Современная математика и ее приложения. Том 78 (2012). С. 126–134

УДК 517.957.6

КВАЗИСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА СО ЗНАЧЕНИЯМИ НА ФРОНТЕ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ЕГО ГЕОМЕТРИИ[1]

© 2012 г. **Н. Ю. СЕЛИВАНОВА, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Приводимая ниже задача является сингулярно предельной задачей расширения модели Кана—Хилларда посредством введения несимметрии тензора поверхностного натяжения при одном из усечений (аппроксимаций) внутренней энергии [2, 3, 6, 7, 10–13].

СОДЕРЖАНИЕ

1. Разложение удельной энергии в трехмерном случае

Для начала приведём уже известную постановку задачи в трёхмерном случае.

В соответствии с работами [5, 8, 9], будем считать, что двухкомпонентная среда заполняет область $\Omega \in \mathbb{R}^3$, разделенную на три части: области, заполненные разными фазами (α и β) и межфазной зоной (так называемой зоной фазового перехода). Предполагается, что фаза α имеет кубическую симметрию, а фаза β — четырехугольную. Требуется определить распределение концентраций чистых веществ $c_\beta(x,t)$, $c_\alpha(x,t)$ в области Ω. В силу предположения о сохранении масс в двухкомпонентной смеси выполнено равенство

$$c_\alpha(x,t) + c_\beta(x,t) = 1.$$

Тогда достаточно определить распределение только одной концентрации, например, $c(x,t) = c_\alpha(x,t)$. При этом будем считать, что эволюция распределения концентрации $c(x,t)$ описывается уравнением диффузии (см. [1, 5, 8, 9])

$$\frac{\partial}{\partial t}c + \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{J}_i = 0. \tag{1.1}$$

Функция $\mathbf{J}_i$ может выбираться в двух видах (два случая разложения удельной энергии):

$$\mathbf{J}_i^{(1)} = -M(c)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\partial_c\Psi(c) - \varepsilon^2\partial_c A_{jl}(c)\partial_{x_j}\partial_{x_l}c - \varepsilon^2\partial_c A_{jl}(c;\varepsilon_{rs})\partial_{x_j}c\partial_{x_l}c\Big], \tag{1.2}$$

$$\mathbf{J}_i^{(2)} = -M(c)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\partial_c\Psi(c) - \varepsilon^2\partial_c A_{jl}(c)\partial_{x_j}\partial_{x_l}c\Big]. \tag{1.3}$$

Параметр $\varepsilon > 0$ — малый, $\varepsilon \ll 1$. Функция M является скалярным коэффициентом мобильности, который характеризует подвижность фаз α и β:

$$M(c) = M^\alpha + (M^\beta - M^\alpha)\frac{c(x,t) - c^\alpha}{c^\beta - c^\alpha}, \quad M^\alpha, \quad M^\beta > 0,$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-00231А.

а c^α и c^β являются концентрациями α и β фаз в равновесном состоянии соответственно. Тензор поверхностных напряжений

$$a_{kl}(c) = a_{kl}^\alpha + (a_{kl}^\beta - a_{kl}^\alpha)\frac{c(x,t) - c^\alpha}{c^\beta - c^\alpha}, \tag{1.4}$$

где $a_{kl}^\alpha, a_{kl}^\beta > 0$ — постоянные такие, что выполняется условие эллиптичности

$$a_{kl}(c)\xi_k\xi_l > d_0 > 0 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^3, \quad |\xi| = 1, \quad c \in [0,1].$$

Предположим, что (см. [5, 8, 9])

$$a_{ij}^\alpha = \begin{pmatrix} a^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & a^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & a^\alpha \end{pmatrix}, \qquad a_{ij}^\beta = \begin{pmatrix} a_1^\beta & 0 & 0 \\ 0 & a_1^\beta & 0 \\ 0 & 0 & a_3^\beta \end{pmatrix},$$

т.е. фазы обладают существенно разными симметриями.

Чтобы можно было гарантировать сосуществование обеих фаз, плотность свободной энергии Гиббса должна быть невыпуклой функцией концентрации, например, (см. [8])

$$\Psi = \psi_0\Big(\Big([c^\alpha - c_0]^2 - [c - c_0]^2\Big)^2 - b[c - c_0]\Big), \qquad c_0 = \frac{1}{2}(c^\alpha + c^\beta),$$

где ψ_0 и b являются постоянными. Тогда постоянные c^α, $c^\beta \in (0,1)$ являются классическими равновесными концентрациями, определяемыми однозначно по схеме Максвелла [8] системой уравнений:

$$\partial_c\Psi(c^\alpha) = \partial_c\Psi(c^\beta),$$
$$\Psi(c^\beta) - \Psi(c^\alpha) = \partial_c\Psi(c^\alpha)(c^\beta - c^\alpha).$$

Рассматриваемая модель описывает процесс кристаллизации, когда первая стадия разделения фаз завершена, и существуют области с двумя разными фазами. Будем считать, что в рассматриваемом случае имеются две связные области $\Omega_{t,\varepsilon}^\pm$. Они разделены зоной фазового перехода, являющейся в любое время окрестностью поверхности $\Gamma_{t,\varepsilon}$ фронта фазового перехода. Такие процессы называются жестко фронтовыми. Здесь можно выделить два случая.

Первый случай. Здесь обычные граничные условия завершают постановку задачи:

$$\partial_N c = 0, \qquad \partial_N\Big[\partial_c\Psi(c) - \varepsilon^2\partial_c A_{jl}(c)\partial_{x_j}\partial_{x_l}c - \varepsilon^2\partial_c A_{jl}(c;\varepsilon_{rs})\partial_{x_j}c\partial_{x_l}c\Big] = 0 \tag{1.5}$$

(соответствуют случаю (1.2)).

Второй случай. Во втором случае имеем:

$$\partial_N c = 0, \qquad \partial_N\Big[\partial_c\Psi(c) - \varepsilon^2\partial_c A_{jl}(c)\partial_{x_j}\partial_{x_l}c\Big] = 0 \quad \text{на множестве } \Sigma_T \tag{1.6}$$

(соответствуют случаю (1.3)). Здесь N — вектор нормали к фиксированной границе $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T)$.

Также задано начальное значение концентрации:

$$c(x,t;\varepsilon)|_{t=0} = c^0(x;\varepsilon). \tag{1.7}$$

Для определенности будем считать, что

$$0 < c^\alpha < c^\beta < 1. \tag{1.8}$$

2. Исследование межфазной зоны в двумерном случае

Для простоты расмотрим двумерный случай $x = (x_1, x_2) = (x, y)$. Пусть $r(\tau, s) = (r_1(\tau,s), r_2(\tau,s))$ — параметризация кривой $\Gamma(\tau)$, s — длина дуги. Тогда в достаточно малой окрестности $\Omega_{i,\varepsilon}$ кривой $\Gamma(\tau)$ можно ввести быстрые (внутрение) координаты (τ, s, z):

$$x(\tau, s, z) = r(\tau, s) + \varepsilon\, z\, \nu(\tau, s),$$

где $\nu(\tau,s) = (-\partial_s r_2(\tau,s), \partial_s r_1(\tau,s))$ — главная нормаль и $t(\tau,s) = (\partial_s r_1(\tau,s), \partial_s r_2(\tau,s))$ — вектор, направленный против часовой стрелки, так что по формулам Френе:

$$dt/ds = \kappa\nu, \quad d\nu/ds = -\kappa\, t,$$

$\kappa(\tau)$ — кривизна кривой $\Gamma(\tau)$. Отсюда,

$$\begin{gathered}\kappa(s,\tau) = \partial_s r_1 \partial_s^2 r_2 - \partial_s r_2 \partial_s^2 r_1, \qquad (\partial_s r_1)^2 + (\partial_s r_2)^2 = 1, \qquad \partial_s r_1 \partial_s^2 r_1 + \partial_s r_2 \partial_s^2 r_2 = 0,\\ \partial_s^2 r_1 = -\kappa\, \partial_s r_2, \qquad \partial_s^2 r_2 = \kappa\, \partial_s r_1.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Тогда

$$\partial_s x = (1 - \varepsilon\, z\, \kappa)t, \qquad \partial_z x = \varepsilon\, \nu, \qquad \det M = \varepsilon(1 - \varepsilon\, z\, \kappa),$$

и для градиента функции $u(\tau,x,y) = \widetilde{u}(\tau,s,\varepsilon\, z)$ получаем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}(\partial_s\widetilde{u}, \partial_z\widetilde{u}, \partial_\tau\widetilde{u})^\top = M\,(\partial_x u, \partial_y u, \partial_\tau\, u)^\top,\\ M = \begin{pmatrix}\partial_s x & \partial_s y & 0\\ \partial_z x & \partial_z y & 0\\ \partial_\tau\, x & \partial_\tau\, y & 1\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}\partial_x u\\ \partial_y u\\ \partial_\tau u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1+\varepsilon\, z\kappa)\partial_s r_1 & -\varepsilon^{-1}\partial_s r_2 & 0\\ (1+\varepsilon\, z\kappa)\partial_s r_2 & -\varepsilon^{-1}\partial_s r_1 & 0\\ -(1+\varepsilon\, z\kappa)V^t & -\varepsilon^{-1}V^\nu & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_s\widetilde{u}\\ \partial_z\widetilde{u}\\ \partial_\tau\widetilde{u}\end{pmatrix} + O(\varepsilon^2).\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь используем, что $1/(1-\varepsilon\, z\kappa) = 1 + \varepsilon\, z\kappa + O(\varepsilon^2)$ и касательная и нормальная скорости равны соответственно

$$V^t = \partial_\tau\, x \cdot t, \quad V^\nu = \partial_\tau\, x \cdot \nu.$$

Можно подсчитать и вторые производные:

$$\begin{gathered}\partial_x^2 u = \varepsilon^{-2}(\partial_s r_2)^2 \partial_z^2\widetilde{u} - \varepsilon^{-1}\Big(\kappa(\partial_s r_1)^2\partial_z\widetilde{u} + 2\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s\partial_z\widetilde{u}\Big) + (\partial_s r_1)^2 -\\ -2\kappa\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s\widetilde{u} - z\kappa\Big(\kappa(\partial_s r_1)^2\partial_z\widetilde{u} + 2\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s\partial_z\widetilde{u},\\ \partial_y^2 u = \varepsilon^{-2}(\partial_s r_1)^2 \partial_z^2\widetilde{u} - \varepsilon^{-1}\Big(\kappa(\partial_s r_2)^2\partial_z\widetilde{u} - 2\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s\partial_z\widetilde{u}\Big) + (\partial_s r_2)^2 +\\ +2\kappa\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s\widetilde{u} - z\kappa\Big(\kappa(\partial_s r_2)^2\partial_z\widetilde{u} - 2\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s\partial_z\widetilde{u},\\ \partial_x\partial_y u = -\varepsilon^{-2}\partial_s r_2\partial_s r_1\partial_z^2\widetilde{u} - \varepsilon^{-1}\Big(\kappa\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_z\widetilde{u} + \Big((\partial_s r_2)^2 - (\partial_s r_1)^2\Big)\partial_s\partial_z\widetilde{u} + \partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s^2\widetilde{u} -\\ -\kappa\Big((\partial_s r_2)^2 - (\partial_s r_1)^2\Big)\partial_s\widetilde{u} - z\kappa\Big(\kappa\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_z\widetilde{u} + \Big((\partial_s r_2)^2 - (\partial_s r_1)^2\Big)\partial_s\partial_z\widetilde{u}\Big),\\ \Delta\mu = \varepsilon^{-2}\partial_z^2\widetilde{\mu} - \varepsilon^{-1}\kappa\partial_z\widetilde{\mu} + \partial_s^2\widetilde{\mu} - z\kappa^2\partial_z\widetilde{\mu}.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь также справедливо равенство $\mu(\tau,x,y) = \widetilde{\mu}(\tau,s,\varepsilon\, z)$. В этих координатах межфазной зоны градиентную часть свободной энергии будем представлять в виде:

$$\begin{gathered}2A_{kl}(u)\partial_{x_k}\partial_{x_l}u + A_{kl}(u)\partial_{x_k}u\partial_{x_l}u = \varepsilon^{-2}h_{-2}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}) +\\ +\varepsilon^{-1}h_{-1}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}) + h_0(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}), \quad \xi_k, \xi_l \in \{s, z\},\end{gathered}$$

где, также как и выше,

$$u(\tau,x,y) = \widetilde{u}(\tau,s,\varepsilon\, z).$$

При этом

$$\begin{gathered}h_{-2}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}) = 2\nu\, A\,\nu^\top\partial_z^2\widetilde{u} + \nu\, A'\nu^\top\Big(\partial_z\widetilde{u}\Big)^2,\\ h_{-1}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}) = -2\kappa\, t\, A\, t^\top\partial_z\widetilde{u} + 2(t\, A\,\nu^\top + \nu\, A\, t^\top)\partial_s\partial_z\widetilde{u} + 2(t\, A'\,\nu^\top + \nu\, A'\, t^\top)\partial_s\widetilde{u}\partial_z\widetilde{u},\\ h_0(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}) = 2\, t\, A\, t^\top\partial_s^2\widetilde{u} + 2\kappa(t\, A'\,\nu^\top + \nu\, A'\, t^\top)\partial_s\widetilde{u} +\\ +t\, A'\, t^\top\Big(\partial_s\widetilde{u}\Big)^2 + z\kappa\, h_{-1}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}).\end{gathered}$$

Штрихом обозначена производная по u: $A' = dA/du$ и

$$A(\widetilde{u}) = \begin{pmatrix} A_{11}(\widetilde{u}) & A_{12}(\widetilde{u}) \\ A_{21}(\widetilde{u}) & A_{22}(\widetilde{u}) \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что если

$$\widetilde{\mu}(\tau, s, \varepsilon\, z) = F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}) + O(\varepsilon), \quad \xi_k, \xi_l \in \{s, z\},$$

то

$$\begin{gathered}\Delta\mu = \varepsilon^{-2}\partial_z^2\Big(F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big) - \\ -\varepsilon^{-1}\Big(\partial_z^2 h_{-1}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}) - \kappa\partial_z\Big(F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big) - \\ -h_0(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}) - \kappa\,\partial_z h_{-1}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big) + \\ +\partial_s^2\Big(F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big) - z\kappa^2\partial_z\Big(F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big) + O(\varepsilon). \qquad (2.4)\end{gathered}$$

3. Переход к двумерной задаче со свободной границей

В двумерном случае эта задача со свободной границей определяется в зависящих от времени областях

$$\Omega^{\pm}(t) \in \Omega, \qquad \Omega^{+}(t) \cup \Omega^{-}(t) \cup \Gamma(t) = \Omega,$$

$$\partial\Omega^{-} = \Gamma(t), \quad \partial\Omega^{+} = \partial\Omega \cup \Gamma(t), \quad t \in (0, T),$$

следующими уравнениями:

$$\begin{gathered}\Delta\mu^{\pm} = 0, \quad x \in \Omega^{\pm}(t), \quad t \in (0, T), \\ \mu^{+} = \mu^{-} = b_1(t, x), \quad x \in \Gamma(t), \quad t \in (0, T), \\ V_\nu = \frac{\partial_\nu\mu^{+} - \partial_\nu\mu^{-}}{\widetilde{u}_0^{+} - \widetilde{u}_0^{-}}, \quad x \in \Gamma(t), \quad t \in (0, T), \\ \Gamma(t)|_{t=0} = \Gamma_0, \qquad (3.1)\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}b_1(t, x) = \frac{\mathcal{K}}{\widetilde{u}_0^{+} - \widetilde{u}_0^{-}}\Bigg\{2\int_{\widetilde{u}_0^{-}}^{\widetilde{u}_0^{+}} t\,A(v)t^{\top}\sqrt{\frac{\mathcal{F}(v)}{\nu\,A(v)\,\nu^{\top}}}dv - \\ -\frac{1}{2}\int_{\widetilde{u}_0^{-}}^{\widetilde{u}_0^{+}}\Big(t\,A(v)\,\nu^{\top} + \nu\,A(v)\,t^{\top}\Big)^2\sqrt{\frac{\mathcal{F}(v)}{(\nu\,A(v)\nu^{\top})^3}}\,dv\Bigg\}, \qquad (3.2)\end{gathered}$$

$$\mathcal{F}(v) := F(v) - F(\widetilde{u}_0^{-}) - F'(\widetilde{u}_0^{-})(v - \widetilde{u}_0^{-}), \quad x \in \Gamma(t), \quad t \in (0, T).$$

На фиксированной границе ставим условия Неймана

$$n \cdot \nabla\mu^{+} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T).$$

Для простоты выберем $\widetilde{u}_0^{+} = 1$, $\widetilde{u}_0^{-} = -1$ и $F(v) = \dfrac{1}{4}(v^2 - 1)^2$. Тогда $\mathcal{F}(v) = \dfrac{1}{4}(v^2 - 1)^2$. Для $A(v)$ выберем следующее представление

$$A(v) = a^{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{v + 1}{2}\begin{pmatrix} a_1^{\beta} & 0 \\ 0 & a_2^{\beta} \end{pmatrix},$$

где $a_1^\beta \leqslant a^\alpha \leqslant a_2^\beta$. Линеаризация граничных условий на начальном приближении нормального и касательного векторов $\nu = (0,-1)$, $t = (1,0)$ дает следующее:

$$b_1(\tau,x) = \frac{\Delta\varrho}{2}\left\{2\int\limits_{-1}^{1} t\,A(v)\,t^\top\,\frac{1}{\sqrt{\nu\,A(v)\,\nu^\top}}\frac{1}{2}(v^2-1)dv - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\Big(t\,A(v)\,\nu^\top + \nu\,A(v)\,t^\top\Big)^2\sqrt{\frac{\frac{1}{4}(v^2-1)^2}{(\nu\,A(v)\nu^\top)^3}}\,dv\right\}. \tag{3.3}$$

Так как матрица A диагональная, то члены $t\,A(v)\,\nu^\top$ и $\nu\,A(v)\,t^\top$ равны нулю, что приводит к следующему результату (случай первый, ((1.2),(1.5))):

$$b_1(\tau,x) = \sigma\,\Delta\varrho, \tag{3.4}$$

$$\sigma = \int\limits_{-1}^{1} A_{11}\,(A_{22}(v))^{-1/2}\,\frac{1}{2}(v^2-1)dv =$$
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left\{\int\limits_{-1}^{1}\left(a^\alpha + (a_1^\beta - a^\alpha)\frac{v+1}{2}\right)(v^2-1)\left(a^\alpha + (a_2^\alpha - a^\alpha)\frac{v+1}{2}\right)^{-1/2}dv\right\} = \\ &= -\frac{16}{105}\big(-28(a_2^\beta)^{5/2}a^\alpha + 4(a_2^\beta)^{7/2}a^\alpha + 3(a_2^\beta)^{7/2}a_1^\beta + 35a_1^\beta(a_2^\beta)^{3/2}(a^\alpha)^2 - \\ &\quad -14(a_2^\beta)^{5/2}a_1^\beta a^\alpha - 28(a^\alpha)^{5/2}a_1^\beta a_2^\beta + 4a_1^\beta(a^\alpha)^{7/2} - 14(a^\alpha)^{7/2}a_2^\beta + \\ &\quad +35(a^\alpha)^{5/2}(a_2^\beta)^2 + 3(a^\alpha)^{9/2}\big)\frac{1}{(a_2^\alpha - a^\alpha)^4}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Во втором случае ((1.3),(1.6)) линеаризация нормального и касательного векторов вида $\nu_0 = (0,-1)$, $t_0 = (1,0)$, $\nu_1 = (\partial_x\varrho, 0)$, $t_1 = (0, \partial_x\varrho)$ приводит к следующему:

$$b_1(\tau,r) = \sigma\Delta\varrho + \frac{\kappa}{2}\left\{2\int\limits_{-1}^{1}(2t_1\,A(v)\,t_0^\top)(\nu_0\,A(v)\,\nu_0^\top)^{-1/2}\,\frac{1}{2}(v^2-1)dv + \right.$$
$$+2\int\limits_{-1}^{1}(t_0\,A(v)\,t_0^\top)\Big(-\frac{1}{2}(2\nu_1\,A(v)\,\nu_0^\top)\Big)(\nu_0\,A(v)\,\nu_0^\top)^{-3/2}\,\frac{1}{2}(v^2-1)dv -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\Big((t_0\,A(v)\,\nu_0^\top + \nu_0\,A(v)\,t_0^\top)2(t_1\,A(v)\,\nu_0^\top + t_0\,A(v)\,\nu_1^\top)\Big)\sqrt{\frac{\frac{1}{4}(v^2-1)^2}{(\nu_0\,A(v)\,\nu_0^\top)^3}}\,dv -$$
$$\left. -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\Big((t_0\,A(v)\,\nu_0^\top + \nu_0\,A(v)\,t_0^\top)\Big)^2\Big(-\frac{3}{2}\Big)(2\nu_1\,A(v)\,\nu_0^\top)\frac{1}{2}(v^2-1)(\nu_0\,A(v)\nu_0^\top)^{-5/2}\,dv\right\}.$$

Так как в этом случае $\nu_1\,A(v)\,\nu_0^\top = 0$, $t_1\,A(v)\,t_0^\top = 0$ и $t_0\,A(v)\,\nu_0^\top + \nu_0\,A(v)\,t_0^\top = 0$, то получим результат, аналогичный предыдущему. Таким образом, в этом случае получим модельную задачу:

$$\begin{array}{rcllcl} \Delta W^\pm & = & 0, & (x,t) & \in & \mathbb{R}_+^2 \times (0,T), \\ W^+ - \mu^+\varrho = W^- - \mu^-\varrho & = & \sigma\Delta\varrho + g(x_1,t)\,, & (x_1,t) & \in & \mathbb{R}\times(0,T), \\ \partial_t\varrho + \frac{1}{2}(\partial_{x_2}W^+ - \partial_{x_2}W^-) & = & h(x_1,t)\,, & (x_1,t) & \in & \mathbb{R}\times(0,T), \\ \varrho|_{t=0} & = & 0\,, & x_1 & \in & \mathbb{R}\,, \end{array} \tag{3.6}$$

где $x=(x_1,x_2)$, $\mu^{\pm}=\partial_\nu\mu_0^{\pm}(0,\mathcal{P})$, и функции $\mu_0^{\pm}$ определяются начальным приближением задачи (3.1):

$$\begin{array}{rcllcl} \Delta\mu_0^{\pm} &=& 0\,, & (x,t) &\in& \Omega_0^{\pm}(t)\times(0,T)\,,\\ n\cdot\nabla_x\mu_0^{-} &=& 0\,, & (x',t) &\in& \partial\Omega_0(t)\times(0,T)\,,\\ \mu_0^{+}=\mu_0^{-} &=& b_0^{\Gamma}(t,x)\,, & (x',t) &\in& \Gamma_0(t)\times(0,T). \end{array} \tag{3.7}$$

Здесь функция $b_0^{\Gamma}(t,x)$ вычисляется по начальному положению свободной границы Γ_0 и

$$\begin{gathered} \sigma=\frac{16}{105}\big(-28(a_2^\beta)^{5/2}a^\alpha+4(a_2^\beta)^{7/2}a^\alpha+3(a_2^\beta)^{7/2}a_1^\beta+35a_1^\beta(a_2^\beta)^{3/2}(a^\alpha)^2-\\ -14(a_2^\beta)^{5/2}a_1^\beta a^\alpha-28(a^\alpha)^{5/2}a_1^\beta a_2^\beta+4a_1^\beta(a^\alpha)^{7/2}-14(a^\alpha)^{7/2}a_2^\beta+\\ +35(a^\alpha)^{5/2}(a_2^\beta)^2+3(a^\alpha)^{9/2}\big)\frac{1}{(a_2^\alpha-a^\alpha)^4}. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Решая задачу Дирихле, мы сведем модельную задачу к системе уравнений для $\widehat{W}^{\pm}$ на границе:

$$\begin{array}{rcllcl} \widehat{W}^{+}-\mu^{+}\varrho=\widehat{W}^{-}-\mu^{-}\varrho &=& \sigma\Delta\varrho+g(x_1,t)\,, & (x_1,t) &\in& \mathbb{R}\times(0,T),\\ \partial_t\varrho+\sqrt{-\Delta_{x'}}\,(\widehat{W}^{+}+\widehat{W}^{-}) &=& h(x_1,t), & (x_1,t) &\in& \mathbb{R}\times(0,T),\\ \varrho|_{t=0} &=& 0\,, & x_1 &\in& \mathbb{R}. \end{array} \tag{3.9}$$

Теорема 1. *Для любых*

$$g\in L^p((0,T),W_p^{m+2-1/p}(\mathbb{R}^{n-1}))\,,$$
$$h\in L^p((0,T),W_p^{m+1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

при справедливости условий устойчивости $\sigma\geqslant0$, $\mu^{+}+\mu^{-}\geqslant0$, $\mu^{+}+\mu^{-}+\sigma>0$, *существует единственное решение* (u,ϱ) *начально-краевой задачи* (3.6) *такое, что*

$$\begin{gathered} W\in L^p((0,T),W_p^{m+2}(\mathbb{R}_+^n)),\\ \varrho\in L^p((0,T),W_p^{m+4-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})),\\ \partial_t\varrho\in\ L^p((0,T),W_p^{m+1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})). \end{gathered}$$

4. Более общий случай матрицы A

Рассмотрим в заключение более общий случай матрицы A.

Положим

$$A(v)=a^\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{v+1}{2}\begin{pmatrix}a_1^\beta-a^\alpha&\mu\\ \mu&a_2^\beta-a^\alpha\end{pmatrix},$$

выбрав постоянную μ с сохранением условия эллиптичности $(A(v)\xi,\xi)\geqslant c_0|\xi|^2$ и так, что $t_0\,A(v)\,\nu_0^\top+\nu_0\,A(v)\,t_0^\top\neq0$. Если просчитать это условие точно, получим неравенство

$$2\mu\geqslant\sqrt{A_{11}(v)A_{22}(v)}\quad\forall v\in[-1,1].$$

Максимизируя эту функцию по v на $[-1,1]$, окончательно получим $\mu\geqslant\dfrac12\sqrt{(a^\alpha+a_1^\beta)(a^\alpha+a_2^\beta)}$. При таком выборе A мы имеем в первом случае, ((1.2),(1.5)), следующее:

$$b_1=(\sigma+\sigma')\Delta\varrho,$$

$$\sigma'=-\frac14\int\limits_{-1}^{1}(-A_{12}-A_{21})^2\frac{(v^2-1)}{\sqrt{A_{22}^3}}dv=$$

$$=-\frac{\mu^2}{8}\left\{\int\limits_{-1}^{1}(v+1)^2(v^2-1)\left(a^\alpha+(a_2^\beta-a^\alpha)\frac{v+1}{2}\right)^{-3/2}dv\right\}=$$

$$=-\frac{16\mu^2}{35}(35(a_2^\beta)^{1/2}(a^\alpha)^3-7(a_2^\beta)^{5/2}a^\alpha+35(a_2^\beta)^{3/2}(a^\alpha)^2+$$

$$+(a_2^\beta)^{7/2} - 56a_2^\beta(a^\alpha)^{5/2} - 8(a^\alpha)^{7/2})\frac{1}{(a^\alpha - a_2^\beta)^5}, \tag{4.1}$$

тогда как во втором случае ((1.3),(1.6)) получим

$$b_1(\tau, r) = (\sigma + \sigma')\Delta\varrho + \mathcal{H}_{\Gamma_0}\kappa\partial_{x_1}\varrho,$$

$$\mathcal{H}_{\Gamma_0}\kappa\partial_{x_1}\varrho = \frac{\kappa}{2}\Bigg\{2\int\limits_{-1}^{1}(2\partial_{x_1}\varrho\ A_{21})(A_{22})^{-1/2}\,\frac{1}{2}(v^2-1)\,dv +$$

$$+2\int\limits_{-1}^{1}A_{11}\,\frac{1}{2}(v^2-1)\,\Big(-\frac{1}{2}\Big)(-2\partial_{x_1}\varrho A_{12})\,(A_{22})^{-3/2}dv -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}2\Big((-A_{12}-A_{21})(2\partial_{x_1}\varrho(A_{11}-A_{22}))\Big)\,\frac{1}{2}(v^2-1)\,(A_{22})^{-3/2}\,dv -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\Big(A_{12}+A_{21}\Big)^2\frac{3}{2}(2\partial_{x_1}\varrho(A_{12}))\frac{1}{2}(v^2-1)(A_{22})^{-5/2}\ \ dv\Bigg\},$$

где $\mathcal{H}_{\Gamma_0}(\mathcal{P},0)$ — средняя кривизна свободной границы в точке локализации $(\mathcal{P},0)$, и κ задается следующей формулой:

$$\kappa = \mu\Bigg(-\frac{32}{105}(3(a_2^\beta)^{7/2} - 14(a_2^\beta)^{5/2}a^\alpha +$$

$$+35(a^\alpha)^2(a_2^\beta)^{3/2} + 4(a^\alpha)^{7/2} - 28(a^\alpha)^{5/2}a_2^\beta)\times$$

$$\times((a_2^\beta)^4 - 4a^\alpha(a_2^\beta)^3 + 6(a^\alpha)^2(a_2^\beta)^2 - 4a_2^\beta(a^\alpha)^3 + (a^\alpha)^4)^{-1} -$$

$$-\frac{16}{105}(-3(a_2^\beta)^{7/2}a_1^\beta - 4(a_2^\beta)^{7/2}a^\alpha - 105a_1^\beta(a^\alpha)^3(a_2^\beta)^{1/2} +$$

$$+140(a_2^\beta)^{3/2}(a^\alpha)^3 + 21(a_2^\beta)^{5/2}a_1^\beta a^\alpha + 56(a^\alpha)^2(a_2^\beta)^{5/2} -$$

$$-105a_1^\beta(a^\alpha)^2(a_2^\beta)^{3/2} + 24a_1^\beta(a^\alpha)^{7/2} + 4(a^\alpha)^{9/2} + 168a_1^\beta(a^\alpha)^{5/2}a_2^\beta - 140(a^\alpha)^{5/2}(a_2^\beta)^2 - 56a_2^\beta(a^\alpha)^{7/2})\times$$

$$\times(-(a_2^\beta)^5 + 5a^\alpha(a_2^\beta)^4 - 10(a^\alpha)^2(a_2^\beta)^3 + 10(a_2^\beta)^2(a^\alpha)^3 - 5(a^\alpha)^4a_2^\beta + (a^\alpha)^5)^{-1} +$$

$$+\frac{4}{3}(3a_1^\beta(a^\alpha)^2 - 3a_2^\beta(a^\alpha)^2 - 8(a^\alpha)^{3/2}(a_2^\beta)^{1/2}a_1^\beta + 8(a^\alpha)^{3/2}(a_2^\beta)^{3/2} +$$

$$+6a_1^\beta a^\alpha a_2^\beta - 6a^\alpha(a_2^\beta)^2 - (a_2^\beta)^2a_1^\beta + (a_2^\beta)^3)\times$$

$$\times((-(a_2^\beta)^3 + 3a^\alpha(a_2^\beta)^2 - 3a_2^\beta(a^\alpha)^2 + (a^\alpha)^3)/(a_2^\beta)^{1/2})^{-1}\Bigg) +$$

$$+\mu^3\Bigg(\frac{16}{35}(35(a^\alpha)^4 - 192(a^\alpha)^{7/2}(a_2^\beta)^{1/2} + 420a_2^\beta(a^\alpha)^3 - 448(a^\alpha)^{5/2}(a_2^\beta)^{3/2} +$$

$$+210(a^\alpha)^2(a_2^\beta)^2 - 28a^\alpha(a_2^\beta)^3 + 3(a_2^\beta)^4)\times$$

$$\times(((a_2^\beta)^6 - 6a^\alpha(a_2^\beta)^5 + 15(a^\alpha)^2(a_2^\beta)^4 - 20(a_2^\beta)^3(a^\alpha)^3 +$$

$$+15(a^\alpha)^4(a_2^\beta)^2 - 6a_2^\beta(a^\alpha)^5 + (a^\alpha)^6)/(a_2^\beta)^{1/2})^{-1}\Bigg).$$

Таким образом, при таком выборе матрицы A, мы получаем новую модельную задачу

$$\begin{array}{rcllcl}
\Delta u^{\pm} & = & 0\,, & (x,t) & \in & \mathbb{R}^2_+\times(0,T)\,,\\
u^+-\mu^+\varrho-(\sigma+\sigma')\Delta\varrho & = & \kappa\mathcal{H}_{\Gamma_0}\partial_{x_1}\varrho+g(x_1,t)\,, & (x_1,t) & \in & \mathbb{R}\times(0,T),\\
u^--\mu^-\varrho-(\sigma+\sigma')\Delta\varrho & = & \kappa\mathcal{H}_{\Gamma_0}\partial_{x_1}\varrho+g(x_1,t)\,, & (x_1,t) & \in & \mathbb{R}\times(0,T),\\
\partial_t\varrho+\frac{1}{2}(\partial_{x_2}u^+-\partial_{x_2}u^-) & = & h(x_1,t)\,, & (x_1,t) & \in & \mathbb{R}\times(0,T),\\
\varrho|_{t=0} & = & 0\,, & x_1 & \in & \mathbb{R}\,,
\end{array} \tag{4.2}$$

где $\mu^{\pm}$ определяются по аналогии со случаем $(\sigma+\sigma')$.

Получим определитель системы задачи Коши в следующем виде:

$$\mathcal{S}(\lambda,\xi)=\lambda+(\sigma+\sigma')|\xi|^3+(\mu^++\mu^-)|\xi|+i\kappa\mathcal{H}_{\Gamma_0}\xi_1|\xi|.$$

Оценка этого символа приводит к условиям устойчивости:

$$(\sigma+\sigma')>0,\qquad (\mu^++\mu^-)\geqslant 0$$

и условию, порожденному комплексным членом.

Заметим, что первое условие не всегда справедливо. Например, беря $a_1^{\beta}=1<a^{\alpha}=3/2<a_2^{\beta}=14$ и $\mu=5>\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}\times\dfrac{31}{2}}$, мы получим $\sigma+\sigma'\simeq-0,14<0$. Этот эффект естественен с физической точки зрения. Он говорит о том, что кристаллизация бинарных сплавов возможна только для составляющих с близкими кристаллографическими осями.

Теперь перейдем к оценке символа $\mathcal{S}$. Имеем

$$|\mathcal{S}|^2=|\operatorname{Re}\mathcal{S}|^2+|\operatorname{Im}\mathcal{S}|^2\geqslant\ |\operatorname{Re}\lambda|^2+|\xi|^2\Big(\mu^++\mu^--(\sigma+\sigma')|\xi|^2\Big)^2+$$

$$+|\operatorname{Im}\lambda|^2+\kappa^2\mathcal{H}^2_{\Gamma_0}|\xi|^4-2|\operatorname{Im}\lambda|\kappa|\mathcal{H}_{\Gamma_0}||\xi|^2\geqslant$$

$$\geqslant|\operatorname{Re}\lambda|^2+|\xi|^2\Big((\mu^++\mu^-)^2+(\sigma+\sigma')^2|\xi|^4\Big)+(1-\varepsilon_0)|\operatorname{Im}\lambda|^2$$

для любых $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, $\xi,\operatorname{Im}\lambda\in\mathbb{R}^1$ и $1>\varepsilon_0>0$ таких, что квадратичная форма

$$\varepsilon_0\,X^2-2|\kappa|\,|\mathcal{H}_{\Gamma_0}|\,XY+\Big(\kappa^2\mathcal{H}^2_{\Gamma_0}+2(\mu^++\mu^-)(\sigma+\sigma')\Big)Y^2\geqslant 0$$

положительно определена, т.е.

$$\kappa|^2\mathcal{H}_{\Gamma_0}|^2-\varepsilon\Big(\kappa^2\mathcal{H}^2_{\Gamma_0}+2(\mu^++\mu^-)(\sigma+\sigma')\Big)<0.$$

Очевидно, достаточно, чтобы

$$1>\ \kappa^2|\mathcal{H}_{\Gamma_0}|^2/\Big(\kappa^2\mathcal{H}^2_{\Gamma_0}+2(\mu^++\mu^-)(\sigma+\sigma')\Big),$$

что справедливо, если выполнены условия устойчивости задачи Коши

$$(\mu^++\mu^-)(\sigma+\sigma')>0, \tag{4.3}$$

т.е. $\partial_\nu\mu_0^++\partial_\nu\mu_0^->0$ на начальном положении границы Γ_0. Таким образом, в этом случае

$$|\mathcal{S}(\lambda,\xi)|\geqslant\ c_0(|\lambda|+|\xi|+|\xi|^3),\quad \operatorname{Re}\lambda\geqslant 0,\quad \xi\in\mathbb{R}^1,$$

что позволяет применить методы, приведенные выше, и получить следующий результат.

Теорема 2. *Для любых*

$$g\in L^p((0,T),W_p^{m+2-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})),\qquad h\in L^p((0,T),W_p^{m+1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

при справедливости условий устойчивости $(\sigma+\sigma')>0$, $(\mu^++\mu^-)\geqslant 0$, *существует единственное решение* (W,ϱ) *начально-краевой задачи* (4.2) *такое, что*

$$W\in L^p((0,T),W_p^{m+2}(\mathbb{R}^n_+)),$$

$$\varrho\in L^p((0,T),W_p^{m+4-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})),$$

$$\partial_t\varrho\in L^p((0,T),W_p^{m+1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблат Г. И., Ентов В. М., Рижик В. М.* Поведение жидкостей и газов в пористых слоях. — М.: Недра, 1984.
2. *Борисов В. Т.* О механизме нормального роста кристаллов// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*. — С. 1311–1314.
3. *Мажукин В. И., Самарский А. А., Кастельянос О., Шапранов А. В.* Метод динамической адаптации для нестандартных задач с большими градиентами// Мат. модел. — 1993. — *5*. — С. 33–56.
4. *Мейерманов А. М.* Задача Стефана. — Новосибирск: Наука, 1986.
5. *Радкевич Е. В., Захарченко М.* Асимптотическое решение расширенной модели Кана—Хилларда// Соврем. мат. и ее прил. — 2003. — *2*. — С. 121–138.
6. *Солонников В. А., Фролова Е. В.* О справедливости квазистационарного приближения для задачи Стефана// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2007. — *348*. — С. 209–253.
7. *Уманцев А. Р.* Движение плоского фронта при кристаллизации// Кристаллография. — 1985. — *30*. — С. 153–160.
8. *Cahn J. W., Hilliard J. E.* Free energy of a non-uniform system, Part I: Interfacial free energy// J. Chemical Physics. — 1958. — *28*, № 1. — С. 258–267.
9. *Dreyer W. and Muller W. H.* A study of the coarseing in tin/lead solders// Int. J. Solids Structures. — 2000. — *37*. — С. 3841–3871.
10. *Fabbri M., Voller V. R.* The phase-field method in the sharp-interface limit: A comparison between model potentials// J. Comput. Phys. — 1997. — *130*. — С. 256–265.
11. *Fix G.* Phase field models for free boundary problems// In: «Free Boundary Problems: Theory and Application». Eds. Fasano A., Primicerio M. — London: Pittman, 1983. — С. 580–589.
12. *Hohenberg P. C., Halperin B. I.* Theory of Dynamic critical phenomena// Rev. Mod. Phys. — 1977. — *49*. — С. 435–479.
13. *Penrose O., Fife P.* On the relation between the standard phase-field model and a «thermodynamically consistent» phase-field model// Physica D. — 1993. — *69*. — С. 107–113.

Н. Ю. Селиванова
ВИНИТИ РАН, Москва, Россия
E-mail: math@viniti.ru

М. В. Шамолин
Московский Государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Институт механики, Москва, Россия
E-mail: shamolin@imec.msu.ru