Современная математика и ее приложения. Том 78 (2012). С. 119–125

УДК 517.957.6

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КАПИЛЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ[1]

© 2012 г. **Н. Ю. СЕЛИВАНОВА, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе исследуются условия локальной (по времени) разрешимости качественно новой сингулярно предельной задачи — задачи со свободной (неизвестной) границей, появившихся в последнее время. На самом деле, разных задач со свободной границей не так уж много, что отвечает не столь большому разнообразию принципиально разных фазовых переходов первого и второго рода. Поэтому появление принципиально новых задач вызывает естественный интерес к ним. В работе исследуются структурные особенности некоторой задачи на основе одного метода, развитого ранее; а именно метода локализации [1, 2, 8].

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 119
2. Капиллярная задача в разных эквивалентных формулировках 119
3. Поиск начального приближения 121
4. Решение соответствующей задачи Дирихле 122
Список литературы 125

1. Введение

Сложившаяся формализация процесса построения классического решения достаточно универсальна и позволяет свести проблему к исследованию производной Фреше соотвествующей нелинейной задачи (см. [4]). Исследование условий корректности начально-краевой задачи, определяемой производной Фреше, намного упрощается, если предварительно локализовать задачу и свести задачу нахождения условий корректности к задаче определения точных классов разрешимости модельных начально-краевых задач с постоянными коэффициентами.

Нас в дальнейшем будет интересовать, прежде всего, усечение сингулярно предельной задачи системы уравнений Баклея—Леверетта [5], которая пока плохо поддается аналитическим методам исследования.

Чтобы сформулировать основные этапы исследования условий существования классического решения задач со свободной границей, мы начнем с ведущего звена — изложения подхода к исследованию модельной задачи для хорошо известной задачи со свободной границей (*капиллярная задача*).

2. Капиллярная задача в разных эквивалентных формулировках

Капиллярная задача состоит в нахождении семейства поверхностей $\Gamma(t)$ и функции $u(t,\cdot):\Omega(t)\to\mathbb{R}$ таких, что

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \quad x\in\Omega(t), \quad t\in(0,T),\\ u|_{\Gamma(t)} &= \sigma\,\mathcal{K}(\Gamma(t)),\\ V(t) &= \partial_\nu\, u|_{\Gamma(t)},\\ \Gamma(0) &= \Gamma_0,\end{aligned}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-00231А.

где $\mathcal{K}(t)$ — средняя кривизна границы $\Gamma(t)$ и $V(t)$ — нормальная скорость границы (т.е. скорость в направлении нормали), ν — внешняя нормаль, $\sigma > 0$ — поверхностное натяжение, Γ_0 — начальное положение свободной границы.

Чтобы объяснить правило построения модельной задачи, для простоты ограничимся случаем, когда свободная граница $\Gamma(t)$ описывается уравнением

$$y = \varrho_0(x) + \varrho(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \varrho(x,0) \equiv 0,$$

и область $\Omega(t)$ является криволинейной полосой

$$\Omega(t) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, -1 < y < \varrho_0(x) + \varrho(x,t),\, x \in \mathbb{R}^1\},$$

где $\varrho_0(x) \geqslant 0$, $0 < \varepsilon_0 \leqslant \varrho_0 \leqslant 1 - \varepsilon_0$ $\forall x \in \mathbb{R}^1$. Функция $\varrho_0(x)$ описывает начальное положение свободной границы $\Gamma_0 = \{(x,y),\, y = \varrho_0(x)\}$, а величина $\varrho(x,t)$ задает свободную границу как возмущение ее начального положения.

Прежде всего выпрямим границу. Для этого построим *диффеоморфизм* $\mathcal{F}_t(x,z)$ полосы $\Pi_{L_0} = \{x \in \mathbb{R}^1,\, -L_0 < z < 0\}$ в область $\Omega(t)$ вида

$$\mathcal{F}_t(x,z) = \left(x, \frac{1}{L_0} z + (\varrho_0(x) + \varrho(t,x))\chi(z)\right), \tag{1}$$

где $\chi(z) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ — гладкая функция, $0 \leqslant \chi(z) \leqslant 1$,

$$\chi(z) = 1 \quad \text{для} \quad z \geqslant -\frac{1}{4}; \qquad \chi(z) = 0 \quad \text{для} \quad z \leqslant -\frac{3}{4},$$

постоянная $L_0 > 0$ выбирается из условия

$$C_0 = \frac{1}{L_0} - \max_{x \in \mathbb{R}^1} \varrho_0(x) \max_{z \in \mathbb{R}^1} \chi'(z) > 0, \quad L_0 \geqslant 1. \tag{2}$$

Уравнение (1) определяет диффеоморфизм, если

$$|\varrho(x,t)| \leqslant \frac{C_0}{\max\limits_{z \in \mathbb{R}^1} \chi'(z)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^1, \quad -1 \leqslant z \leqslant 0. \tag{3}$$

Используя эти локальные координаты, можно описать нормальный вектор ν к фронту, внешний для области $\Omega(t)$, нормальную скорость V_ν фронта и значения *предельной* концентрации $\widehat{u}$ на фронте:

$$\nu(x,t) = \frac{(\partial_x(\varrho_0(x) + \varrho(t,x)), -1)}{\sqrt{1 + |\partial_x(\varrho_0 + \varrho)|^2}}, \qquad V_\nu(t,x) = -\frac{\partial_t \varrho}{\sqrt{1 + |\partial_x(\varrho_0 + \varrho)|^2}}, \tag{4}$$
$$u|_{y=0} = \sigma \div \nu.$$

Положим $u(t,x,y) = U(t,x,z(t,x,y))$, где функция $U(t,x,z)$ является решением задачи

$$\partial_x^2 U + \Big((\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2\Big)\partial_z^2 U + 2\partial_x z\, \partial_x \partial_z U + \Delta(z)\, \partial_z U = 0, \quad (x,z) \in \Pi_{L_0}, \quad t \in (0,T).$$

Здесь

$$\partial_x z = -\frac{(\partial_x \varrho_0(x) + \partial_x \varrho(t,x))\chi(z)}{\dfrac{1}{L_0} + (\varrho_0(x) + \varrho(t,x))\chi'(z)}, \qquad \partial_y z = \frac{1}{\dfrac{1}{L_0} + (\varrho_0(x) + \varrho(t,x))\chi'(z)}.$$

Также переписываем условия на фронте $\Gamma(t)$, который в новых координатах описывается уравнением $z = 0$:

$$U|_{z=0} = \sigma\, \partial_x \left(\frac{\partial_x(\varrho_0(x) + \varrho(t,x))}{\sqrt{1 + |\partial_x(\varrho_0 + \varrho)|^2}}\right),$$
$$\frac{\partial_t \varrho}{\sqrt{1 + |\partial_x(\varrho_0 + \varrho)|^2}} + \partial_z U|_{z=0} = 0.$$

Итак, в результате выпрямления границы, можно сформулировать *эквивалентную формулировку капиллярной задачи*: требуется найти функцию

$$\varrho \in\ X_{m,p} = \Big\{\varrho\ \in\ L^p((0,T), W_p^{m+4-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})),$$

$$\partial_t\varrho \ \in \ L^p((0,T), W_p^{m+1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1}));$$
$$|\varrho(x,t)| \leqslant \frac{C_0}{\max_{z\in\mathbb{R}^1}\chi'(z)} \quad \forall x\in\mathbb{R}^1, \quad t\in(0,T); \quad \varrho=0 \quad \forall t\leqslant 0\Big\},$$

удовлетворяющую уравнению

$$\mathcal{A}(\varrho) \ \equiv \ \frac{\partial_t\varrho}{\sqrt{1+|\partial_x(\varrho_0+\varrho)|^2}} + \partial_z U_\varrho|_{z=0} = 0, \tag{5}$$

где функция $U_\varrho(x,z,t)$ — решение краевой задачи

$$\begin{gathered}\partial_x^2 U + A(z,\varrho_0,\varrho)\partial_z^2 U + B(z,\varrho_0,\varrho)\partial_x\partial_z U + C(z,\varrho_0,\varrho)\partial_z U = 0,\\ (x,z)\in\Pi_{L_0}, \quad t\in(0,T),\\ U|_{z=0} = \sigma\partial_x\left(\frac{\partial_x(\varrho_0(x)+\varrho(t,x))}{\sqrt{1+|\partial_x(\varrho_0+\varrho)|^2}}\right), \quad \partial_z U|_{z=-1}=0,\end{gathered} \tag{6}$$

$$A(z,\varrho_0,\varrho) = \frac{(\partial_x\varrho_0(x)+\partial_x\varrho(t,x))^2\chi^2(z)+1}{\left(\dfrac{1}{L_0}+(\varrho_0(x)+\varrho(t,x))\chi'(z)\right)^2}, \qquad B(z,\varrho_0,\varrho) = -\frac{2(\partial_x\varrho_0(x)+\partial_x\varrho(t,x))\chi(z)}{\dfrac{1}{L_0}+(\varrho_0(x)+\varrho(t,x))\chi'(z)},$$

$$C(z,\varrho_0,\varrho) = -\frac{(\partial_x^2\varrho_0(x)+\partial_x^2\varrho(t,x))\chi(z)}{\dfrac{1}{L_0}+(\varrho_0(x)+\varrho(t,x))\chi'(z)} + \frac{2(\partial_x\varrho_0(x)+\partial_x\varrho(t,x))^2\,\chi'(z)\chi(z)}{\left(\dfrac{1}{L_0}+(\varrho_0(x)+\varrho(t,x))\chi'(z)\right)^2} -$$
$$-(\varrho_0(t,x)+\varrho(t,x))\chi''(z)\frac{1+(\partial_x\varrho_0(x)+\partial_x\varrho(t,x))^2\chi^2(z)}{\left(\dfrac{1}{L_0}+(\varrho_0(x)+\varrho(t,x))\chi'(z)\right)^3}.$$

3. Поиск начального приближения

В качестве начального приближения $U_0(z,x,t)$, $R_0(x,t)$ возьмем решение следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered}\partial_x^2 U_0 + A(z,\varrho_0,R_0)\partial_z^2 U_0 + B(z,\varrho_0,R_0)\partial_x\partial_z U_0 + C(z,\varrho_0,R_0)\partial_z U_0 = 0,\\ (x,z)\in\Pi_{L_0}, \quad t\in(0,T),\\ U_0|_{z=0} = \sigma\partial_x\left(\frac{\partial_x(\varrho_0(x)+R_0(x,t))}{\sqrt{1+|\partial_x(\varrho_0+R_0(x,t))|^2}}\right),\\ \partial_z U_0|_{z=-1}=0,\end{gathered}$$

на достаточно малом временном интервале $(0,T)$. Дополнительно потребуем выполнения условий согласования

$$\left(\frac{\partial_t R_0}{\sqrt{1+|\partial_x\varrho_0|^2}} + \partial_z U_0|_{z=0}\right)\bigg|_{t=0} = 0, \quad R_0|_{t=0}=0.$$

В качестве R_0 можно, например, взять функцию

$$R_0(x,t) = -t\sqrt{1+|\partial_x\varrho_0(x)|^2}\,\partial_z U_{00}(0,x),$$

где функция $U_{00}(z,x)$ — решение краевой задачи

$$\begin{gathered}\partial_x^2 U_{00} + A(z,\varrho_0,0)\partial_z^2 U_{00} + B(z,\varrho_0,0)\partial_x\partial_z U_{00} + C(z,\varrho_0,0)\partial_z U_{00} = 0,\\ (x,z)\in\Pi_{L_0}, \quad t\in(0,T),\\ U_{00}|_{z=0} = \sigma\partial_x\left(\frac{\partial_x\varrho_0(x)}{\sqrt{1+|\partial_x\varrho_0|^2}}\right), \quad \partial_z U_{00}|_{z=-1}=0.\end{gathered}$$

Теперь стандартно можно написать производную по Фреше $L_{\mathcal{A}}^{\varrho_0,R_0}\varrho$ нелинейного оператора

$$\mathcal{A}_{\varrho_0,R_0}(\varrho) = \mathcal{A}(\varrho_0+R_0+\varrho), \quad \varrho\in X_{m,p},$$

(вариацию задачи (5), (6)) для возмущения $(\delta U(z,x,t),\varrho(x,t))$:

$$L_{\mathcal{A}}\varrho \equiv \frac{\partial_t\varrho}{\sqrt{1+|\partial_x(\varrho_0+R_0)|^2}}+\partial_z\delta U|_{z=0}=h, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\partial_x^2\delta U+A(z,\varrho_0,R_0)\partial_z^2\delta U+B(z,\varrho_0,R_0)\partial_x\partial_z\delta U+C(z,\varrho_0,R_0)\partial_z\delta U+\\ +D_0(z,\varrho_0,R_0,U_0)\partial_x^2\varrho+D_1(z,\varrho_0,R_0,U_0)\partial_x\varrho+D_2(z,\varrho_0,R_0,U_0)\varrho=0,\\ (x,z)\in\Pi_{L_0},\quad t\in(0,T),\\ \delta U|_{z=0}=\sigma\partial_x\left(\frac{\partial_x\varrho(t,x)}{\sqrt{1+|\partial_x\varrho_0|^2}}\right)+g,\quad \partial_z\delta U|_{z=-1}=0,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}D_0(z,\varrho_0,R_0,U_0)&=\partial_{\partial_x^2R_0}(A(z,\varrho_0,R_0))\partial_z^2U_0+\\ &\quad+\partial_{\partial_x^2R_0}(B(z,\varrho_0,R_0))\partial_x\partial_zU_0+\partial_{\partial_x^2R_0}(C(z,\varrho_0,R_0))\partial_zU_0;\\ D_1(z,\varrho_0,R_0,U_0)&=\partial_{\partial_xR_0}(A(z,\varrho_0,R_0))\partial_z^2U_0+\partial_{\partial_xR_0}(B(z,\varrho_0,R_0))\partial_x\partial_zU_0+\\ &\quad+\partial_{\partial_xR_0}(C(z,\varrho_0,R_0))\partial_zU_0;\\ D_2(z,\varrho_0,R_0,U_0)&=\partial_{R_0}(A(z,\varrho_0,R_0))\partial_z^2U_0+\partial_{R_0}(B(z,\varrho_0,R_0))\partial_x\partial_zU_0+\\ &\quad+\partial_{R_0}(C(z,\varrho_0,R_0))\partial_zU_0.\end{aligned}$$

Далее нужно упростить уравнение для функции δU (для этого надо сделать замену функций $W=W(\delta U,\,\varrho)$, делающую уравнение (8) однородным для функции W) и «заморозить» коэффициенты полученной линейной относительно (W,ϱ) задачи в любой точке $\mathcal{P}$ фронта $\Gamma(t)$. Последнее приводит к следующей *модельной задаче для капиллярной задачи* со свободной границей вида:

$$\begin{gathered}\Delta W=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^n_+\times(0,T),\\ W+\sigma\Delta\varrho-\mu\,\varrho=g(x',t),\quad (x',t)\in\mathbb{R}^{n-1}\times(0,T),\\ \partial_t\varrho-\partial_{x_n}W=h(x',t),\quad (x',t)\in\mathbb{R}^{n-1}\times(0,T),\\ \varrho|_{t=0}=0,\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1},\end{gathered} \tag{9}$$

где $\mu=\partial_\nu u_0(\mathcal{P})$, а $u_0(x)$ — начальное приближение концентрации — определяется как решение задачи Дирихле:

$$\begin{gathered}\Delta u_0=0,\quad x\in\Omega_0,\\ u_0|_{\Gamma_0}=\sigma\mathcal{K}(\Gamma_0),\end{gathered}$$

где $\mathcal{K}_0$ — средняя кривизна начального положения свободной границы Γ_0.

Покажем, что условиями корректности задачи (9) являются

$$\mu\geqslant0,\quad \sigma\geqslant0,\quad \mu+\sigma>0.$$

4. Решение соответствующей задачи Дирихле

Для простоты сначала рассмотрим случай $\sigma>0$, $\mu=0$. Предположим, что функции g, h принадлежат следующим классам (см. также [6,7]):

$$\begin{gathered}L^p((0,T),W_p^{m+2-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})),\\ L^p((0,T),W_p^{m+1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})).\end{gathered} \tag{10}$$

Решая задачу Дирихле

$$\begin{gathered}\Delta W=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^n_+\times(0,T),\\ W|_{x_n=0}=\widehat{W}(x',t),\quad (x',t)\in\mathbb{R}^{n-1}\times(0,T),\\ \widehat{W}\in L^p((0,T),W_p^{m+2-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})),\end{gathered} \tag{11}$$

можно выразить нормальную производную $\partial_{x_n} W$, которая равна $-\sqrt{-\Delta_{x'}}\,\widehat{W}$. Это позволяет свести краевую задачу (11) на границу следующим образом:

$$\begin{gathered}\widehat{W}+\sigma\Delta\varrho=g(x',t),\quad (x',t)\in\mathbb{R}^{n-1}\times(0,T)\\ \partial_t\varrho-\sqrt{-\Delta_{x'}}\,\widehat{W}=h(x',t),\quad (x',t)\in\mathbb{R}^{n-1}\times(0,T),\\ \varrho|_{t=0}=0,\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1}.\end{gathered}\tag{12}$$

Применяя преобразование Фурье—Лапласа (Фурье по переменным x' и Лапласа по переменной t) к системе (12), получим

$$\widetilde{\widehat{W}}-\sigma|\xi|^2\widetilde{\varrho}=\widetilde{g}(\xi,s),\tag{13}$$

$$s\widetilde{\varrho}+|\xi|\widetilde{\widehat{W}}=\widetilde{\widetilde{h}}(\xi,s).\tag{14}$$

Чтобы выписать решение системы, вычислим ее детерминант:

$$\det\begin{pmatrix}1 & -\sigma|\xi|^2\\ |\xi| & s\end{pmatrix}=s+\sigma|\xi|^3.$$

Здесь имеем следующую оценку для символа:

$$s+\sigma|\xi|^3\geqslant\ |s|+\sigma|\xi|^3,\quad \operatorname{Re}s\geqslant 0,$$

которая, как мы покажем ниже, определяет выбор класса разрешимости задачи Коши:

$$\begin{aligned}\widehat{W}&\in L^p((0,T),W_p^{m+2-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})),\\ \varrho&\in L^p((0,T),W_p^{m+4-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})),\\ \partial_t\varrho&\in L^p((0,T),W_p^{m+1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})).\end{aligned}$$

Отсюда получаем условие разрешимости (условие устойчивости задачи Коши) в случае $\sigma>0$. В общем случае $\sigma\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$, $\sigma+\mu>0$ из оценки

$$s+\sigma|\xi|^3+\mu|\xi|\geqslant|s|+\sigma|\xi|^3+\mu|\xi|,\quad \operatorname{Re}s\geqslant 0,$$

следует, что, в отличие от параболической капиллярной задачи, последний член (младший по порядку с точки зрения многоугольника Ньютона) не играет роли. Считая условие $\sigma>0$, $\mu=0$ выполненным, можно написать точное решение $\widetilde{\widehat{W}}$, $\widetilde{\varrho}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{\widehat{W}}&=\frac{s\ \tilde g}{s+\sigma|\xi|^3}+\frac{\sigma|\xi|^2\ \tilde h}{s+\sigma|\xi|^3},\\ \tilde\varrho&=-\frac{|\xi|\ \tilde g}{s+\sigma|\xi|^3}+\frac{\tilde h}{s+\sigma|\xi|^3},\end{aligned}\tag{15}$$

так что решение задачи Дирихле (11) получим в виде

$$\tilde W(\xi,s,x_n)=\left(\frac{s\ \tilde g}{s+\sigma|\xi|^3}+\frac{\sigma|\xi|^2\ \tilde h}{s+\sigma|\xi|^3}\right)e^{-|\xi|x_n}$$

или

$$\tilde W(\xi,s,x_n)=\left(\tilde g-\frac{\sigma|\xi|^3\ \tilde g}{s+\sigma|\xi|^3}+\frac{\sigma|\xi|^2\ \tilde h}{s+\sigma|\xi|^3}\right)e^{-|\xi|x_n}.\tag{16}$$

Так как функции $g(x',t)$ и $h(x',t)$ определены на множестве $\mathbb{R}^{n-1}\times(0,T)$, мы можем продолжить их на множество $\mathbb{R}^n_+\times(0,T)$. Обозначим эти продолжения через $G(x',t,x_n)$ и $H(x',t,x_n)$ соответственно. Из (10) следует, что

$$\begin{aligned}G&\in L^p((0,T),W_p^{m+2}(\mathbb{R}^n_+)),\\ H&\in L^p((0,T),W_p^{m+1}(\mathbb{R}^n_+)).\end{aligned}\tag{17}$$

Если продолжить уравнение (16) на множество $\mathbb{R}^n_+ \times (0,T)$, то, следуя приёму, предложенному В. А. Солонниковым, можно переписать решение в виде

$$\widetilde{W}(\xi,s,x_n) =$$
$$= -\int\limits_0^{+\infty} \partial_y\biggl(\biggl(\tilde{G}(\xi,s,y) - \frac{\sigma|\xi|^3\ \tilde{G}(\xi,s,y)}{s+\sigma|\xi|^3} + \frac{\sigma|\xi|^2\ \tilde{H}(\xi,s,y)}{s+\sigma|\xi|^3}\biggr)\, e^{-|\xi|(x_n+y)}\biggr)dy =$$
$$= -\int\limits_0^{+\infty} \biggl(\biggl(\partial_y\tilde{G}\Bigl(1 - \frac{\sigma|\xi|^3}{s+\sigma|\xi|^3}) + \partial_y\tilde{H}\Bigl(\frac{\sigma|\xi|^2}{s+\sigma|\xi|^3}\Bigr)\biggr)\, e^{-|\xi|(x_n+y)}\biggr)dy +$$
$$+\int\limits_0^{+\infty} \biggl(\biggl(\tilde{G}(\xi,s,y)\Bigl(1 - \frac{\sigma|\xi|^3}{s+\sigma|\xi|^3}\Bigr) + \frac{\sigma|\xi|^2\ \tilde{H}(\xi,s,y)}{s+\sigma|\xi|^3}\biggr)\, |\xi| e^{-|\xi|(x_n+y)}\biggr)dy, \tag{18}$$

что позволит получить оценки решения в объемных нормах $L^p((0,T),W^{m+2}_p(\mathbb{R}^n_+))$.

Требуется показать, что $W \in L^p((0,T),W^{m+2}_p(\mathbb{R}^n_+))$. Для этого продолжим функции G, H финитно с сохранением гладкости по t с интервала $(0,T)$ на полуось $(0,\infty)$. Для любого $\gamma > 0$ имеем

$$\|G\|_{L^p((0,T),W^{m+2}_p(\mathbb{R}^n_+))} \ \leqslant\ C_{\gamma,T}\ \|e^{-\gamma t}\ \mathcal{G}\|_{L^p((0,+\infty),W^{m+2}_p(\mathbb{R}^n_+))},$$
$$\|H\|_{L^p((0,T),W^{m+1}_p(\mathbb{R}^n_+))} \ \leqslant\ C_{\gamma,T}\ \|e^{-\gamma t}\ \mathcal{H}\|_{L^p((0,+\infty),W^{m+1}_p(\mathbb{R}^n_+))}.$$

Тогда формула (18) представляет продолжение решения W модельной задачи на множестве $\Omega = \mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty)$, ограничение которого на множество $\Omega_T = \mathbb{R}^n_+ \times (0,T)$, в силу теоремы единственности, не зависит от продолжения функций G, H. Поэтому для продолжения функций G, H, W оставим старые обозначения. Введем весовые нормы:

$$\|W\|_{L^p_\gamma((0,+\infty),W^l_p(\mathbb{R}^n_+))} = \|e^{-t\gamma}\, W\|_{L^p((0,+\infty),W^l_p(\mathbb{R}^n_+))}.$$

Тогда имеем

$$\|W\|_{L^p_\gamma((0,+\infty),W^{m+2}_p(\mathbb{R}^n_+))} \leqslant$$
$$\leqslant C\sum_{j=0}^{m+2}\bigl(\|\mathcal{F}^{-1}\mathcal{L}^{-1}(|\xi|^j\widetilde{W})\|_{L^p_\gamma(\mathbb{R}^n_+\times(0,+\infty))} + \|\partial^j_{x_n}W\|_{L^p_\gamma(\mathbb{R}^n_+\times(0,+\infty))}\bigr). \tag{19}$$

Здесь $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье по x' и $\mathcal{L}$ — преобразование Лапласа по t. Производную по x_n во втором члене в (19), в силу соотношения (16), можно записать в виде

$$\partial^j_{x_n}W = \partial^j_{x_n}(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{F}\mathcal{L}W) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{L}^{-1}(\partial^j_{x_n}\tilde{W}) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{L}^{-1}((-1)^j|\xi|^j\tilde{W}). \tag{20}$$

Поэтому второй член в (19) оценивается так же, как первый (см. также [9,10]).

Теперь сформулируем полученный результат, касающийся разрешимости начально-краевой задачи (11).

Теорема 1. *Для любых*

$$g \in L^p((0,T),W^{m+2-1/p}_p(\mathbb{R}^{n-1}))\,,$$
$$h \in L^p((0,T),W^{m+1-1/p}_p(\mathbb{R}^{n-1}))$$

существует единственное решение (W,ϱ) *начально-краевой задачи* (11) *такое, что*

$$W \in L^p((0,T),W^{m+2}_p(\mathbb{R}^n_+)),$$
$$\varrho \in L^p((0,T),W^{m+4-1/p}_p(\mathbb{R}^{n-1})),$$
$$\partial_t\varrho \in L^p((0,T),W^{m+1-1/p}_p(\mathbb{R}^{n-1})).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипова А.А.* О предельной гладкости решения нестационарной задачи с одним или двумя препятствиями// Пробл. мат. анал. — 1983. — Вып. 9. — С. 149–156.
2. *Булычева М. Г., Петрова С. С.* Из истории метода многоугольника Ньютона// Историко-математические исследования. Вып. XXXI. — М.: Наука, 1989.
3. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: Эдиториал УРСС, 1989.
4. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана// Успехи мат. наук. — 1985. — *40*, № 5(245). — С. 133–185.
5. *Лукхаус С., Плотников П. И.* Энтропийные решения Баклея—Леверетта// Сибирский мат. журнал — 2000. — *41*, № 2. — С. 400–420.
6. *Мейерманов А. М.* Задача Стефана. — Новосибирск: Наука, 1986.
7. *Радкевич Е. В., Меликулов А. К.* Краевые задачи со свободной границей. — Ташкент: ФАН, 1988.
8. *Радкевич Е. В., Захарченко М.* Асимптотическое решение расширенной модели Кана—Хилларда// Соврем. мат. и ее прил. — 2003. — *2*. — С. 121–138.
9. *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. — М.: Наука, 1990.
10. *Athanasopoulous I.* Regularity of the solution of an evolution problem with inequalities on the boundary// Comm. Part. Diff. Eq. — 1982. — *7*. — С. 1453–1465.

Н. Ю. Селиванова
ВИНИТИ РАН, Москва, Россия
E-mail: `math@viniti.ru`

М. В. Шамолин
Московский Государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Институт механики, Москва, Россия
E-mail: `shamolin@imec.msu.ru`