bullet} = y_N(\alpha, \omega)s(\alpha)v^2, \quad \omega \cong \Omega/v. \quad (1.6)$$

Системы (1.3) и (1.4)–(1.6) вместе образуют полную систему для описания плоскопараллельного движения твердого тела в среде под действием силы сопротивления в условиях квазистационарности.

Если же рассматривается введенный выше более широкий класс задач о движении тела при наличии следящей силы, то в правой части уравнения (1.4) стоит, очевидно, следующая величина: $T/m - s(\alpha)v^2/m$.

В частности, для обеспечения выполнения условия (1.1) ($v \equiv \text{const}$) величину T следящей силы достаточно выбрать следующим образом:

$$T = T(v, \alpha, \Omega) = m\sigma\Omega^2 + v^2 \left[s(\alpha) - \frac{m\sigma y_N(\alpha, \omega)s(\alpha)\sin\alpha}{I\cos\alpha} \right], \quad \omega \cong \Omega/v,$$

при этом уравнение (1.4) удовлетворяется тождественно.

Как уже отмечалось, в работе ограничимся введением угловой скорости в качестве аргумента лишь в функцию y_N . В дальнейшем, по аналогии с задачей о свободном торможении при малых углах атаки (см. (1.2)), величину y_N будем рассматривать в виде

$$y_N(\alpha, \omega) \cong y_N(\alpha, \frac{\Omega}{v}) = y(\alpha) - H\frac{\Omega}{v}, \quad (1.7)$$

при этом $H > 0$ в силу результатов эксперимента.

При условии (1.7) уравнение (1.6) примет следующий вид:

$$I\Omega^{\bullet} = F(\alpha)v^2 - Hs(\alpha)\Omega v. \quad (1.8)$$

Здесь введено обозначение: $F(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha)$.

Система (1.4), (1.5), (1.8) содержит функции $F(\alpha)$, $s(\alpha)$, явный вид которых, даже для пластин простой формы, аналитически описать довольно затруднительно. По этой причине (как и в [9]) используется прием «погружения» данной задачи в более широкий класс задач, учитывающий лишь качественные свойства функций $F(\alpha)$, $s(\alpha)$ [8].

Опорным для нас является результат С.А. Чаплыгина, который для плоскопараллельного струйного обтекания пластины бесконечной длины получил функции $y(\alpha)$, $s(\alpha)$ в аналитическом виде [11, 12]:

$$y(\alpha) = y_0(\alpha) = A\sin\alpha \in Y, \quad A > 0, \quad (1.9)$$

$$s(\alpha) = s_0(\alpha) = B\cos\alpha \in \Sigma; \quad B > 0. \quad (1.10)$$

Этот результат помогает построить функциональные классы $\{y\}$, $\{s\}$, а затем и $\{F\}$ [8].

Сочетая (1.9), (1.10) с экспериментальной информацией о свойствах струйного обтекания, формально введем классы функций воздействия среды. Они состоят из функций, достаточно гладких, 2π -периодических ($y(\alpha)$ – нечетная, а $s(\alpha)$ – четная), удовле-

творяющих следующим условиям: $y(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $y'(0) > 0, y'(\pi) < 0$ (класс функций $\{y\} = Y$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0, s'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{s\} = \Sigma$). Как y , так и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$. Таким образом,

$$y \in Y, \quad (1.11)$$

$$s \in \Sigma. \quad (1.12)$$

Из вышеперечисленных условий следует, что F – достаточно гладкая нечетная π -периодическая функция, удовлетворяющая условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0, F'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{F\} = \Phi$). Таким образом,

$$F \in \Phi. \quad (1.13)$$

В частности, аналитическая функция [11, 12]

$$F = F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in \Phi \quad (1.14)$$

является типичным представителем класса функций Φ .

1.4. Движение тела в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы.

Рассмотрим плоскопараллельное движение тела в среде при наличии такой действующей на тело следящей силы, которая обеспечивает во все время движения выполнение условия (1.1). Тогда к параметрам системы, введенным ранее, добавляется положительный параметр v . Таким образом, динамическая часть уравнений движения твердого тела в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы в случае (1.1) приводится к системе второго порядка:

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \Omega^\bullet &= 0, \\ I \Omega^\bullet &= F(\alpha) v^2 - H s(\alpha) \Omega v, \quad H > 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Вне и только вне объединения прямых

$$O = \left\{ (\alpha, \Omega) \in R^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 1, 2 \right\}, \quad (1.16)$$

лежащих на плоскости $R^2 \{\alpha, \Omega\}$, система (1.15) эквивалентна следующей системе нормального вида:

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= -\Omega + \frac{\sigma v F(\alpha)}{I \cos \alpha} - \frac{\sigma}{I} H \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \Omega, \\ \Omega^\bullet &= \frac{v^2}{I} F(\alpha) - H \frac{v}{I} \Omega s(\alpha). \end{aligned} \quad (1.17)$$

«Опорной» для нас системой назовем систему (1.17) при выполнении условий (1.9), (1.10):

$$\alpha^\bullet = -\left(1 + \frac{\sigma B}{I} H\right) \Omega + \frac{\sigma v AB}{I} \sin \alpha ,$$

$$\Omega^\bullet = \frac{ABv^2}{I} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{BHv}{I} \Omega \cos \alpha .$$

Введем безразмерные параметры и дифференцирование $n_0^2 = AB/I$, $b = \sigma n_0$, $H_1 = BH / In_0$, $\langle \bullet \rangle = n_0 v \langle ' \rangle$, а также безразмерную переменную «типа Струхаля» следующего вида: $\Omega = n_0 v \omega$.

Тогда опорная система в новых обозначениях примет вид

$$\alpha' = -(1 + bH_1)\omega + b \sin \alpha ,$$

$$\omega' = [\sin \alpha - H_1 \omega] \cos \alpha .$$
(1.18)

Как уже указывалось в предыдущих работах автора [9,13], нелинейная автономная система второго порядка, обладающая асимптотическими предельными множествами, редко когда обладает первым интегралом, выражающимся через конечную комбинацию элементарных функций. Более того, такой первый интеграл с точки зрения комплексного анализа должен быть функцией трансцендентной, т.е. иметь существенно особые точки (соответствующие, кстати, имеющимся притягивающим или отталкивающим асимптотическим предельным множествам).

Получим первый интеграл для опорной системы (1.18) в явном виде. Для этого сопоставим данной системе следующее уравнение:

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha - H_1 \omega \cos \alpha}{-\omega + b \sin \alpha - bH_1 \omega} .$$

Делая формальную подстановку $\tau = \sin \alpha$, приходим к однородному уравнению

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau - H_1 \omega}{-\omega + b\tau - bH_1 \omega} ,$$

которое легко интегрируется в квадратурах следующим образом.

Проведем замену, характерную для однородных уравнений: $\omega = \xi \tau$. В результате этого последнее уравнение приведет к следующему виду (здесь $d\omega = \xi d\tau + \tau d\xi$, $[-\omega + b\tau - bH_1 \omega]d\omega = [\tau - H_1 \omega]d\tau$):

$$[-\xi + b - bH_1 \xi][\xi d\tau + \tau d\xi] = [1 - H_1 \xi]d\tau .$$

В последнем уравнении легко разделяются переменные

$$[-\xi^2(1+bH_1)+(b+H_1)\xi-1]d\tau = [(bH_1+1)\xi-b]\tau d\xi.$$

Имеем, таким образом, следующую квадратуру:

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{[(bH_1+1)\xi-b]d\xi}{-\xi^2(1+bH_1)+(b+H_1)\xi-1}. \quad (1.19)$$

Интегрирование квадратуры (1.19) приводит к рассмотрению трех случаев. Несложный подсчет приводит к следующим первым интегралам:

I. $|b-H_1| < 2.$

$$\ln(1-(b+H_1)\xi+(1+bH_1)\xi^2) - \frac{2b}{\sqrt{4-(b-H_1)^2}} \operatorname{arctg} \frac{2(1+bH_1)\xi-(b+H_1)}{\sqrt{4-(b-H_1)^2}} + \ln \tau^2 = \text{const}.$$

II. $|b-H_1| > 2.$

$$\frac{1}{1+bH_1} \ln \left| 1-(b+H_1)\xi+(1+bH_1)\xi^2 \right| + \ln \tau^2 + \frac{b\sqrt{1+bH_1}}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}} \ln \left| \frac{2(1+bH_1)^{3/2}\xi-(b+H_1)\sqrt{1+bH_1}+\sqrt{(b-H_1)^2-4}}{2(1+bH_1)^{3/2}\xi-(b+H_1)\sqrt{1+bH_1}-\sqrt{(b-H_1)^2-4}} \right| = \text{const}.$$

III. $|b-H_1| = 2.$

$$\ln \left| \xi - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)} \right| + \frac{b-H_1}{2(1+bH_1)\xi-(b+H_1)} + \ln |\tau| = \text{const}.$$

Случаи I, II, III соответствуют различному характеру стремления траекторий системы (1.18) на фазовом цилиндре к притягивающим или отталкивающим положениям равновесия. Действительно, случай I соответствует, например, наличию затухающих колебаний, а случаи II, III — наличию аperiodических режимов.

В переменных (α, ω) найденные первые интегралы имеют достаточно громоздкий вид. Тем не менее, в случае III мы приведем его в явном виде:

$$\left(\omega - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)} \sin \alpha \right) \exp \left\{ \frac{(b-H_1) \sin \alpha}{2(1+bH_1)\omega - (b+H_1) \sin \alpha} \right\} = \text{const}.$$

Предложение 1. Система (1.18) обладает трансцендентным первым интегралом, выражающимся через конечную комбинацию элементарных функций.

Действительно, с помощью квадратуры (1.19) первый интеграл системы (1.18) оп-

ределяется в явном виде. В зависимости от коэффициентов b и H_1 квадратура (1.19) может быть представлена в трех различных видах (I, II, III), соответствующих фокусам, узлам или вырожденным узлам (притягивающим или отталкивающим), лежащим на фазовом цилиндре системы (1.18).

Более того, система (1.18) сводится к уравнению приведенного маятника

$$\alpha^{\bullet\bullet} + (H_1 - b)\alpha^{\bullet} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 0. \quad (1.20)$$

Легко показать, что при $H_1 > b$ ($H_1 < b$) решение уравнения (1.20) $\alpha \equiv \alpha^{\bullet} \equiv 0$ (или, соответственно, тривиальное решение системы (1.18)) асимптотически устойчиво (является отталкивающим).

У системы (1.18) (впрочем, как и у системы более общего вида (1.17)) на фазовом цилиндре $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$ имеются лишь неподвижные точки, задаваемые соотношениями:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \omega_0, \quad \omega_0 = \frac{b}{1 + bH_1}, \quad (1.21)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2}, \quad \omega = -\omega_0, \quad (1.22)$$

$$\alpha = 0, \quad \omega = 0, \quad (1.23)$$

$$\alpha = \pi, \quad \omega = 0. \quad (1.24)$$

Проведем классификацию типов неподвижных точек (1.21)–(1.24) системы (1.18).

1. Точка $(0,0)$. Вид характеристического уравнения возле данной точки $\lambda^2 + (H_1 - b)\lambda + 1 = 0$ позволяет сделать вывод о том, что при $H_1 > b$ исследуемая точка является притягивающей, а при $H_1 < b$ – отталкивающей, при этом в зависимости от значения $\text{Dis} = (H_1 - b)^2 - 4$ точка является либо фокусом, либо узлом.

2. Точка $(\pi,0)$. Вид характеристического уравнения возле данной точки $\lambda^2 + (b - H_1)\lambda + 1 = 0$ позволяет сделать вывод о том, что при $H_1 < b$ исследуемая точка является притягивающей, а при $H_1 > b$ – отталкивающей, при этом в зависимости от значения $\text{Dis} = (H_1 - b)^2 - 4$ точка является либо фокусом, либо узлом.

Замечание 1. Векторное поле системы (1.17) обладает двумя видами симметрий: центральной и так называемой некоторой зеркальной симметрией [7] (рис.2).

Поэтому типы особых точек 1 и 2 в некотором смысле двойственны, а значит, исследование в явном виде типа особой точки 2 можно было не проводить.

В силу последнего замечания, объединим исследование точек (1.21) и (1.22).

3. Точки $(-\pi/2, -\omega_0)$ и $(\pi/2, \omega_0)$. Вид характеристического уравнения возле данной точки $\lambda - 1 = 0$ позволяет сделать вывод о том, что исследуемые точки являются седлами.

Изучим структуру разбиения на траектории опорной системы (1.18). Для этого соберем необходимые сведения из теории топографических систем Пуанкаре (ТСП) и систем сравнения [9, 13, 14].

Под ТСП на плоскости будем понимать систему вложенных друг в друга концентрических замкнутых кривых, полученных с помощью поверхностей уровня неотрицательной функции F , которая равна нулю лишь в точке, к которой и сходятся замкнутые кривые. С помощью такой системы можно успешно «ловить» замкнутые траектории исследуемой динамической системы: вычисляя угол между векторами поля, образующими семейство ТСП, и векторами исследуемого поля динамической системы, можно получить информацию о расположении траекторий исследуемого векторного поля. В частности, чтобы доказать отсутствие замкнутых фазовых характеристик, достаточно выполнение нестрогого неравенства [9, 13, 14]

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} X_2 \leq (\geq) 0. \quad (1.25)$$

Здесь $F(x_1, x_2) = \text{const}$ – семейство замкнутых кривых на плоскости, $X = \{X_1, X_2\}$ – исходное векторное поле в стандартных координатах.

С помощью неравенства (1.25) и будем исследовать качественное поведение траекторий исходной (опорной) системы. Для этого нас будут интересовать лишь геометрические свойства взаимного расположения кривых ТСП и фазовых кривых поля исследуемой системы.

С понятием топографической системы Пуанкаре тесно связано понятие характеристической функции двух полей на плоскости. Последняя функция определяет кососимметрическую форму. Если $F(x_1, x_2) = \text{const}$ – семейство замкнутых кривых на плоскости, то система, имеющая явный вид гамильтоновой

$$x'_1 = -\frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad x'_2 = \frac{\partial F}{\partial x_1},$$

задает векторное поле, касательное к семейству кривых ТСП. Тогда последнее неравенство (1.25) эквивалентно

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \leq (\geq) 0, \quad (1.26)$$

в котором $Y_1 = -\frac{\partial F}{\partial x_2}$, $Y_2 = \frac{\partial F}{\partial x_1}$ – векторное поле системы, касающееся кривых ТСП.

Далее, рассмотрим две произвольные системы уравнений на плоскости. Эти уравнения задаются полями $X = \{X_1, X_2\}$ и $Y = \{Y_1, Y_2\}$ в некоторых координатах. Естественно рассмотреть функцию $\chi = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$ от упорядоченной пары векторных полей X и Y , которая отвечает за знак синуса угла поворота от одного поля до другого. Очевидно, $\chi=0$ там и только там, где поля X и Y касаются.

Функция χ удовлетворяет следующим свойствам: $\chi(X, Y) = -\chi(Y, X)$, $\chi(\lambda X, Y) = \lambda \chi(X, Y)$ для любой действительной функции λ .

Определение. Функцию χ назовем характеристической функцией двух векторных полей, а уравнение $\chi(X,Y)=0$ назовем уравнением кривой контактов для полей X и Y .

Подсчитаем теперь характеристическую функцию опорной системы (1.18) и системы, полученной из нее после формального приравнивая H_1 к нулю:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + b \sin \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Последняя система сводится к уравнению

$$\alpha'' - b\alpha' \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Фазовый портрет системы (1.27) изображен на рис.2.

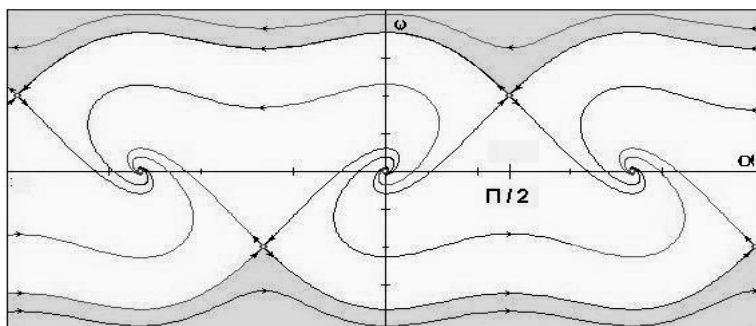


Рис.2.

Зная строение фазового портрета системы (1.27), мы получим информацию о портрете системы (1.18). Действительно, характеристическая функция рассматриваемых систем равна

$$\chi_{((1.27),(1.18))} = -H_1 \omega^2 \cos \alpha \tag{1.28}$$

и является знакоопределенной функцией: в полосе

$$\Pi = \left\{ (\alpha, \omega) \in R^2 : -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right\}$$

при $H_1 \neq 0$ угол между векторными полями соответствующих систем почти везде одного знака (поэтому выполнено неравенство (1.26) одного из знаков), а в полосе

$$\Pi' = \left\{ (\alpha, \omega) \in R^2 : \frac{\pi}{2} < \alpha < 3\frac{\pi}{2} \right\}$$

– ему противоположного (поэтому выполнено неравенство (1.26) другого из знаков).

Действительно, в силу (1.28) векторное поле опорной системы поворачивается в одну и ту же сторону относительно векторного поля системы (1.27) монотонным образом по параметру $H_1 > 0$. Поэтому можно доказать: при $0 < H_1 < b$ фазовый портрет системы

(1.18) имеет тот же тип, что и портрет системы (1.27), поскольку система (1.18) эквивалентна (1.20).

На основании последнего факта можно сделать заключение о строении фазового портрета системы (1.18) для любых b и H_1 .

В данной работе в основном исследуются динамические системы с аналитическими правыми частями, что соответствует функциям Чаплыгина [11, 12] воздействия среды на пластину.

Следствие 1. *При*

$$b = H_1 \tag{1.29}$$

система (1.18) становится консервативной.

Фазовый портрет системы $H_1 > b$ получается из портрета, показанного на рис.2, передвижением оси ординат на π (влево или вправо).

Действительно, после замены $\alpha \mapsto \alpha + \pi$ опорная система приводится к уравнению (1.20), поэтому при $H_1 > b$ начало координат и становится асимптотически устойчивым положением равновесия.

Более того, система (1.18) при условии (1.29) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + b \sin \alpha - b^2 \omega, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - b \omega \cos \alpha. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Проводя замену переменных $u = \omega - b \sin \alpha + b^2 \omega$ в системе (1.30), а именно, «выпрямляя» ее векторное поле вдоль кривой

$$\{(\alpha, \omega) \in R^2 : (1 + b^2)\omega = b \sin \alpha\},$$

получим новую систему, эквивалентную системе (1.30):

$$\alpha' = -u, \quad u' = \sin \alpha \cos \alpha,$$

что и подтверждает следствие 1.

Система (1.18) (впрочем, как и более общая система (1.17)) является так называемой системой с переменной диссипацией с нулевым средним [9], обладающей дополнительными нетривиальными нелинейными свойствами. Так, например, у таких систем:

- имеются два вида симметрий (как указывалось выше): центральная и некоторая зеркальная симметрия ее векторного поля относительно прямых (1.16) (рис.2);
- в области фазового цилиндра, сплошь заполненной вращательными движениями, сохраняется фазовый объем с переменной плотностью (см. также [9]).

Имеются также и другие отличительные свойства, но главное свойство таково: при некоторых условиях существует трансцендентный первый интеграл, выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее свойство особо отмечено по причине того, что при исследовании пространственного движения (см. далее) исследуемые системы высших порядков будут обладать аналогичными особенностями.

Отметим также еще одно свойство таких систем, объясняющее понятие «система с

переменной диссипацией с нулевым средним».

Вычислим дивергенцию (которая и «отвечает» за изменение фазового объема) векторного поля системы (1.17):

$$\operatorname{div} \dots \Big|_{(1.17)} = \frac{\sigma v}{I} \frac{d}{d\alpha} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} - \frac{\sigma}{I} H\Omega \frac{d}{d\alpha} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} - \frac{v}{I} Hs(\alpha).$$

Данная дивергенция в среднем за период по углу атаки равна нулю, поскольку

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{div} \dots \Big|_{(1.17)}(\alpha, \Omega) d\alpha = \Phi_1(\Omega) \equiv 0.$$

1.6. Задача о маятнике, помещенном в поток набегающей среды. Кратко проанализируем задачу о физическом маятнике в потоке набегающей среды, начатую Б.Я. Локшиным, В.А. Приваловым и В.А. Самсоновым [4]. Данная задача позволит обнаружить качественные аналогии.

Используемая модель воздействия потока среды на закрепленный маятник аналогична построенной модели для свободного тела и учитывает влияние вращательной производной момента силы воздействия среды по угловой скорости маятника.

Рассмотрим плоскую пластину AB , симметричную относительно державки OD , жестко закрепленную перпендикулярно ей на цилиндрическом шарнире O , находящуюся в потоке среды (рис.3). В этом случае тело представляет собой физический маятник. Пластина AB и ось шарнира перпендикулярны плоскости движения. Поток среды движется с постоянной скоростью $v \neq 0$. Предположим, что державка сопротивления не создает.

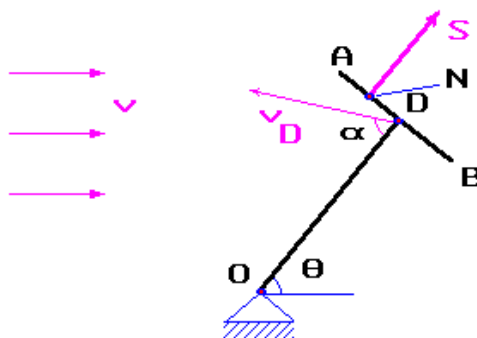


Рис.3.

Суммарная сила S воздействия потока среды на пластину направлена параллельно державке, а точка N приложения этой силы определяется углом атаки α , который измеряется между вектором скорости v_D точки D относительно потока и державкой OD , а также приведенной угловой скоростью $\omega = l\Omega / v_D$ (l – длина державки). Подобные условия возникают при использовании модели струйного обтекания плоских тел.

Таким образом, сила S направлена по нормали к пластине в ту сторону от нее, которая противоположна направлению скорости v_D , и проходит через некоторую точку N пластины, смещенную от точки D вперед по отношению к направлению вектора v_D .

Вектор $e = OD/\sigma$ (σ – расстояние OD) определяет ориентацию державки. Тогда

$$\mathbf{S} = s_1(\alpha) \operatorname{sgn} \cos \alpha \cdot v_D^2 \mathbf{e},$$

где коэффициент сопротивления s_1 зависит лишь от угла атаки.

В силу свойств симметрии пластины относительно точки D , функция $s(\alpha) = s_1(\alpha) \operatorname{sgn} \cos \alpha$ удовлетворяет условию (1.12).

Если I – центральный момент инерции маятника, Ω – значение угловой скорости тела, $R(\alpha, l\Omega/v_D)$ – расстояние от центра пластины до центра давления (точки N), то общее уравнение движения маятника примет вид (θ – угол отклонения, $\theta^\bullet = \Omega$):

$$I\Omega^\bullet = R\left(\alpha, \frac{l\Omega}{v_D}\right) s(\alpha) v_D^2. \quad (1.31)$$

При этом по аналогии с (1.3) для функций воздействия среды (1.9), (1.10) величины $R(\alpha, l\Omega/v_D)$ и $s(\alpha)$ имеют следующий вид:

$$R\left(\alpha, \frac{l\Omega}{v_D}\right) = y_D = A \sin \alpha - h_1^* \frac{\Omega}{v_D}, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha. \quad (1.32)$$

Если добавить кинематические соотношения

$$v_D \cos \alpha = v \cos \theta, \quad v_D \sin \alpha = l\Omega - v \sin \theta,$$

(при этом $v_D^2 \cos \alpha \sin \alpha = -v^2 \cos \theta \sin \theta + lv\Omega \cos \theta$), то основное уравнение (1.31) преобразуется к виду

$$I\Omega^\bullet = AB \sin \alpha \cos \alpha \cdot v_D^2 - h_1 \theta^\bullet v_D \cos \alpha = AB[-v^2 \cos \theta \sin \theta + lv\theta^\bullet \cos \alpha] - h_1 v \cos \theta,$$

$$h_1 = h_1^* B.$$

Итак, уравнение движения маятника в случае функций воздействия среды (1.32) имеет следующий вид:

$$I\theta^{\bullet\bullet} + (h_1 - ABl)v\theta^\bullet \cos \theta + ABv^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (1.33)$$

и эквивалентно уравнению (1.20) (а значит, и системе (1.18)).

Видно, что параметр h_1 играет ключевую роль в решении вопроса об устойчивости решения $\theta \equiv \theta^\bullet \equiv 0$ уравнения (1.33). При достаточно большом демпфировании ($h_1 > ABl$) такое решение становится асимптотически устойчивым по Ляпунову. Критическое значение параметра, после которого достигается данная устойчивость, таково

$$h_{1*} = ABl.$$

Последнее равенство аналогично равенству (1.29) для свободного тела.

2. Пространственное движение осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде

2.1. Постановка и «погружение» задачи в более широкий класс задач. Рассмотрим задачу о пространственном движении однородного осесимметричного твердого тела массы m , часть поверхности которого имеет форму плоского круглого диска, взаимодействующего со средой по законам струйного обтекания [1, 11]. Пусть остальная часть поверхности тела размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края диска, и не испытывает воздействия среды. Похожие условия могут возникнуть после входа однородных круговых цилиндров в воду.

Предположим, что касательные силы к диску отсутствуют. Тогда сила S , приложенная к телу в точке N со стороны среды, не меняет своей ориентации относительно тела (направлена по нормали к диску) и квадратична по скорости его центра D (рис.4). Предполагается также, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления (воздействия) среды.

При выполнении вышеперечисленных условий среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения, подобный случаю плоскопараллельного движения: тело способно совершать поступательное движение в направлении его оси симметрии, т. е. перпендикулярно плоскости диска.

Свяжем с телом правую систему координат $Dxyz$ (рис.4) и направим ось Dx вдоль оси геометрической симметрии тела. Оси Dy и Dz жестко свяжем с круглым диском, образовав правую систему координат. Компоненты вектора угловой скорости Ω в системе $Dxyz$ будем обозначать через $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$.

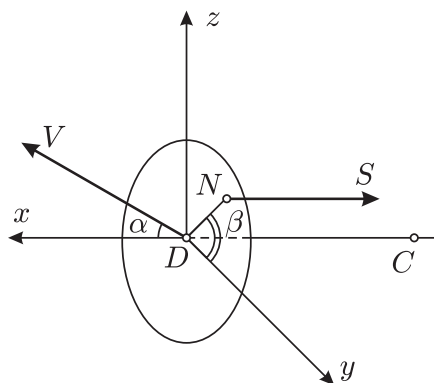


Рис.4.

Тензор инерции динамически симметричного тела во введенных связанных осях $Dxyz$ имеет диагональный вид: $\text{diag}\{I_1, I_2, I_2\}$.

Воспользуемся гипотезой квазистационарности и будем для простоты предполагать, что величина $R = DN$ определяется, по крайней мере, углом атаки α , измеряемым между вектором скорости v центра D диска и прямой Dx . Таким образом, $DN = R(\alpha, \dots)$.

Кроме того, примем величину силы S сопротивления в виде $S = s_1(\alpha)v^2$, $v = |v|$. Для удобства дальнейшего описания (как и в случае плоскопараллельного движения) вместо $s_1(\alpha)$ введем знакопеременную функцию $s(\alpha)$: $s_1 = s_1(\alpha) = s(\alpha) \text{sign} \cos \alpha \geq 0$. Пара функций $R(\alpha, \dots)$ и $s(\alpha)$, таким образом, определяет силомоментные характеристики воздействия среды на диск при данных модельных предположениях.

Рассмотрим сферические координаты (v, α, β_1) конца вектора $v=v_D$ скорости точки D относительно потока, в которых угол β_1 измеряется в плоскости диска. Выражая величины (v, α, β_1) неинтегрируемыми соотношениями через циклические кинематические переменные и скорости, рассмотрим их в качестве квазискоростей, добавив к ним компоненты $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ угловой скорости в осях, связанных с телом [9].

Очевидно, в связанных осях $v_D = \{v \cos \alpha, v \sin \alpha \cos \beta_1, v \sin \alpha \sin \beta_1\}$.

В силу теорем о движении центра масс (в проекциях на связанные оси $Dxyz$) и об изменении кинетического момента относительно этих осей, получаем динамическую часть дифференциальных уравнений движения, рассматриваемую в шестимерном фазовом пространстве квазискоростей ($\sigma=DC$):

$$\begin{aligned} v^{\bullet} \cos \alpha - \alpha^{\bullet} v \sin \alpha + \Omega_y v \sin \alpha \sin \beta_1 - \Omega_z v \sin \alpha \cos \beta_1 + \sigma(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) &= -s(\alpha)v^2 / m, \\ v^{\bullet} \sin \alpha \cos \beta_1 + \alpha^{\bullet} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \beta_1^{\bullet} v \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_z v \cos \alpha - \\ - \Omega_x v \sin \alpha \sin \beta_1 - \sigma \Omega_x \Omega_y - \sigma \Omega_z^{\bullet} &= 0, \\ v^{\bullet} \sin \alpha \sin \beta_1 + \alpha^{\bullet} v \cos \alpha \sin \beta_1 + \beta_1^{\bullet} v \sin \alpha \cos \beta_1 + \Omega_x v \sin \alpha \cos \beta_1 - \\ - \Omega_y v \cos \alpha - \sigma \Omega_x \Omega_z + \sigma \Omega_y^{\bullet} &= 0, \\ I_1 \Omega_x^{\bullet} = 0, \quad I_2 \Omega_y^{\bullet} + (I_1 - I_2) \Omega_x \Omega_z &= -F(\alpha, \dots) \sin \beta_1 \cdot v^2, \\ I_2 \Omega_z^{\bullet} + (I_2 - I_1) \Omega_x \Omega_y &= F(\alpha, \dots) \cos \beta_1 \cdot v^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь введено обозначение: $F(\alpha, \dots) = R(\alpha, \dots)s(\alpha)$.

Выделим такой класс задач о воздействии среды на тело, в котором вдоль оси его геометрической симметрии действует следящая сила (ср. со случаем плоскопараллельного движения), при некоторых условиях обеспечивающая реализацию интересующих нас классов движений. При этом сама следящая сила и является реакцией наложенных связей. В случае отсутствия следящей силы тело совершает пространственное свободное торможение в сопротивляющейся среде (см. также [15, 16]). В данной работе следящая сила во все моменты времени обеспечивает выполнение условия (1.1) ($v \equiv \text{const}$).

В силу (2.1) во все моменты времени имеется циклическое по Раусу инвариантное соотношение

$$\Omega_x = \Omega_{x_0} = \text{const}. \tag{2.2}$$

В дальнейшем будем исследовать случай нулевой закрутки твердого тела вокруг своей продольной оси:

$$\Omega_{x_0} = 0. \tag{2.3}$$

Тогда независимая динамическая часть уравнений движения в четырехмерном фазовом пространстве (при условиях (2.2), (2.3)) будет иметь следующий вид:

$$\alpha \dot{v} \cos \alpha \cos \beta_1 - \beta_1 \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_z v \cos \alpha - \sigma \Omega_z \dot{\alpha} = 0, \quad (2.4)$$

$$\alpha \dot{v} \cos \alpha \sin \beta_1 + \beta_1 \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 - \Omega_y v \cos \alpha + \sigma \Omega_y \dot{\alpha} = 0, \quad (2.5)$$

$$I_2 \Omega_y \dot{\alpha} = -z_N s(\alpha) v^2, \quad I_2 \Omega_z \dot{\alpha} = y_N s(\alpha) v^2. \quad (2.6)$$

Здесь y_N, z_N – декартовы координаты в плоскости диска точки приложения N силы сопротивления.

В систему (2.4)–(2.6) входят функции y_N, z_N, s воздействия среды, для качественного определения которых используем экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания.

Ограничимся в дальнейшем исследованием системы (2.4)–(2.6) для следующих функций воздействия среды:

$$y_N = A \sin \alpha \cos \beta_1 - h \frac{\Omega_z}{v}, \quad z_N = A \sin \alpha \sin \beta_1 + h \frac{\Omega_y}{v}, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A, B, h > 0. \quad (2.7)$$

При этом полученную систему назовем «опорной». В равенствах (2.7) коэффициент h стоит при членах, пропорциональных вращательным производным момента гидроаэродинамических сил (в данном случае силы воздействия среды) по компонентам угловой скорости твердого тела [15, 16].

2.2. Исследование опорной системы. Система (2.4)–(2.6) является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (в данном случае по углу атаки) [9]. Это означает, что интеграл по периоду угла атаки от дивергенции ее правой части, отвечающий за изменение фазового объема (после соответствующего приведения системы), равен нулю.

Проектируя в дальнейшем угловые скорости на подвижные оси, не связанные с телом, так, что

$$z_1 = \Omega_y \cos \beta_1 + \Omega_z \sin \beta_1, \quad z_2 = -\Omega_y \sin \beta_1 + \Omega_z \cos \beta_1, \quad (2.8)$$

и вводя безразмерные переменные $w_k, k=1,2$, параметры и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_0 v w_k, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad b = \sigma n_0, \quad H_1 = \frac{Bh}{I_2 n_0}, \quad \langle \bullet \rangle = n_0 v \langle \bullet \rangle', \quad (2.9)$$

получаем (в силу (2.8), (2.9)) аналитическую динамическую систему четвертого порядка:

$$\alpha' = -(1 + bH_1)w_2 + b \sin \alpha, \quad (2.10)$$

$$w_2' = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_2 \cos \alpha, \quad (2.11)$$

$$w_1' = (1 + bH_1)w_1 w_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_1 \cos \alpha, \quad (2.12)$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (2.13)$$

в которой появляется независимая подсистема третьего порядка (2.10)–(2.12).

При $b = H_1$ дивергенция правой части системы (2.10)–(2.12) ((2.10)–(2.13)) после замены переменных $w_1^* = \ln|w_1|$ тождественно равна нулю (в смысле главного значения), что позволяет считать данную систему (системы) консервативной (консервативными).

Теорема 1. Система (2.10)–(2.13) обладает полным набором первых интегралов, являющихся элементарными трансцендентными функциями своих фазовых переменных. Два из них образуют полный набор первых интегралов системы (2.10)–(2.12).

Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного – когда у функции после ее продолжения в комплексную область имеются существенно особые точки [9].

Действительно, сопоставим системе (2.10)–(2.12) следующую неавтономную систему второго порядка:

$$\frac{dw_2}{d\alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_2 \cos \alpha}{-(1 + bH_1)w_2 + b \sin \alpha}, \quad (2.14)$$

$$\frac{dw_1}{d\alpha} = \frac{(1 + bH_1)w_1 w_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_1 \cos \alpha}{-(1 + bH_1)w_2 + b \sin \alpha}. \quad (2.15)$$

Применяя подстановку $\tau = \sin \alpha$, преобразуем систему (2.14), (2.15) к виду

$$\frac{dw_2}{d\tau} = \frac{\tau - (1 + bH_1)w_1^2 \frac{1}{\tau} - H_1 w_2}{-(1 + bH_1)w_2 + b\tau}, \quad (2.16)$$

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \frac{(1 + bH_1)w_1 w_2 \frac{1}{\tau} - H_1 w_1}{-(1 + bH_1)w_2 + b\tau}. \quad (2.17)$$

Вводя в дальнейшем замену $w_k = u_k \tau$, $k=1,2$, характерную для однородных систем, сопоставим системе (2.16), (2.17) следующее неавтономное дифференциальное уравнение:

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 + (1 + bH_1)(u_2^2 - u_1^2) - (H_1 + b)u_2}{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (H_1 + b)u_1},$$

которое обладает первым интегралом вида

$$\frac{(1 + bH_1)u_2^2 - (H_1 + b)u_2 + (1 + bH_1)u_1^2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const.} \quad (2.18)$$

Другими словами, система (2.10)–(2.12) имеет первый интеграл вида

$$\frac{(1 + bH_1)w_2^2 - (H_1 + b)w_2 \sin \alpha + (1 + bH_1)w_1^2 + \sin^2 \alpha}{w_1 \sin \alpha} = C_1 = \text{const.} \quad (2.19)$$

Как уже отмечалось, при $b = H_1$ динамическая система (2.10)–(2.12) (впрочем, как и (2.10)–(2.13)) является консервативной. Действительно, соотношение (2.19) преобразуется к следующему инвариантному соотношению:

$$\frac{w_2^2 + w_1^2 + [bw_2 - \sin \alpha]^2}{w_1 \sin \alpha} = C_1 = \text{const.} \quad (2.20)$$

Более того, легко проверить, что и числитель, и знаменатель соотношения (2.20) являются первыми интегралами системы (2.10)–(2.12) при $b = H_1$:

$$w_2^2 + w_1^2 + [bw_2 - \sin \alpha]^2 = C_1^* = \text{const}, \quad w_1 \sin \alpha = C_2^* = \text{const}.$$

В случае же $b \neq H_1$, система (2.10)–(2.12) перестает быть консервативной. При этом ни числитель, ни знаменатель инвариантного соотношения (2.19) первыми интегралами не являются. Последний факт аналитически проверять необязательно, поскольку у системы (2.10)–(2.12) имеются притягивающие и отталкивающие предельные множества, запрещающие наличие у исследуемой системы полного набора даже непрерывных первых интегралов [9].

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (2.10)–(2.12). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (2.18) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)} \right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + bH_1)} \right)^2 = \frac{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + bH_1)^2}. \quad (2.21)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (2.22)$$

и фазовое пространство системы (2.10)–(2.12) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (2.18).

Таким образом, в силу соотношения (2.18) можно получить, что

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1+bH_1)u_2^2 - 2(b+H_1)u_2 + 2 - C_1 U_1(C_1, u_2)}{b - (1+bH_1)u_2},$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2(1+bH_1)} \{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\},$$

$$U_2(C_1, u_2) = \sqrt{C_1^2 - 4(1+bH_1)(1 - (b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2)},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (2.22).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (2.10)–(2.12) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{[b - (1+bH_1)u_2] du_2}{2(1 - (b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2) - C_1 \{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\} / (2(1+bH_1))}. \quad (2.23)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной) равна $\ln|\sin \alpha|$. Если

$$u_2 - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)} = r_1, \quad b_1^2 = (b-H_1)^2 + C_1^2 - 4,$$

то правая часть равенства (2.23) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{d[b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2]}{(b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2) \pm C_1 / \sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2}} = \\ & -(b-H_1)(1+bH_1) \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2) \pm C_1 / \sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2}} = \\ & = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{b-H_1}{2} I_1, \end{aligned}$$

$$I_1 = \int \frac{dw_3}{\sqrt{b_1^2 - w_3^2} (w_3 \pm C_1)}, \quad w_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2}. \quad (2.24)$$

При вычислении интеграла (2.24) возможны три случая, что позволяет вычислить через конечную комбинацию элементарных функций дополнительный первый интеграл системы (2.10)–(2.12).

Дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln|\sin \alpha| + \Phi_2 \left(\sin \alpha, \frac{z_2}{\sin \alpha}, \frac{z_1}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const.}$$

В свою очередь, для поиска дополнительного первого интеграла системы (2.10)–(2.13) четвертого порядка будет привлекаться следующее уравнение:

$$\frac{du_1}{d\beta_1} = 2(1 + bH_1)u_2 - (b + H_1).$$

При $u_1 \neq 0$ выполнено соотношение

$$u_2 = \frac{1}{2(1 + bH_1)} \left((b + H_1) \pm \sqrt{b_1^2 - (2(1 + bH_1)u_1 - C_1)^2} \right),$$

тогда интегрирование следующей квадратуры:

$$\beta_1 + \text{const} = \pm \int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - (2(1 + bH_1)u_1 - C_1)^2}}$$

приведет к следующему инвариантному соотношению:

$$\sin \{2(1 + bH_1)(\beta_1 + C_3)\} = \pm \frac{2(1 + bH_1)u_1 - C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}}$$

или при переходе к старым переменным

$$\sin \{2(1 + bH_1)(\beta_1 + C_3)\} = \pm \frac{2(1 + bH_1)w_1 - C_1 \sin \alpha}{\sqrt{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \sin \alpha}}.$$

2.3. Пространственный маятник в потоке набегающей среды. По аналогии со свободным телом при плоскопараллельном движении рассмотрим задачу о движении в однородном потоке набегающей среды пространственного маятника: поток воздействует лишь на круглый диск, жестко закрепленный в своем центре перпендикулярно державке, которая, в свою очередь, другим концом закреплена на сферическом шарнире. Модель воздействия среды на диск остается прежней.

Рассмотрим движение такого маятника в потоке набегающей среды без собственной закрутки (т.е. $\Omega_{x0} = 0$). При этом по-прежнему учитываются эффекты от влияния вращательных производных момента гидроаэродинамических сил по угловой скорости тела в случае функций Чаплыгина (1.9), (1.10) воздействия среды (рис.5).

Первоначальные уравнения движения имели вид (ср. с [9])

$$\Omega_y^\bullet = -\frac{1}{I_2} v_D^2 R \left(\alpha, \frac{l\Omega}{v_D} \right) s(\alpha) \sin \beta_1,$$

$$\Omega_z^\bullet = \frac{1}{I_2} v_D^2 R \left(\alpha, \frac{l\Omega}{v_D} \right) s(\alpha) \cos \beta_1,$$

где функции R и s удовлетворяют условиям (1.32).

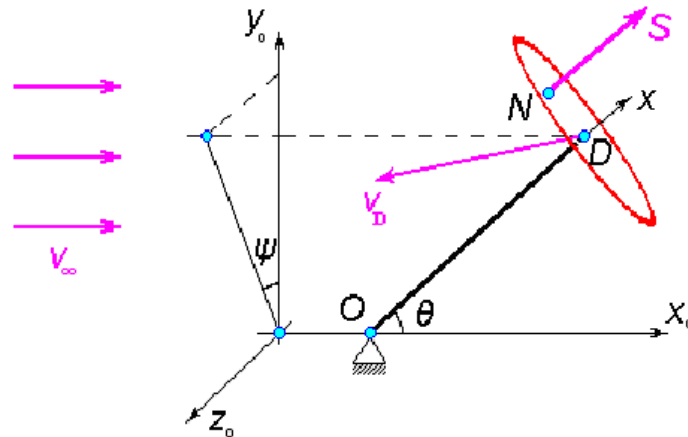


Рис.5.

Пусть (θ, ψ) – углы, определяющие положение пространственного маятника на сфере S^2 . Угол θ будем измерять от оси x_0 до державки, а ψ – от проекции державки на плоскость Oy_0z_0 до оси y_0 (считаем, что в начальный момент времени $\psi=0$). Тогда соотношения, связывающие (v_D, α, β_1) и $(\theta, \psi, \Omega_y, \Omega_z)$, где l – длина державки, таковы:

$$\begin{aligned} v_D \cos \alpha &= -v_\infty \cos \theta, \\ v_D \sin \alpha \cos \beta_1 &= l\Omega_z + v_\infty \sin \theta \cos \psi, \\ v_D \sin \alpha \sin \beta_1 &= -l\Omega_y - v_\infty \sin \theta \sin \psi, \end{aligned}$$

а в силу кинематических соотношений, аналогичных кинематическим формулам Эйлера,

$$\Omega_y = \theta \dot{\psi} \sin \psi + \psi \dot{\theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos \psi, \quad \Omega_z = \theta \dot{\psi} \cos \psi - \psi \dot{\theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \sin \psi.$$

Тогда уравнения движения такой системы на касательном расслоении T^*S^2 двумерной сферы можно представить в следующем виде:

$$\theta \ddot{\theta} + (b - H_1) \dot{\theta} \cos \theta + \sin \theta \cos \theta - \psi \dot{\theta}^2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 0, \quad (2.25)$$

$$\psi \ddot{\psi} + (b - H_1) \dot{\psi} \cos \theta + \theta \dot{\psi} \dot{\theta} \left[\frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \right] = 0. \quad (2.26)$$

Здесь b, H_1 – безразмерные физические постоянные, причем коэффициент H_1 по-прежнему пропорционален вращательным производным момента гидроаэродинамических сил по компонентам угловой скорости пространственного маятника. Длина державки эквивалентна расстоянию σ , постоянная скорость набегающего потока – постоянному параметру v . При этом угол атаки для свободного тела эквивалентен углу θ отклонения маятника от вектора скорости потока, а угол β_1 – циклической переменной – углу ψ .

Если в системе (2.10)–(2.12) «избавиться» от w_1 и w_2 , то в точности получится система (2.25), (2.26), в которой вместо θ, ψ соответственно стоят α, β_1 . Поэтому справедлива

Теорема 2. Система (2.10)–(2.13) эквивалентна системе (2.25), (2.26).

Заметим, что там где $\cos \theta = 0$, систему (2.25), (2.26) можно доопределить по непрерывности, а особенность $\sin \theta = 0$ является чисто кинематической, поскольку на ней вырождаются рассматриваемые сферические координаты (ν, α, β_1) . Фазовый портрет системы (2.25), (2.26) изображен на рис.6.

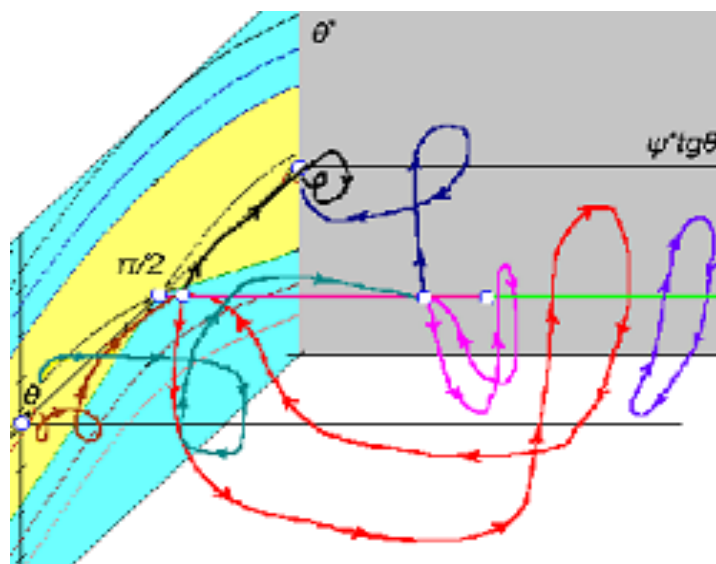


Рис.6.

Заключение

Показано, что при выполнении дополнительных условий при движении тела с конечными углами атаки в принципе возможно достижение устойчивости прямолинейного поступательного торможения.

При изучении плоской и пространственной модели взаимодействия твердого тела со средой найдены новые случаи полной интегрируемости в элементарных функциях, что позволило обнаружить качественные аналогии между движениями тел, свободных в сопротивляющейся среде, и колебаниями тел, частично закрепленных и находящихся в потоке набегающей среды.

Актуален вопрос о грубости описания данного явления. При исследовании приведенных динамических систем обнаруживается более тонкое свойство относительной грубости. А именно, от явного вида момента силы воздействия среды на тело (а он, как отмечалось, неизвестен) зависит глобальное качественное расположение ключевых фазовых траекторий, в том числе различных колебательных режимов.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В.М. Морозову за множество ценных замечаний и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979, 322 с.
2. Ерошин В.А., Привалов В.А., Самсонов В.А. Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Сб. науч.-метод. статей по теоретич. механ. Вып.18. -М.: Наука, 1987, с.75–78.

3. *Ерошин В.А.* Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН, МЖГ, 1992, №5, с.20–30.
4. *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. – М.: Изд-во МГУ, 1986, 86 с.
5. *Самсонов В.А., Шамолин М.В., Ерошин В.А., Макаришин В.М.* Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании. Научный отчет Института механики МГУ № 4396. - М.: 1995, 41 с.
6. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989, №3, с.51–54, 105.
7. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* К задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4141. – М.: 1991, 48 с.
8. *Шамолин М.В.* Движение твердого тела в сопротивляющейся среде // Математическое моделирование, 2011, т.23, №12, с.79–104.
9. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат., 2008, т.14, вып.3, с.3–237.
10. *Бивин Ю.К., Викторов В.В., Степанов Л.П.* Исследование движения твердого тела в глицеринной среде // Изв. АН СССР, МТТ, 1978, №2, с.159–165.
11. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. – М.: Наука, 1976, 495 с.
12. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т.1. - Л.: Изд-во АН СССР, 1933, с.133–135.
13. *Шамолин М.В.* Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений // Вестн. МГУ, Сер.1, Математика, механика, 1993, №2, с.66–70, 113.
14. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.–Л.: ОГИЗ, 1947.
15. *Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В.* Динамика продольного и бокового движения. – М.: Машиностроение, 1969, 349 с.
16. *Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В.* Динамика самолета. Пространственное движение. –М.: Машиностроение, 1988, 320 с.

Поступила в редакцию 29.11.11