УДК 531.01+531.552+517.925

ПОЛНЫЙ СПИСОК ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ ПРИ УЧЕТЕ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

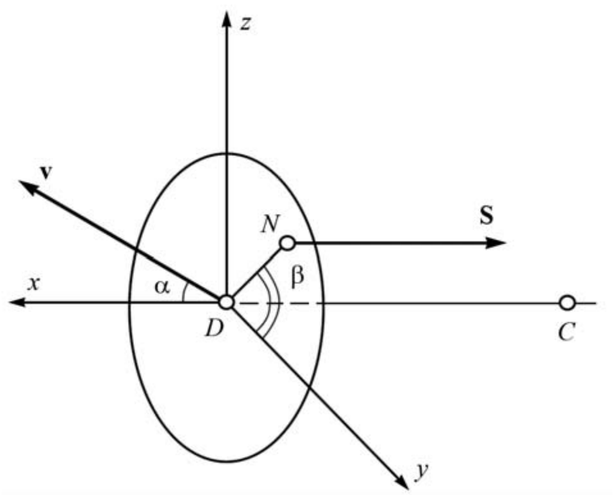
М. В. Шамолин[1]

В работе предъявляется новый случай интегрируемости в задаче о пространственном движении твердого тела при наличии неконсервативного момента сил. При этом, в отличие от некоторых предыдущих работ, при построении неконсервативного силового поля воздействия среды на тело учитывается линейная зависимость данного поля от угловой скорости, хотя само ее введение в компоненты такого поля априори не очевидно.

Ключевые слова: твердое тело, сопротивляющаяся среда, динамические уравнения, фазовое пространство, трансцендентный первый интеграл.

A new case of integrability in the spatial problem of rigid body motion with consideration of the nonconservative moment of forces is discussed. A nonconservative force field of action of the medium on the body is constructed. Contrary to some previous author's works, a linear dependence of this field on the angular velocity is taken into account, although the introducing of this dependence into the components of such a field is not obvious.

Key words: rigid body, resisting medium, dynamic equations, phase space, transcendental first integral.



Пространственное взаимодействие осесимметричного твердого тела со средой в условиях квазистационарности

1. Сила воздействия среды. Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела массой m с передним круглым торцом (диском, кавитатором) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [1–6]. Пусть (v, α, β) — сферические координаты скорости центра D диска; $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$ — компоненты угловой скорости тела; I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции в системе координат, связанной с телом (ось Dx совпадает с осью симметрии, оси Dy, Dz лежат в плоскости диска, рисунок). Воздействие среды на тело моделируется приложенной в точке N диска нормальной к нему силой $\mathbf{S}$, проекция которой со знаком представляется в виде $S = s(\alpha)v^2$, $v = |v_D|$ (ср. с [1–3]).

Одним из ключевых вопросов моделирования воздействия среды на тело является запись координат (y_N, z_N) точки N в системе $Dxyz$ как функций в первую очередь угла атаки α, а также, возможно, других переменных (прежде всего компонент угловой скорости). Что касается введения данной зависимости от угловой скорости, то будем использовать линейную, при этом, чтобы построенный момент имел диссипативный характер, выберем функции y_N, z_N $(x_N \equiv 0)$ в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} = Q - \frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где Q — вектор-функция, не зависящая от угловой скорости, $h = h_x = h_y > 0$ (по причине осевой симметрии тела), $h_z > 0$. При этом следует учесть, что если (v, α, β) — сферические координаты в $\mathbf{R}^3$, то (ср. с [4–6])

[1] *Шамолин Максим Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. НИИ механики МГУ; e-mail: shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ R(\alpha)\cos\beta \\ R(\alpha)\sin\beta \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Для описания воздействия среды на тело используется пара динамических функций $R(\alpha)$, $s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Явный вид даже для кавитаторов простой формы аналитически описать довольно затруднительно. По этой причине и используется прием "погружения" данной задачи в более широкий класс задач, учитывающий лишь качественные свойства функций $R(\alpha)$, $s(\alpha)$ (см. также [1–3]).

Опорным для нас является результат С.А. Чаплыгина, получившего для плоскопараллельного струйного обтекания бесконечной пластины функции $R(\alpha)$, $s(\alpha)$ аналитически [1, 2]:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A > 0; \quad s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad B > 0. \tag{3}$$

2. Наличие следящей силы и динамические уравнения. Будем рассматривать более общую задачу о движении тела, а именно при наличии некоторой дополнительной следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через ось симметрии и обеспечивающей во все время движения постоянство скорости центра масс ($\mathbf{T} = -\mathbf{S}$). Тогда при некоторых условиях в случае функций типа Чаплыгина воздействия среды на тело динамическая часть уравнений движения приводится к системе, в которой имеет место отделение независимой подсистемы более низкого порядка.

Действительно, во-первых, выбор фазовых переменных позволяет рассматривать систему динамических уравнений шестого порядка в качестве независимой. Во-вторых, сохраняется компонента продольной составляющей угловой скорости: $\Omega_x = \Omega_{x0} = \mathrm{const}$. Ограничимся далее движением тела без собственного вращения: $\Omega_{x0} = 0$.

Введем следующие обозначения, безразмерные параметры и дифференцирование:

$$\begin{gathered} z_1 = \Omega_y\cos\beta + \Omega_z\sin\beta, \quad z_2 = -\Omega_y\sin\beta + \Omega_z\cos\beta, \quad n_0^2 = AB/I_2, \quad \sigma = CD, \\ z_i = Z_i v n_0 \ \ (i = 1, 2), \quad \dot\alpha = \alpha' v n_0, \quad \dot\beta = \beta' v n_0, \quad \dot v = v' v n_0, \quad b = \sigma n_0, \quad H_1 = hB/I_2 n_0; \end{gathered} \tag{4}$$

$[b] = [H_1] = [Z_1] = 1$. Тогда динамическая часть уравнений движения благодаря (1)–(4) преобразуется к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{5}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1Z_2\cos^2\alpha, \\ Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)Z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ \qquad + bH_1Z_2^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_2\cos\alpha, \\ Z_1' = bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + (1 + bH_1)Z_1Z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ \qquad + bH_1Z_1Z_2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_1\cos\alpha, \end{cases} \tag{6}$$

$$\beta' = (1 + bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{7}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1Z_2\sin\alpha\cos\alpha.$$

3. Полный список первых интегралов. Поскольку мы рассматриваем такой класс движений тела, когда постоянна величина скорости центра масс C, то система (5)–(7) пятого порядка имеет аналитический первый интеграл следующего вида:

$$v^2\big(1 - 2bZ_2\sin\alpha + b^2(Z_1^2 + Z_2^2)\big) = V_{C0}^2. \tag{8}$$

Видно, что соотношение (8) позволяет рассматривать вопросы интегрируемости в элементарных функциях системы (6), (7) уже четвертого порядка, в которой выделилась система третьего порядка (6).

Применяя часто используемую подстановку $\tau = \sin\alpha$, систему (6) можно привести к следующей системе с алгебраическими правыми частями:

$$\begin{aligned}
\frac{dZ_2}{d\tau} &= \frac{\tau + bZ_2(Z_1^2+Z_2^2) - bZ_2\tau^2 - (1+bH_1)Z_1^2/\tau - H_1Z_2 + bH_1Z_2^2\tau}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2+Z_2^2) + b\tau(1-\tau^2) - bH_1Z_2(1-\tau^2)},\\
\frac{dZ_1}{d\tau} &= \frac{bZ_1(Z_1^2+Z_2^2) - bZ_1\tau^2 + (1+bH_1)Z_1Z_2/\tau - HZ_1 + bH_1Z_1Z_2\tau}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2+Z_2^2) + b\tau(1-\tau^2) - bH_1Z_2(1-\tau^2)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Произведем переход к однородным координатам u_k, $k=1,2$, по формулам $Z_k = u_k\tau$. Тогда система (9) примет вид

$$\begin{cases}
\tau\,\dfrac{du_2}{d\tau} = \dfrac{1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2) - bH_1u_2(1-\tau^2)},\\[2ex]
\tau\,\dfrac{du_1}{d\tau} = \dfrac{2(1+bH_1)u_1u_2 - (b+H_1)u_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2) - bH_1u_2(1-\tau^2)}.
\end{cases} \tag{10}$$

Этой системе можно формально сопоставить уравнение первого порядка (разделив одно уравнение на другое), которое интегрируется в элементарных функциях и позволяет получить явный вид трансцендентного первого интеграла исследуемой системы:

$$\frac{(1+bH_1)u_1^2 + (1+bH_1)u_2^2 - (b+H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{11}$$

или в переменных (Z_1, Z_2, α)

$$\frac{(1+bH_1)Z_1^2 + (1+bH_1)Z_2^2 - (b+H_1)Z_2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{Z_1\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Теперь, пользуясь найденным первым интегралом (12) (или (11)), перепишем первое уравнение системы (10) следующим образом:

$$\tau\,\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 + (1+bH_1)u_2^2 - (b+H_1)u_2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}{-u_2 + b(1-\tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1,u_2)+u_2^2) - bH_1u_2(1-\tau^2)}, \tag{13}$$

$$U_1(C_1,u_2) = \left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1+bH_1)\big(1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2\big)}\right\}/2,$$

или в виде уравнения Бернулли

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b-u_2-bH_1u_2)\tau - b\tau^3\big(1-U_1^2(C_1,u_2) - u_2^2 - H_1u_2\big)}{1+(1+bH_1)u_2^2 - (b+H_1)u_2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)},$$

которое легко приводится при помощи (13) к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2\big((1+bH_1)u_2 - b\big)p + 2b\big(1-U_1^2(C_1,u_2) - u_2^2 - H_1u_2\big)}{1+(1+bH_1)u_2^2 - (b+H_1)u_2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}, \qquad p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{14}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию элементарных иррациональных функций). При этом общее решение уравнения (14) зависит от произвольной постоянной C_2:

$$G_1\left(\frac{Z_1}{\sin\alpha}, \frac{Z_2}{\sin\alpha}, Z_1, Z_2, b, H_1, C_1\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{15}$$

Поиск полного набора первых интегралов системы (6) закончен. Для отыскания последнего дополнительного первого интеграла системы (6), (7) (т.е. интеграла, зависящего и от угла β) заметим, что, поскольку

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{(1+bH_1)Z_1/\tau}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2+Z_2^2) + b\tau(1-\tau^2) - bH_1(1-\tau^2)},$$

равенство
$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{(1+bH_1)u_1}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2+u_2^2) + b\tau(1-\tau^2) - bH_1\tau u_2(1-\tau^2)}$$
и второе уравнение системы (10) позволяют выписать уравнение для получения искомого интеграла
$$\frac{du_1}{d\beta} = 2u_2 - \frac{b+H_1}{1+bH_1},$$
которое легко интегрируется и в координатах (Z_1, Z_2, α) приводится к виду
$$\cos^2[2(\beta + C_3)] = G_2\left(\frac{Z_1}{\sin\alpha}, \frac{Z_2}{\sin\alpha}, Z_1, Z_2, b, H_1, C_1\right). \tag{16}$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Система* (5)–(7) *обладает полным набором инвариантных соотношений: аналитическим соотношением* (8) *и тремя первыми интегралами* (12), (15), (16), *которые являются элементарными трансцендентными функциями своих фазовых переменных.*

Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция после формального продолжения в комплексную область имеет существенно особые точки.

О других похожих случаях полной интегрируемости уравнений пространственного движения твердого тела, взаимодействующего со средой при дополнительном наличии следящей силы, а также об исследовании обобщенных уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил см. [7–9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. М.: Наука, 1976.
2. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. 133–135.
3. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1989. № 3. 51–54.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1997. № 2. 65–68.
5. *Шамолин М.В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. 1999. **364**, № 5. 627–629.
6. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. матем. 2008. **14**, вып. 3. 3–237.
7. *Шамолин М.В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Успехи матем. наук. 2010. **65**, вып. 1. 189–190.
8. *Шамолин М.В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Докл. РАН. 2000. **375**, № 3. 343–346.
9. *Шамолин М.В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$ // Успехи матем. наук. 2005. **60**, вып. 6. 233–234.

Поступила в редакцию
12.10.2011