Современная математика и ее приложения. Том 78 (20012). С. 138–147

УДК 517.987.5

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ В ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

© 20012 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. В данной работе затрагиваются некоторые вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, от решения которых зависит исследование как диссипативных динамических систем, так и систем с переменной диссипацией, рассматриваемых ниже и возникающих, в частности, в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, и в теории колебаний. Рассматриваются такие проблемы, как вопросы существования и единственности траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки для систем на плоскости; элементы качественной теории монотонных векторных полей, а также вопросы существования семейств длиннопериодических и устойчивых по Пуассону траекторий. В заключение исследуются возможности перенесения теории двумерных топографических систем Пуанкаре и систем сравнения на многомерный случай.

СОДЕРЖАНИЕ

1. О траекториях, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки плоскости

В этом параграфе будут рассмотрены вопросы существования и единственности траекторий динамических систем на плоскости, имеющих в качестве α- и ω-предельных множеств бесконечно удаленные точки. Таким образом, на сферах Римана или Пуанкаре предельным множеством данных траекторий будет северный полюс. Такие траектории уже по определению являются ключевыми, поскольку бесконечно удаленная точка всегда является особой.

1.1. Примеры из динамики твердого тела, взаимодействующего со средой. Для начала рассмотрим следующие системы:

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma}{I} F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2 \sin\alpha, \tag{1}$$

$$\omega' = \frac{1}{I} F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha,\omega), \tag{2}$$

где

$$\Psi(\alpha,\omega) = \frac{\sigma}{I} F(\alpha)\sin\alpha - \sigma\omega^2\cos\alpha,$$

и

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma}{I} F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha, \tag{3}$$

$$\omega' = \frac{1}{I} F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha,\omega), \tag{4}$$

где

$$\Psi(\alpha,\omega) = -\sigma\omega^2\cos\alpha + \frac{\sigma}{I}\mathcal{F}(\alpha)\sin\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha.$$

Лемма 1. *Рассмотрим систему* (1), (2) *на множестве*

$$\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\},$$

где

$$\Pi = \left\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Тогда для любой достаточно гладкой функции F существует единственная траектория, уходящая в бесконечность (имеющая в качестве ω-предельного множества точку $(-0, +\infty)$).

Доказательство. Дополним фазовую плоскость $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ бесконечно удаленной точкой. Получим расширенную фазовую плоскость $\overline{\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}}$. Отобразим область $\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\}$ на сферу Римана или Пуанкаре. В окрестности северного полюса сферы существуют новые координаты

$$(\alpha, y),\ y = \frac{1}{\omega},$$

в которые переводятся старые координаты из рассматриваемой области расширенной фазовой плоскости неособым преобразованием.

В переменных (α, y) система (1), (2) эквивалентна уравнению

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{y + \sigma y^2 F(\alpha)\cos\alpha / I + \sigma \sin\alpha}{y^4 F(\alpha)/I - \sigma y \cos\alpha + \sigma y^3 F(\alpha)\sin\alpha / I}.$$

При этом траектории данного уравнения параметризованы иначе, чем траектории системы (1), (2).

Видно, что у уравнения существует особая точка $(0, 0)$, соответствующая бесконечно удаленной точке $(0, +\infty)$ системы (1), (2). Нетрудно убедиться в том, что точка $(0, 0)$ уравнения является гиперболическим седлом, что и доказывает лемму. □

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Рассмотрим систему* (3), (4) *на множестве*

$$\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\}.$$

Тогда для любых достаточно гладких функций F и s существует единственная траектория, уходящая в бесконечность (имеющая в качестве ω-предельного множества точку $(0, +\infty)$).

1.2. Существование и единственность траекторий, уходящих на бесконечность. Рассмотрим произвольную автономную систему дифференциальных уравнений на плоскости. Будем сопоставлять данной системе уравнение, фазовые траектории которого параметризованы по-другому и отображены с расширенной фазовой плоскости системы на сферу Римана (или Пуанкаре). При этом, как уже отмечалось, бесконечно удаленные точки перейдут в северный полюс сферы.

Теорема 1. 1) *Если после замены фазовых переменных*

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, y), \quad y = \frac{1}{x_2},$$

у уравнения, заданного на сфере, появилась особая точка $(x_1^0, 0)$, то у рассматриваемой системы существует траектория, стремящаяся к прямой

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_1^0\}$$

и имеющая в качестве предельного множества бесконечно удаленную точку.

2) *Если после замены фазовых переменных*

$$(x_1, x_2) \mapsto (y, x_2), \quad y = \frac{1}{x_1},$$

у уравнения, заданного на сфере, появилась особая точка $(0, x_2^0)$, то у рассматриваемой системы существует траектория, стремящаяся к прямой

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_2^0\}$$

и имеющая в качестве предельного множества бесконечно удаленную точку.

Замечание 1. Количество траекторий, уходящих на бесконечность, определяется через топологический тип бесконечно удаленной особой точки. В частности, в системах (1), (2) и (3), (4) существует единственная траектория, уходящая на бесконечность, поскольку бесконечно удаленная особая точка является седлом (если, конечно, отображать не плоскость, а фазовый цилиндр).

Замечание 2. Могут существовать фазовые траектории, уходящие на бесконечность на фазовой плоскости, вдоль которых обе фазовые переменные неограниченно возрастают. В этом случае, после замены

$$x_1 = \frac{1}{y_1}, \quad x_2 = \frac{1}{y_2},$$

исследуя топологический тип северного полюса сферы, который всегда является особой точкой, можно попытаться доказать существование и единственность траекторий, приближающихся к прямым вида

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0,$$

где $A_1A_2 \neq 0$.

Действительно, в этом случае к северному полюсу сферы траектория будет стремиться под определенным углом, что соответствует стремлению траектории на плоскости к прямой, имеющей ненулевой и конечный угловой коэффициент наклона.

1.3. Элементы теории монотонных векторных полей. Рассмотрим семейство достаточно гладких векторных полей v_ε в области D двумерной ориентированной римановой поверхности. В касательном пространстве T_qD каждой точки $q \in D$ можно измерять углы между векторами рассматриваемого семейства [1, 10].

Определение 1. Однопараметрическое семейство полей v_ε $(\varepsilon \in \mathcal{E})$ обладает свойством монотонности (СМ) в D, если для любых точек $q \in D, \varepsilon_1 \in \mathcal{E}, \varepsilon_2 \in \mathcal{E}$ в касательном пространстве T_qD угол между векторами v_{ε_1}, $v_{\varepsilon_2} \in T_qD$ является монотонной функцией разности параметров $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$; при этом сохраняется ориентация изменения угла. Если рассматриваемая монотонная зависимость строгая, то говорим, что v_ε обладает строгим СМ.

Теорема 2. *Пусть поле v_ε обладает СМ в области D плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть x_0 — неособое начальное условие для фазовой траектории поля v_ε при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$.*

Тогда если для любого $\varepsilon \in \mathcal{E}$ предельное множество траекторий, начинающихся в x_0, лежит во множестве g_0, лежащем в конечной части плоскости, причем $\{A, B\} = \partial g_0$, A — предельное множество траектории поля v_{ε_1}, а B — предельное множество траектории v_{ε_2}, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ тогда и только тогда, когда существует множество C, являющееся предельным множеством траектории поля v_ε, причем при увеличении ε предельное множество монотонно смещается от A до B. (Здесь идет речь одновременно либо об α-, либо об ω-предельных множествах семейства траекторий.)

При этом искомая фазовая траектория единственна, если СМ строгое.

Схема доказательства. Можно считать, что для любого ε множество g_0 состоит из ω-предельных множеств. Согласно теореме о непрерывной зависимости решений от начальных условий и правых частей уравнений, при малом изменении параметра ε (грубое) предельное множество останется в близкой окрестности первоначального (если множество g_0 односвязно). Если последнее множество многосвязно, то последовательно перебираем каждую из компонент связности. В силу выполнения свойства монотонности и на основе теории систем сравнения, немонотонная зависимость траектории от параметра ε исключается.

Пусть система обладает строгим СМ. От противного, пусть для точки $M \in g_0$ существуют хотя бы два параметра ε^1, ε^2, при которых траектории полей v_{ε^1}, v_{ε^2} стремятся к точке M. Тогда траектории всех полей $v_{\bar{\varepsilon}}$, $\bar{\varepsilon} \in [\varepsilon^1, \varepsilon^2]$, стремятся к точке M (в силу выполнения СМ). Поскольку СМ строгое, для любого $\delta > 0$ система с векторным полем $v_{\varepsilon+\delta}$ $(\varepsilon + \delta \in \mathcal{E})$ является системой сравнения для v_ε. Легко понять, что траектория поля $v_{\varepsilon+\delta}$, выпущенная из неособого начального условия, никогда не пересечет соответствующую траекторию поля v_ε, выпущенную из

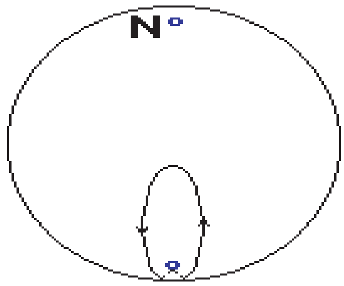

Рис. 1. Гомоклиническая ситуация на сфере.

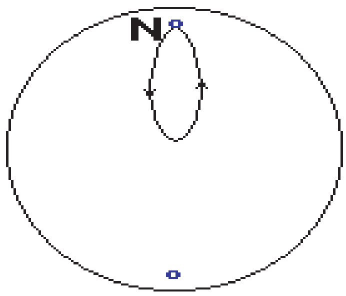

Рис. 2. Гомоклиническая ситуация на сфере.

того же начального условия. В силу последнего, траектории полей v_{κ_1} и v_{κ_2} будут иметь разные предельные множества, причем $\varepsilon^1 < \kappa_1 < \kappa_2 < \varepsilon^2$. Противоречие. Теорема доказана. □

Аналогично может быть доказана качественно другая лемма, которая верна и на любых гладких двумерных ориентированных многообразиях.

Лемма 3. *Рассмотрим семейство полей v_ε ($\varepsilon \in \mathcal{E}$) в области сферы $\mathbb{S}^2$ [29–31] следующего вида. Южный (S) и северный (N) полюсы сферы являются седлами. Пусть данное семейство полей обладает строгим СМ таким образом, что при некотором ε_1 ω-предельным множеством траектории, выходящей из южного полюса, является южный полюс, а при некотором $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ω-предельным множеством траектории, выходящей из северного полюса, является северный полюс. При этом, обе рассмотренные ситуации — это гомоклинические ситуации на сфере, когда существует лишь одна точка покоя (кроме N и S), которая содержится в области, ограниченной указанными сепаратрисами. Других нетривиальных предельных множеств в этой области сферы нет (рис.* 1, 2*).*

Тогда существует единственное значение параметра $\varepsilon = \varepsilon_0 \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ такое, что траектория, выходящая из южного (северного) полюса, входит в северный (южный) полюс (это — гетероклиническая ситуация на сфере, рис. 3*).*

Доказательство. Единственность. От противного. Пусть два параметра $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\bar{\varepsilon}}$ обладают указанным свойством. Тогда, в силу строгого СМ, все параметры из интервала $(\bar{\varepsilon}, \bar{\bar{\varepsilon}})$ обладают указанным свойством. Рассуждая, как в теореме 2, приходим к противоречию со свойством монотонности.

Существование. Таким образом, существует единственное значение параметра $\varepsilon = \varepsilon_0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ реализуется одна гомоклиническая ситуация на сфере, а при $\varepsilon > \varepsilon_0$ — другая. От

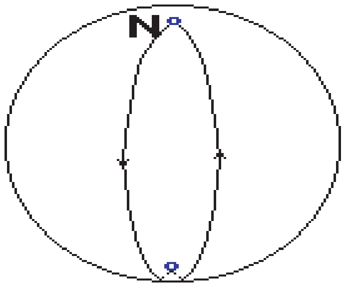

Рис. 3. Гетероклиническая ситуация на сфере.

противного. Пусть при $\varepsilon = \varepsilon_0$ реализуется одна из гомоклинических ситуаций. Тогда существует окрестность значения $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$U = U_{\varepsilon_0}^{\delta} = \{\varepsilon : |\varepsilon - \varepsilon_0| < \delta\}$$

такая, что для любого $\varepsilon \in U$ справедлива одна и та же гомоклиническая ситуация. Противоречие. Лемма полностью доказана. □

Замечание 3. Мы получили еще один метод доказательства лемм 1 и 2. Действительно, искомые поля удовлетворяют условиям леммы 3, поскольку бесконечно удаленная точка проектируется в северный полюс сферы Римана (или Пуанкаре), а точка $(-\pi/2, 0)$ — в южный.

2. Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в фазовых пространствах динамических систем

Часто в системах обыкновенных дифференциальных уравнений существуют бесконечные всюду плотные в некоторых множествах семейства замкнутых траекторий. При этом незамкнутые траектории также оказываются всюду плотными в некоторой области фазового пространства. Здесь наряду с понятием «всюду плотность во множестве» возникает более конкретное понятие «всюду плотности возле себя». Последнее свойство траекторий имеет классическое название *устойчивости по Пуассону* [4, 9, 17].

Напомним, что траектория в фазовом пространстве устойчива по Пуассону, если через конечное время она возвращается в любую достаточно малую окрестность любой своей точки.

Достаточные условия существования устойчивых по Пуассону траекторий формулируются в следующей теореме.

Теорема 3. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \tag{5}$$

зависящую от параметра $\mu \in M \subseteq \mathbb{R}^1$ в области $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}\{x, t\}$. Пусть для некоторых начальных условий $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}$ проекция интегральной траектории $(x_*(t), t)$ с данными начальными условиями и параметром $\mu = \mu_0$ на пространство $\mathbb{R}^n\{x\}$ является незамкнутой кривой и может быть продолжена на всю ось времени.

Тогда если в любой окрестности U_{μ_0} существует значение μ такое, что проекция интегральной траектории $x(t, \mu)$ с произвольными начальными условиями $(x_1, t_1) \in (x_*(t), t)$ на пространство $\mathbb{R}^n\{x\}$ — замкнутая кривая, то кривая $x_*(t)$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежащая пространству $\mathbb{R}^n\{x\}$, всюду плотна возле себя (устойчива по Пуассону).

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку x_1 проекции незамкнутой интегральной кривой $x_*(t)$ и проекцию решения системы (5) с начальным условием $(x_1, t_1) \in (x_*(t), t)$ при $\mu = \mu_0$. Поскольку это решение может быть продолжено на всю ось времени, по теореме о непрерывной зависимости решения от правых частей и параметра для любого $\varepsilon > 0$ существуют достаточно близкое значение μ_1 к значению μ_0, а также положительное число T_1 такие, что при $t_1 \leqslant t \leqslant T_1$ выполнено условие

$$\left|x_*(t) - x^0(t)\right| < \varepsilon.$$

Здесь $x_*(t)$ — решение системы (5) при $\mu = \mu_0$ с начальным условием (x_1, t_1), а $x^0(t)$ — решение системы (5) при $\mu = \mu_1$ с тем же начальным условием. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ в ε-окрестности U_{μ_0} точки $x_1 \in \mathbb{R}^n\{x\}$ существует решение системы (5) при $\mu = \mu_1$ и при некотором $T_1 > 0$. Отсюда вытекает плотность траектории $x_*(t)$, принадлежащей пространству $\mathbb{R}^n\{x\}$, возле себя. При этом пространство $\mathbb{R}^n\{x\}$ является проекцией пространства $\mathbb{R}^{n+1}\{t, x\}$. Теорема 3 доказана. □

Замечание 4. Под замкнутыми кривыми в пространстве $\mathbb{R}^n\{x\}$ следует понимать проекции периодических решений системы (5) как интегральных кривых из пространства $\mathbb{R}^{n+1}\{x, t\}$ в пространство $\mathbb{R}^n\{x\}$ [25–28].

Замечание 5. Если рассмотреть замыкание Z_1 устойчивой по Пуассону траектории $x_*(t)$ как множества в пространстве $\mathbb{R}^n\{x\}$, то в множестве Z_1 рассматриваемое семейство замкнутых траекторий всюду плотно. В свою очередь, если рассмотреть замыкание Z_2 семейства замкнутых траекторий как множества в пространстве $\mathbb{R}^n\{x\}$, то в множестве Z_2 устойчивая по Пуассону траектория $x_*(t)$ также всюду плотна [21–24].

Следствие 1. *Множества Z_1 и Z_2 совпадают. И прямое, и обратное включения следуют из плотности семейства замкнутых кривых и устойчивости по Пуассону.*

3. Пространственные топографические системы Пуанкаре (ТСП) и системы сравнения

3.1. Топографические системы в пространственном случае. Пространственные ТСП можно определить аналогично ТСП на плоскости. При этом (невырожденные) гиперповерхности уровня коразмерности 1 в пространстве $\mathbb{R}^n$ образуют топографическую систему вложенных друг в друга гиперповерхностей, имеющих вершину в особой точке [7].

Теорема 4. *Пусть в односвязной области D пространства $\mathbb{R}^n$, содержащей единственную точку покоя x_0 достаточно гладкого векторного поля v_1, существует гиперповерхность $\Gamma \ni x_0$, продолжающаяся до границы ∂D и пересекающая ее по поверхности g (поверхность g может быть бесконечно удалена), такая, что существует ТСП с центром в x_0, задаваемая гладкой функцией v, продолжающаяся вдоль Γ до g, заполняющая область $\mathsf{K} \subseteq D$ и обладающая свойством*

$$(v_1, v_2)|_{\mathbb{R}^n} > 0$$

($v_2 = \operatorname{grad} V$) *почти всюду в K, за исключением, быть может, некоторых гиперповерхностей, не содержащих внутри себя x_0.* (*Здесь $v = \mathrm{const}$ — семейство гиперповерхностей ТСП.*)

Тогда во всей области D не существует ни одной замкнутой кривой, состоящей из траекторий поля v_1 и пересекающей гиперповерхность Γ.

Доказательство. От противного. Пусть такая кривая g_0 существует, $\{N_1, N_2\} = \Gamma \cap g_0 \neq \varnothing$ и точка N_1 — неособое начальное условие при движении по кривой g_0. Через точку N_1 проходит замкнутая гиперповерхность $\bar{\Gamma}$ из ТСП, причем $\bar{\Gamma} \subset \mathsf{K}$. Если гиперповерхность Γ ограничивает область $\bar{S}$, то существует $\varepsilon > 0$ (которое уменьшим, если нужно) такое, что:

1) $N_\varepsilon \in \bar{\Gamma}_\varepsilon \cap \Gamma$, где $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ — гиперповерхность ТСП;
2) расстояние между точками N_ε и N_1 равно ε;
3) $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ ограничивает область $\bar{S}_\varepsilon \supset \bar{S}$.

Выбранное значение ε таково, что через конечное время точка, двигаясь по траектории g_0 с начальным условием N_1, покинет область $\bar{S}_\varepsilon$. Поскольку $\bar{S}_\varepsilon \subset \mathsf{K}$ и выполнено неравенство теоремы почти всюду в K за исключением, быть может, некоторых гиперповерхностей, не содержащих внутри себя x_0, то точка с начальным условием N_1 никогда больше в область $\bar{S}_\varepsilon \subset \mathsf{K} \subset D$ не вернется. Так как $\bar{S} \subset \bar{S}_\varepsilon$, то приходим к противоречию с замкнутостью кривой g_0. □

Напомним, что пространственные ТСП особенно удачно помогают решить в ряде случаев проблему различения центра и фокуса. В последнем случае вовсе не обязательно иметь ТСП с центром в данной особой точке. Система сравнения может иметь либо притягивающую, либо отталкивающую особую точку [2, 3, 12–16].

Пусть в области D, содержащей единственную особую точку системы (А), заданной для простоты на плоскости, стоит проблема различения центра и фокуса. Пусть в этой же области система (Б) имеет ту же единственную особую точку x_0.

Характеристическая функция в пространственном случае строится следующим образом. Пусть v_1, v_2 — два гладких векторных поля в пространстве $\mathbb{R}^n$. По полю v_1 строится (неоднозначно) нормальное гладкое векторное поле n. В каждом конкретном случае поле n строится из тех соображений, которые позволяют получить в дальнейшем знакоопределенную характеристическую функцию. Последняя определяется как скалярное произведение

$$\chi = (n, v_2).$$

Пример 1. Рассмотрим системы вида

$$\alpha' = -\Omega + b\sin\alpha, \quad b > 0, \tag{6}$$

$$\Omega' = \sin\alpha\cos\alpha, \tag{7}$$

$$x' = \sin(\alpha + \varphi), \tag{8}$$

$$y' = \cos(\alpha + \varphi), \tag{9}$$

$$\varphi' = \Omega, \tag{10}$$

возникающие в плоской динамике твердого тела, взаимодействующего со средой [5, 6, 8, 11, 18–20]. Система (6)–(10) удовлетворяет всем условиям теоремы 3. Тогда проекция фазовых траекторий на плоскость $\mathbb{R}^2\{x, y\}$ почти всегда заполняет всюду плотно кольцеобразные области (рис. 4, 5).

3.2. Четномерный случай. В четномерном случае характеристическая функция имеет наиболее естественный вид.

Пример 2. Рассмотрим систему слабо перевязанных маятников, т.е. консервативную систему с малыми (неконсервативными) добавками, задаваемую полем

$$\{X_1, X^1, \ldots, X_n, X^n\}$$

в координатах

$$x = \{x_1, x^1, \ldots, x_n, x^n\}$$

следующего вида:

$$X_i = -x^i + \varepsilon F_i(x), \quad X^i = G_i(x) + \varepsilon F^i(x), \quad dG(0) \geqslant 0.$$

Тогда естественно выбрать характеристическую функцию в виде

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} (X_i Y^i - X^i Y_i),$$

где векторное поле Y системы сравнения имеет следующий вид:

$$Y = \{Y_1, Y^1, \ldots, Y_n, Y^n\},$$

где $Y_i = -x^i, Y^i = G_i(x)$.

В пространственном случае также можно привести соответствующие утверждения, подобно двумерным ТСП и системам сравнения.

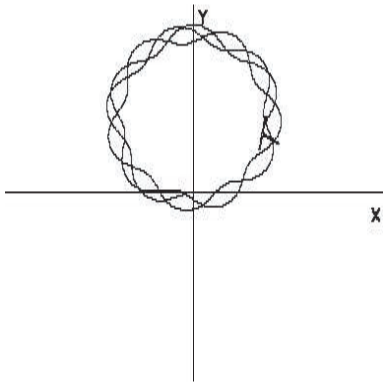

Рис. 4. Всюду плотная траектория на «малых» временах.

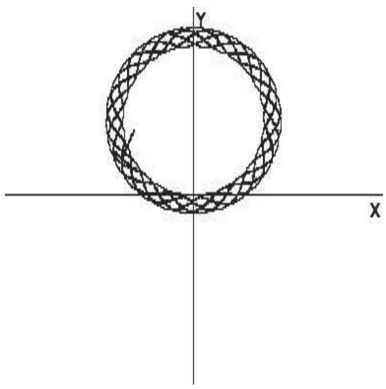

Рис. 5. Всюду плотная траектория на «больших» временах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агафонов С. А., Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Некоторые актуальные задачи геометрии и механики// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23*. — 34 с.
2. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* О кинематике твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Фунд. и прикл. мат. — 2001. — *7*, № 1. — 315 с.
3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Валерий Владимирович Трофимов// Современная математика. Фундаментальные направления. — *23*. — 2007. — С. 5–6.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* О кинематике твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — *23*. — 2007. — С. 24–25.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — *23*. — 2007. — 30 с.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в n-мерном пространстве// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — *23*, — 2007. — 31 с.

10. *Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрия и механика: задачи, подходы, методы// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Фунд. и прикл. мат. — 2001. — *7*, № 1. — 301 с.
11. *Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрия и механика: задачи, подходы, и методы// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23*. — 16 с.
12. *Шамолин М. В.* Задача о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде и один случай интегрируемости// Book of Abs. Third Int. Conf. «Differential Equations and Applications», Saint-Petersburg, Russia, June 12–17, 2000. — Изд–во СПбГТУ, 2000. — 198 с.
13. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и дин. системам (Суздаль, 21–26.08.2000). — Владимир: Влад. гос. унив., 2000. — С. 196–197.
14. *Шамолин М. В.* Сопоставление некоторых интегрируемых случаев из двумерной, трехмерной и четырехмерной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. V Крымской Межд. Мат. школы «Метод функции Ляпунова и его приложения» (МФЛ–2000) (Крым, Алушта, 05–13.09.2000). — Симферополь, 2000. — 169 с.
15. *Шамолин М. В.* Об одном случае интегрируемости по Якоби в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Межд. конф. по дифферен. и интегр. уравнениям (Одесса, 12–14.09.2000). — Одесса: Изд–во "АстроПринт", 2000. — С. 294–295.
16. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
17. *Шамолин М. В.* Интегрируемость задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Фунд. и прикл. мат. — 2001. — *7*, № 1. — 309 с.
18. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. (22–25.5.2001): Thes. of Conf. Rep. — Kyiv, 2001. — 344 с.
19. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Анн. докл. VIII Всеросс. съезда по теорет. и прикл. механ. (Пермь, 23–29.08.2001). — Екатеринбург: УрО РАН, 2001. — С. 599–600.
20. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и дин. системам (Суздаль, 01–06.07.2002). — Владимир: Влад. гос. унив., 2002. — С. 142–144.
21. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае в динамике на $\mathrm{so}(4) \times \mathbb{R}^n$// Тез. докл. Всеросс. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения» (СамДиф–2005), Самара, 27 июня–2 июля 2005 г. Самара: Изд-во «Универс-групп», 2005. — С. 97–98.
22. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbb{R}^n$// Успехи мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
23. *Шамолин М. В.* О случае полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела// Тез. докл. межд. конф. по дифф. уравн. и дин. сист. Владимир, 10–15.07.2006. — Владимир: Влад. гос. ун–т, 2006. — С. 226–228.
24. *Шамолин М. В.* Интегрируемость задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23*. — 21 с.
25. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23*. — 27 с.
26. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости движения четырехмерного твердого тела — маятника, находящегося в потоке набегающей среды// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23*. — 37 с.
27. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил// «Нелинейный динамический анализ–2007»: Тез. докл. междун. конгр., Санкт-Петербург, 4–8 июня 2007 г. — СПб.: СПб. гос. ун-т, 2007. — 178 с.
28. *Шамолин М. В.* Случаи полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Тез. докл. Междун. конф. «Анализ и особенности», посвящ. 70-летию В. И. Арнольда, 20–24 авг. 2007 г., Москва. — М.: МИАН, 2007. — С. 110–112.

29. *Shamolin M. V.* Methods of Analysis of Dynamics of a 2D- 3D- or 4D-rigid Body With a Medium, In: Abst. Short Commun. Post. Sess. Of ICM'2002, Beijing, 2002, August 20–28. — China, Beijing: Higher Education Press. — 268 с.
30. *Shamolin M. V.* 4D rigid body and some cases of integrability, In: Abstracts of ICIAM07, Zurich, Switzerland, June 16–20, 2007. — Zurich: ETH, 2007. — 311 с.
31. *Shamolin M. V.* The cases of integrability in 2D-, 3D- and 4D-rigid body, In: Abstr. of Short Commun. and Post. of Int. Conf. «Dynamical Methods and Mathematical Modelling», Valladolid, Spane (Sept. 18–22, 2007). — Valladolid: ETSII, 2007. — 31 с.

М. В. Шамолин
Московский Государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Институт механики, Москва, Россия
E-mail: shamolin@imec.msu.ru