Современная математика и ее приложения. Том 78 (2012). С. 109–118

УДК 517.957.6

# ИССЛЕДОВАНИЕ МЕЖФАЗНОЙ ЗОНЫ В ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ[1]

© 2012 г. **Н. Ю. СЕЛИВАНОВА, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Важнейшую роль в исследовании классической модели Кана—Хилларда [8] сыграла ее сингулярно-предельная задача — так называемая задача Мелина—Сикерка со свободной границей, позволившая на сегодняшний момент только численно описать неустойчивость процесса кристаллизации. Целью данной работы является подготовка материала для вывода сингулярно предельной задачи для существенно несимметричной модели [4, 11].

## СОДЕРЖАНИЕ



## 1. Два случая разложения удельной энергии

В соответствии с работами [4, 8, 11], будем считать, что двухкомпонентная среда заполняет область $\Omega \in \mathbb{R}^3$, разделенную на три части: области, заполненные разными фазами ($\alpha$ и $\beta$) и межфазной зоной (так называемой зоной фазового перехода). Предполагается, что фаза $\alpha$ имеет кубическую симметрию, фаза $\beta$ — четырехугольную. Требуется определить распределение концентраций чистых веществ $c_\beta(x,t)$, $c_\alpha(x,t)$ в области $\Omega$. В силу предположения о сохранении масс в двухкомпонентной смеси выполнено равенство

$$c_\alpha(x,t) + c_\beta(x,t) = 1.$$

Тогда достаточно определить распределение только одной концентрации, например, $c(x,t) = c_\alpha(x,t)$. При этом также будем считать, что эволюция распределения концентрации $c(x,t)$ описывается уравнением диффузии (см. также [1, 4, 8, 11])

$$\frac{\partial}{\partial t}c + \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{J}_i = 0. \tag{1.1}$$

При этом функция $\mathbf{J}_i$ может выбираться в двух видах (два случая разложения удельной энергии):

$$\mathbf{J}_i^{(1)} = -M(c)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\partial_c\Psi(c) - \varepsilon^2\partial_c A_{jl}(c)\partial_{x_j}\partial_{x_l}c - \varepsilon^2\partial_c A_{jl}(c;\varepsilon_{rs})\partial_{x_j}c\partial_{x_l}c\Big], \tag{1.2}$$

$$\mathbf{J}_i^{(2)} = -M(c)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\partial_c\Psi(c) - \varepsilon^2\partial_c A_{jl}(c)\partial_{x_j}\partial_{x_l}c\Big]. \tag{1.3}$$

Параметр $\varepsilon > 0$ — малый, $\varepsilon \ll 1$. Функция $M$ является скалярным коэффциентом мобильности, который характеризует подвижность $\alpha$ и $\beta$ фаз:

$$M(c) = M^\alpha + (M^\beta - M^\alpha)\frac{c(x,t) - c^\alpha}{c^\beta - c^\alpha}, \quad M^\alpha, M^\beta > 0,$$

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-00231А.

 

а $c^\alpha$, $c^\beta$ являются концентрациями $\alpha$ и $\beta$ фаз в равновесном состоянии соответственно. Тензор поверхностных напряжений

$$a_{kl}(c) = a_{kl}^\alpha + (a_{kl}^\beta - a_{kl}^\alpha)\frac{c(x,t) - c^\alpha}{c^\beta - c^\alpha}, \tag{1.4}$$

где $a_{kl}^\alpha, a_{kl}^\beta > 0$ — постоянные такие, что выполняется условие эллиптичности

$$a_{kl}(c)\xi_k\xi_l > d_0 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \quad |\xi| = 1, \quad c \in [0,1].$$

Предположим, что (см. также [4, 8, 11])

$$a_{ij}^\alpha = \begin{pmatrix} a^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & a^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & a^\alpha \end{pmatrix}, \qquad a_{ij}^\beta = \begin{pmatrix} a_1^\beta & 0 & 0 \\ 0 & a_1^\beta & 0 \\ 0 & 0 & a_3^\beta \end{pmatrix},$$

т.е. фазы обладают существенно разными симметриями.

Основной вопрос, на который предстоит ответить в данной работе: каково влияние несимметрии на структуру решения вблизи фронта фазового перехода (см. § 2 далее)?

Чтобы было гарантировано сосуществование обеих фаз, плотность свободной энергии Гиббса должна быть невыпуклой функцией концентрации, например, (см. [8])

$$\Psi = \psi_0\Big(\Big([c^\alpha - c_0]^2 - [c - c_0]^2\Big)^2 - b[c - c_0]\Big), \qquad c_0 = \frac{1}{2}(c^\alpha + c^\beta),$$

где $\psi_0$ и $b$ являются постоянными. Тогда постоянные $c^\alpha$, $c^\beta \in (0,1)$ являются классическими равновесными концентрациями, однозначно определяемыми по схеме Максвелла [8] системой уравнений:

$$\partial_c\Psi(c^\alpha) = \partial_c\Psi(c^\beta),$$
$$\Psi(c^\beta) - \Psi(c^\alpha) = \partial_c\Psi(c^\alpha)(c^\beta - c^\alpha).$$

Рассматриваемая модель описывает процесс кристаллизации, когда первая стадия разделения фаз завершена, и существуют области с двумя разными фазами. Будем считать, что в рассматриваемом случае имеются две связные области $\Omega_{t,\varepsilon}^\pm$, разделенные зоной фазового перехода, являющейся в любое время окрестностью поверхности $\Gamma_{t,\varepsilon}$ фронта фазового перехода. Такие процессы называются жестко фронтовыми.

Обычные граничные условия завершают постановку задачи:

$$\partial_N c = 0, \qquad \partial_N\Big[\partial_c\Psi(c) - \varepsilon^2\partial_c A_{jl}(c)\partial_{x_j}\partial_{x_l}c - \varepsilon^2\partial_c A_{jl}(c;\varepsilon_{rs})\partial_{x_j}c\partial_{x_l}c\Big] = 0 \tag{1.5}$$

в первом случае (соответствуют случаю (1.2)) и

$$\partial_N c = 0, \qquad \partial_N\Big[\partial_c\Psi(c) - \varepsilon^2\partial_c A_{jl}(c)\partial_{x_j}\partial_{x_l}c\Big] = 0 \quad \text{на множестве } \Sigma_T \tag{1.6}$$

во втором (соответствуют случаю (1.3)). Здесь $N$ — вектор нормали к фиксированной границе $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T)$.

Задано также начальное значение концентрации:

$$c(x,t;\varepsilon)|_{t=0} = c^0(x;\varepsilon). \tag{1.7}$$

Для определенности будем считать, что

$$0 < c^\alpha < c^\beta < 1. \tag{1.8}$$

Как было отмечено выше, одной из целей работы является вывод сингулярно предельных задач для моделей при $\varepsilon \to 0$. Так вот для случая (1.3), более обстоятельно рассмотренного О. А. Васильевой, сингулярно предельная задача описывается обобщенной задачей Стефана со свободной границей (см. также [2, 3, 5–7]):

$$\frac{\partial}{\partial t}c^\pm - \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(M(c)\frac{\partial}{\partial x_i}\partial_c\Psi(c^\pm)\Big) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_{t,0}^\pm, \quad t \in (0,T), \tag{1.9}$$

$$c^\pm = \widehat{c^\pm}(\nu), \quad (x,t) \in \Gamma_{t,0}, \quad t \in (0,T), \tag{1.10}$$

$$(\widehat{c^+} - \widehat{c^-})V_\nu = M(c^+)\partial_\nu(\partial_c\Psi(c^+)) - M(c^-)\partial_\nu(\partial_c\Psi(c^-)), \quad (x,t) \in \Gamma_{t,0}, \quad t \in (0,T), \tag{1.11}$$

где вектор $\nu$ — единичная нормаль к $\Gamma_{t,0}$, внешняя для области $\Omega^-_{t,0}$, $V_\nu$ — нормальная скорость фронта. Для любого $t \in [0,T]$ имеем (ср. с [9,10])

$$\Omega^+_{t,0} \cup \Gamma_t \cup \Omega^-_{t,0} = \Omega, \quad \Omega^+_{t,0} \cap \Omega^-_{t,0} = \varnothing, \quad \partial\Omega^+_t = \Gamma_{t,0} \cup \Omega, \quad \partial\Omega^-_t = \Gamma_{t,0}.$$

Несимметрия тензора поверхностных натяжений приводит к зависимости предельных значений концентрации $\widehat{c^\pm}(\nu)$ на фронте фазового перехода от геометрии фронта, в отличие от классической задачи Стефана. На фиксированной границе имеем

$$\partial_N c^\pm = 0 \quad \text{на } \Sigma_T, \quad \Sigma_T \cap \Gamma_{0,0} = \varnothing. \tag{1.12}$$

Начальные значения предельных концентраций

$$c^\pm(x,t)|_{t=0} = c^0_\pm(x). \tag{1.13}$$

Численные эксперименты, также проведенные ранее О. А. Васильевой, показали, что в трехмерном случае задача (1.1), (1.3), (1.6) неустойчива. Решение, начиная с *радиально-симметричных* начальных данных в области $\Omega$ (шаре) с начальной свободной поверхностью $\Gamma_{0,0}$ (сферой), теряет свою симметрию. Окружность $\Gamma_{0,0}$ трансформируется в эллипс $\Gamma_{t,0}$ с главной осью, паралельной главной кристаллографической оси, совпадающей с собственным вектором тензора поверхностного натяжения, соответствующим максимальному собственному значению. Бесспорно, эти свойства связаны со свойствами решений задачи (1.9)–(1.11).

Сингулярно предельные задачи типа (1.9)–(1.11) (при исследовании первоначальных задач с малым параметром) играют роль локально равновесного предела для систем законов сохранения с релаксацией. Они отражают существенные структурные особенности их решений. Поэтому чрезвычайно важно исследовать условия разрешимости этих задач и их устойчивость.

## 2. Исследование межфазной зоны

Одним из результатов работы является вывод сингулярно предельной задачи для первой модели, отвечающей усечению диффузионного потока (1.1), (1.2), (1.5). Получим представление градиентов в переменных на фронте (в переменных межфазной зоны).

Для простоты расмотрим двумерный случай $x = (x_1, x_2) = (x, y)$. Пусть $r(\tau, s) = (r_1(\tau,s), r_2(\tau,s))$ — параметризация кривой $\Gamma(\tau)$, где $s$ — длина дуги. Тогда в достаточно малой окрестности $\Omega_{i,\varepsilon}$ кривой $\Gamma(\tau)$ можно ввести быстрые (внутрение) координаты $(\tau, s, z)$:

$$x(\tau,s,z) = r(\tau,s) + \varepsilon\, z\, \nu(\tau,s),$$

где $\nu(\tau,s) = (-\partial_s r_2(\tau,s), \partial_s r_1(\tau,s))$ — главная нормаль и $t(\tau,s) = (\partial_s r_1(\tau,s), \partial_s r_2(\tau,s))$ — вектор, направленный против часовой стрелки, так что по формулам Френе:

$$dt/ds = \kappa\nu, \quad d\nu/ds = -\kappa\, t,$$

где $\kappa(\tau)$ — кривизна кривой $\Gamma(\tau)$. Отсюда, очевидно, следует, что

$$\begin{gathered}\kappa(s,\tau) = \partial_s r_1 \partial_s^2 r_2 - \partial_s r_2 \partial_s^2 r_1, \qquad (\partial_s r_1)^2 + (\partial_s r_2)^2 = 1, \qquad \partial_s r_1 \partial_s^2 r_1 + \partial_s r_2 \partial_s^2 r_2 = 0,\\ \partial_s^2 r_1 = -\kappa\, \partial_s r_2, \qquad \partial_s^2 r_2 = \kappa\, \partial_s r_1.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Тогда

$$\partial_s x = (1 - \varepsilon\, z\, \kappa)t, \qquad \partial_z x = \varepsilon\, \nu, \qquad \det M = \varepsilon(1 - \varepsilon\, z\, \kappa),$$

и для градиента функции $u(\tau,x,y)=\widetilde{u}(\tau,s,\varepsilon z)$ получим следующие соотношения:

$$(\partial_s\widetilde{u},\partial_z\widetilde{u},\partial_\tau\widetilde{u})^\top = M\,(\partial_x u,\partial_y u,\partial_\tau\, u)^\top,$$
$$M=\begin{pmatrix}\partial_s x & \partial_s y & 0\\ \partial_z x & \partial_z y & 0\\ \partial_\tau\, x & \partial_\tau\, y & 1\end{pmatrix}, \tag{2.2}$$
$$\begin{pmatrix}\partial_x u\\ \partial_y u\\ \partial_\tau u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+\varepsilon\, z\kappa)\partial_s r_1 & -\varepsilon^{-1}\partial_s r_2 & 0\\ (1+\varepsilon\, z\kappa)\partial_s r_2 & -\varepsilon^{-1}\partial_s r_1 & 0\\ -(1+\varepsilon\, z\kappa)V^t & -\varepsilon^{-1}V^\nu & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_s\widetilde{u}\\ \partial_z\widetilde{u}\\ \partial_\tau\widetilde{u}\end{pmatrix}+O(\varepsilon^2).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $1/(1-\varepsilon\, z\kappa)=1+\varepsilon\, z\kappa+O(\varepsilon^2)$ и касательная и нормальная скорости равны соответственно

$$V^t=\partial_\tau\, x\cdot\, t,\quad V^\nu=\partial_\tau\, x\cdot\nu.$$

Нетрудно подсчитать и вторые производные:

$$\partial_x^2 u=\varepsilon^{-2}(\partial_s r_2)^2\partial_z^2\widetilde{u}-\varepsilon^{-1}\Big(\kappa(\partial_s r_1)^2\partial_z\widetilde{u}+2\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s\partial_z\widetilde{u}\Big)+(\partial_s r_1)^2-$$
$$-2\kappa\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s\widetilde{u}-z\kappa\Big(\kappa(\partial_s r_1)^2\partial_z\widetilde{u}+2\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s\partial_z\widetilde{u},$$
$$\partial_y^2 u=\varepsilon^{-2}(\partial_s r_1)^2\partial_z^2\widetilde{u}-\varepsilon^{-1}\Big(\kappa(\partial_s r_2)^2\partial_z\widetilde{u}-2\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s\partial_z\widetilde{u}\Big)+(\partial_s r_2)^2+$$
$$+2\kappa\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s\widetilde{u}-z\kappa\Big(\kappa(\partial_s r_2)^2\partial_z\widetilde{u}-2\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s\partial_z\widetilde{u},$$
$$\partial_x\partial_y u=-\varepsilon^{-2}\partial_s r_2\partial_s r_1\partial_z^2\widetilde{u}-\varepsilon^{-1}\Big(\kappa\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_z\widetilde{u}+\Big((\partial_s r_2)^2-(\partial_s r_1)^2\Big)\partial_s\partial_z\widetilde{u}+\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_s^2\widetilde{u}-$$
$$-\kappa\Big((\partial_s r_2)^2-(\partial_s r_1)^2\Big)\partial_s\widetilde{u}-z\kappa\Big(\kappa\partial_s r_1\partial_s r_2\partial_z\widetilde{u}+\Big((\partial_s r_2)^2-(\partial_s r_1)^2\Big)\partial_s\partial_z\widetilde{u}\Big),$$
$$\Delta\mu=\varepsilon^{-2}\partial_z^2\widetilde{\mu}-\varepsilon^{-1}\kappa\partial_z\widetilde{\mu}+\partial_s^2\widetilde{\mu}-z\kappa^2\partial_z\widetilde{\mu}. \tag{2.3}$$

Здесь также справедливо равенство $\mu(\tau,x,y)=\widetilde{\mu}(\tau,s,\varepsilon\, z)$. В этих координатах межфазной зоны градиентную часть свободной энергии будем представлять в виде:

$$2A_{kl}(u)\partial_{x_k}\partial_{x_l}u+A_{kl}(u)\partial_{x_k}u\partial_{x_l}u=\varepsilon^{-2}h_{-2}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})+$$
$$+\varepsilon^{-1}h_{-1}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})+h_0(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}),\quad \xi_k,\xi_l\in\{s,z\},$$

где, как и выше,

$$u(\tau,x,y)=\widetilde{u}(\tau,s,\varepsilon\, z),$$

при этом

$$h_{-2}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})=2\nu\, A\,\nu^\top\partial_z^2\widetilde{u}+\nu\, A'\nu^\top\Big(\partial_z\widetilde{u}\Big)^2,$$
$$h_{-1}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})=-2\kappa\, t\, A\, t^\top\partial_z\widetilde{u}+2(t\, A\,\nu^\top+\nu\, A\, t^\top)\partial_s\partial_z\widetilde{u}+2(t\, A'\,\nu^\top+\nu\, A'\, t^\top)\partial_s\widetilde{u}\partial_z\widetilde{u},$$
$$h_0(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})=2\, t\, A\, t^\top\partial_s^2\widetilde{u}+2\kappa(t\, A'\,\nu^\top+\nu\, A'\, t^\top)\partial_s\widetilde{u}+$$
$$+t\, A'\, t^\top\Big(\partial_s\widetilde{u}\Big)^2+z\kappa\, h_{-1}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}).$$

Здесь штрихом обозначена производная по $u$: $A'=dA/du$ и

$$A(\widetilde{u})=\begin{pmatrix}A_{11}(\widetilde{u}) & A_{12}(\widetilde{u})\\ A_{21}(\widetilde{u}) & A_{22}(\widetilde{u})\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что если

$$\widetilde{\mu}(\tau,s,\varepsilon\, z)=F'(\widetilde{u})-h_{-2}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})+O(\varepsilon),\quad \xi_k,\xi_l\in\{s,z\},$$

то

$$\Delta\mu=\varepsilon^{-2}\partial_z^2\Big(F'(\widetilde{u})-h_{-2}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big)-$$

$$
\begin{gathered}
-\varepsilon^{-1}\Big(\partial_z^2 h_{-1}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}) - \kappa\partial_z\Big(F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big) - \\
-h_0(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}) - \kappa\,\partial_z h_{-1}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big) + \\
+\partial_s^2\Big(F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big) - z\kappa^2\partial_z\Big(F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big) + O(\varepsilon). \qquad (2.4)
\end{gathered}
$$

Теперь рассмотрим внутреннее разложение вида

$$
\begin{aligned}
\widetilde{u}(\tau,s,z) &= \widetilde{u}_0(\tau,s,z) + \varepsilon\widetilde{u}_1(\tau,s,z) + \varepsilon^2\widetilde{u}_2(\tau,s,z) + O(\varepsilon^3),\\
\widetilde{\mu}(\tau,s,z) &= \widetilde{\mu}_0(\tau,s,z) + \varepsilon\widetilde{\mu}_1(\tau,s,z) + \varepsilon^2\widetilde{\mu}_2(\tau,s,z) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}
$$

Разложим функцию $F'(\widetilde{u})$:

$$
F'(\widetilde{u}) = F'(\widetilde{u}_0) + \varepsilon\, F''(\widetilde{u}_0)\widetilde{u}_1 + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}F'''(\widetilde{u}_0)\widetilde{u}_1^2 + F''(\widetilde{u}_0)\widetilde{u}_2\right) + O(\varepsilon^3)
$$

и также разложим $A(\widetilde{u})$. Приравнивая нулю члены при $\varepsilon^{-2}$, получим так называемое стандартное уравнение:

$$
\partial_z^2\widetilde{\mu}_0 = \partial_z^2\Big(F'(\widetilde{u}_0) - h_{-2}(\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}_0)\Big) = 0,
$$

так что

$$
F'(\widetilde{u}_0) - h_{-2}(\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}_0) = \widetilde{\mu}_0 = a_0(\tau,s)z + b_0(\tau,s).
$$

Рассмотрим далее внешнее разложение (регулярное разложение) вне $O(\varepsilon\ln(1/\varepsilon))$-окрестности фронта $\Gamma(\tau)$ вида

$$
\begin{aligned}
u(\tau,x;\varepsilon) &= u_0(\tau,x) + \varepsilon\, u_1(\tau,x) + \varepsilon^2\, u_2(\tau,x) + O(\varepsilon^3),\\
\mu(\tau,x;\varepsilon) &= \mu_0(\tau,x) + \varepsilon\, \mu_1(\tau,x) + \varepsilon^2\, \mu_2(\tau,x) + O(\varepsilon^3). \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Как обычно (см. также [1–4]), в области $\Omega\setminus\Gamma(\tau)$, $\tau\in(0,\varepsilon T_0)$, для старшего члена разложения, первой и второй его поправок получим цепочку уравнений:

$$
\Delta\mu_0 = \Delta\, F'(u_0) = 0, \qquad (2.6)
$$

$$
\Delta\mu_1 = \Delta\Big(F''(u_0)u_1\Big) = \partial_\tau\, u_0, \qquad (2.7)
$$

$$
\Delta\mu_2 = \Delta\Big(F''(u_0)u_2\Big) + \frac{1}{2}F'''(u_0)u_1^2 - 2A_{kl}(u_0)\partial_{x_k}\partial_{x_l}u_0 - A'_{kl}\partial_{x_k}u_0\partial_{x_l}u_0 \qquad (2.8)
$$

плюс соответствующие граничные условия на фиксированной границе $\partial\Omega$ $\forall\tau\in(0,\varepsilon T_0)$. Если на внешней границе граничное условие Неймана имеет вид

$$
n\cdot\nabla\, u(\tau,x;\varepsilon) = 0, \quad (\tau,x)\in\partial\Omega,
$$

где $n$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, то

$$
n\cdot\nabla\, u_j(\tau,x) = 0, \quad j\geqslant 0, \quad (\tau,x)\in\partial\Omega.
$$

Граничные условия на фронте $\Gamma(\tau)$, замыкающие эти задачи, найдем из условий согласования внешнего и внутреннего разложений в $O(\varepsilon\ln(1/\varepsilon))$-окрестности фронта $\Gamma(\tau)$ (см. также [4,12–18]).

Теперь, для простоты, будем считать фронт $\Gamma(\tau)$ односвязным, непересекающимся с фиксированной границей $\partial\Omega$. Тогда внешняя область разбивается на две подобласти $\Omega\setminus\Gamma(\tau) = \Omega^+(\tau)\bigcup\Omega^-(\tau)$ с границами

$$
\partial\Omega^+(\tau) = \Gamma(\tau), \quad \partial\Omega^-(\tau) = \partial\Omega\cup\Gamma(\tau), \quad \tau\in(0,\varepsilon T_0).
$$

Для старшей части регулярной асимптотики получим

$$
\begin{gathered}
\Delta\mu_0^\pm = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\pm,\\
n\cdot\nabla\mu_0^- = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.
\end{gathered}
$$

Перепишем внешнее разложение для величины $\mu$ (химического потенциала) в межфазной области во внутренних координатах:

$$
\Big(\mu_0(\tau,x) + \varepsilon\,\mu_1(\tau,x) + \varepsilon^2\,\mu_2(\tau,x) + O(\varepsilon^3)\Big)(\tau, r + \varepsilon\, z\nu) =
$$

$$= \mu_0^\pm(\tau,r) + \varepsilon\Big(\mu_1^\pm(\tau,r) + z\nu\cdot\nabla_x\mu_0^\pm(\tau,r)\Big) +$$
$$+\varepsilon^2\Big(\mu_2(\tau,r) + z\nu\cdot\nabla_x\mu_1^\pm + \frac{1}{2}z^2\nu\;\mathcal{W}(\mu_0^\pm)\;\nu^\top\Big) + O(\varepsilon^3). \tag{2.9}$$

Здесь

$$\mathcal{W}(\mu_0^\pm) = \begin{pmatrix} \partial_x^2\mu_0^\pm & \partial_x\partial_y\mu_0^\pm \\ \partial_x\partial_y\mu_0^\pm & \partial_y^2\mu_0^\pm \end{pmatrix}.$$

Из условия согласования внутреннего и внешнего разложений при $\varepsilon\to 0$ для старших членов получим

$$\mu^\pm(\tau,r) = \lim_{z\to\pm\infty}\widetilde{u}_0(\tau,r,z). \tag{2.10}$$

Следовательно,

$$a_0(\tau,r)=0,\quad \mu_0^+(\tau,r)=\mu^-(\tau,r)=b_0(\tau,r).$$

Отсюда следует, что функция $\widetilde{u}_0$ по $z$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2\nu\,A\,\nu^\top\frac{d^2\widetilde{u}_0}{dz^2} + \nu\,A'\nu^\top\left(\frac{d\widetilde{u}_0}{dz}\right)^2 = F'(\widetilde{u}_0) - b_0(\tau,r). \tag{2.11}$$

Более того, можно доказать (см. также [19–23]) существование гладкого решения в классе стабилизирующихся функций, т.е. ограниченных $C^\infty$-функций таких, что $z^N d^j\widetilde{u}_0/dz^j\to 0$ для любых $N\geqslant 0$, $j>0$, когда $|z|\to\infty$. Тогда из (2.11) вытекают следующие условия разрешимости:
1. $F'(\widetilde{u}_0^+) = F'(\widetilde{u}_0^-) = b_0(\tau,r)$;
2. $F(\widetilde{u}_0^+) - F'(\widetilde{u}_0^-) = b_0(\tau,r)(\widetilde{u}_0^+ - \widetilde{u}_0^-)$;
3. $\Big(F(\widetilde{u}_0) - F(\widetilde{u}_0^-) - F'(\widetilde{u}_0^-)(\widetilde{u}_0 - \widetilde{u}_0^-)\Big)/\Big(\nu\,A(\widetilde{u}_0)\nu^\top\Big) > 0$ для любых $\widetilde{u}_0\in(\widetilde{u}_0^+,\widetilde{u}_0^-)$.

Чтобы получить второе условие разрешимости, умножим это уравнение на $d\widetilde{u}_0/dz$, что позволяет преобразовать его к виду

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(2\nu\,A(\widetilde{u}_0)\nu^\top\left(\frac{d\widetilde{u}_0}{dz}\right)^2\right) = \left(2\nu\,A\,\nu^\top\frac{d^2\widetilde{u}_0}{dz^2} + \nu\,A'\nu^\top\left(\frac{d\widetilde{u}_0}{dz}\right)^2\right)\frac{d\widetilde{u}_0}{dz} =$$
$$= \Big(F'(\widetilde{u}_0) - b_0(\tau,r)\Big)\frac{d\widetilde{u}_0}{dz}. \tag{2.12}$$

Интегрируя по $z$ от $z=-\infty$ до $z=\infty$, из условия стабилизации получим

$$0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(F'(\widetilde{u}_0) - b_0(\tau,r)\Big)\frac{d\widetilde{u}_0}{dz}dz = \int\limits_{\widetilde{u}_0^-}\widetilde{u}_0^+\Big(F'(\widetilde{u}_0) - b_0(\tau,r)\Big)d\widetilde{u}_0 =$$
$$= F(\widetilde{u}_0^+) - F(\widetilde{u}_0^-) - b_0(\tau,r)(\widetilde{u}_0^+ - \widetilde{u}_0^-).$$

Отсюда, в силу (2.12), имеем

$$2\nu\,A(\widetilde{u}_0)\nu^\top\left(\frac{d\widetilde{u}_0}{dz}\right)^2 = F(\widetilde{u}_0) - F(\widetilde{u}_0^-) - F'(\widetilde{u}_0^-)(\widetilde{u}_0 - \widetilde{u}_0^-),$$

что определяет третье условие разрешимости:

$$\Big(F(\widetilde{u}_0) - F(\widetilde{u}_0^-) - F'(\widetilde{u}_0^-)(\widetilde{u}_0 - \widetilde{u}_0^-)\Big)/\Big(\nu\,A(\widetilde{u}_0)\nu^\top\Big) > 0 \quad \forall\widetilde{u}_0\in(\widetilde{u}_0^+,\widetilde{u}_0^-).$$

Тогда выполнено равенство

$$\frac{d\widetilde{u}_0}{dz} = \pm\sqrt{\frac{F(\widetilde{u}_0) - F(\widetilde{u}_0^-) - F'(\widetilde{u}_0^-)(\widetilde{u}_0 - \widetilde{u}_0^-)}{\nu\,A(\widetilde{u}_0)\nu^\top}}.$$

Следовательно, для любого $z_* \in \mathbb{R}^1$ существует единственное решение

$$\widetilde{u}_0 = \pm \int_{z_*}^{z} \sqrt{\frac{\mathcal{F}(\widetilde{u}_0(z_1))}{\nu\, A(\widetilde{u}_0(z_1))\nu^\top}} dz_1, \qquad \mathcal{F}(\widetilde{u}_0) := F(\widetilde{u}_0) - F(\widetilde{u}_0^-) - F'(\widetilde{u}_0^-)(\widetilde{u}_0 - \widetilde{u}_0^-).$$

В дальнейшем для простоты рассмотрим только случай монотонно возрастающего решения. Необходимо отметить, что решение стандартного уравнения $\widetilde{u}_0 = \widetilde{u}_0(z,\nu)$ зависит от самой геометрии фронта $\Gamma(\tau)$ через нормаль $\nu$, хотя предельные значения $\widetilde{u}_0^\pm$ зависят только от потенциала $F(u)$. Теперь мы можем замкнуть задачу для старшей части внешнего разложения для величины $\mu$:

$$\Delta \mu_0^\pm = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\pm,$$
$$n \cdot \nabla \mu_0^- = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$
$$\mu_0^\pm = b_0 \quad \text{на} \quad \Gamma(\tau).$$

Из принципа максимума следует, что

$$\mu_0 = \text{const} \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Приравнивая нулю члены при $\varepsilon^{-1}$, получим уравнение для первой поправки к решению стандартного уравнения:

$$0 = \partial_z^2 \widetilde{\mu}_1 = -\partial_z^2 h^{-1}(\widetilde{u}_0, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}_0, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}_0) + \partial_z^2 \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\Big(F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u}_0, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}_0, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}_0)\Big).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\kappa\partial_z\widetilde{\mu}_0 = 0$, так как $\widetilde{\mu}_0(\tau,r,z) = b_0(\tau,r)$ постоянна по $z$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&-h^{-1}(\widetilde{u}_0, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}_0, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}_0) + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\Big(F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big) = \\
&= 2\kappa\, t\, A\, t^\top \partial_z\widetilde{u}_0 - 2(t\,A\,\nu^\top + \nu\,A\,t^\top)\partial_s\partial_z\widetilde{u}_0 - 2(t\,A'\,\nu^\top + \nu\,A'\,t^\top)\partial_s\widetilde{u}\partial_z\widetilde{u}_0 + \\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\Big(F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big) = \widetilde{\mu}_1 = a_1(\tau,r)z + b_1(\tau,r).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Выражение для $\widetilde{\mu}_1$ можно упростить

$$\widetilde{\mu}_1 = 2\kappa\,\nu\,A\,\nu^\top\partial_z\widetilde{u}_0 - 2\partial_s\Big((t\,A\,\nu^\top + \nu\,A\,t^\top)\partial_z\widetilde{u}_0\Big) + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\Big(F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\begin{aligned}
\partial_s\Big((t\,A\,\nu^\top + \nu\,A\,t^\top)(\partial_z\widetilde{u}_0)^2\Big) &= 2(t\,A\,\nu^\top + \nu\,A\,t^\top)\partial_s\partial_z\widetilde{u}_0 - \\
-2(t\,A'\,\nu^\top + \nu\,A'\,t^\top)\partial_s\widetilde{u}_0\partial_z\widetilde{u}_0 &- 2\kappa(tAt^\top - \nu\,A\nu^\top)(\partial_z\widetilde{u}_0)^2.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\Big(F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big) &= -2\nu\,A(\widetilde{u}_0)\nu^\top\partial_z^2\widetilde{u}_1 - \\
-2\nu\,A'(\widetilde{u}_0)\nu^\top\partial_z\widetilde{u}_0\partial_z\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_1\Big[F''(\widetilde{u}_0) &- 2\nu\,A'(\widetilde{u}_0)\nu^\top\partial_z^2\widetilde{u}_0 - \nu\,A''(\widetilde{u}_0)\nu^\top(\partial_z\widetilde{u}_0)^2\Big].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Отсюда, если учесть, что первая поправка $\widehat{u}_1$ также ищется в классе стабилизирующихся функций, получаем:

$$\lim_{z\to\pm\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\Big(F'(\widetilde{u}) - h_{-2}(\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\widetilde{u}, \partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big) = \widetilde{u}_1^\pm\, F''(\widetilde{u}_0^\pm),$$

откуда следует, что в (2.13)

$$a_1(\tau,r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\mu}_1 = b_1(\tau,r),$$

т.е. первая поправка химического потенциала не зависит от $z$ в межфазной зоне. Умножая (2.13) на $d\widetilde{u}_0/dz$, имеем

$$b_1(\tau,r)\partial_z\widetilde{u}_0 = 2\kappa\,\nu\,A\,\nu^\top(\partial_z\widetilde{u}_0)^2 - \partial_s\Big((t\,A\,\nu^\top + \nu\,A\,t^\top)(\partial_z\widetilde{u}_0)^2\Big) +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\Big(F'(\widetilde{u})-h_{-2}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big)\partial_z\widetilde{u}_0. \tag{2.15}$$

Дифференцируя по $z$ уравнение (2.11) и умножая полученный результат на $\widetilde{u}_1$, получим

$$0=\widetilde{u}_1\Big\{\partial_z\widetilde{u}_0\Big[F''(\widetilde{u}_0)-4\nu\,A'(\widetilde{u}_0)\nu^\top\partial_z^2\widetilde{u}_0-\nu\,A''(\widetilde{u}_0)\nu^\top(\partial_z\widetilde{u}_0)^2\Big]-2\nu\,A(\widetilde{u}_0)\nu^\top\partial_z^3\widetilde{u}_0\Big\}.$$

Если учесть это равенство в произведении (2.14) на $\partial_z\widetilde{u}_0$, то это произведение можно привести к виду

$$\begin{gathered}\partial_z\widetilde{u}_0\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\Big(F'(\widetilde{u})-h_{-2}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})\Big)=-2\partial_z\widetilde{u}_0\Big(\nu\,A(\widetilde{u}_0)\nu^\top\partial_z^2\widetilde{u}_1+\\ +\nu\,A'(\widetilde{u}_0)\nu^\top\partial_z\widetilde{u}_0\partial_z\widetilde{u}_1\Big)+2\widetilde{u}_1\nu\,A(\widetilde{u}_0)\nu^\top\partial_z^3\widetilde{u}_0+2\widetilde{u}_1\nu\,A'(\widetilde{u}_0)\nu^\top\partial_z\widetilde{u}_0\partial_z^2\widetilde{u}_0=\\ =-2\partial_z\Big(\nu\,A(\widetilde{u}_0)\nu^\top\partial_z\widetilde{u}_0\partial_z\widetilde{u}_1-\nu\,A(\widetilde{u}_0)\nu^\top\widetilde{u}_1\partial_z^2\widetilde{u}_0\Big).\end{gathered} \tag{2.16}$$

Интегрируя (2.15) по $z$, получим

$$b_1(\tau,r)[\widetilde{u}_0]^\pm=2\kappa\int\limits_{\widetilde{u}_0^-}^{\widetilde{u}_0^+}\sqrt{\nu\,A(v)\,\nu^\top\mathcal{F}(v)}dv-\partial_s\int\limits_{\widetilde{u}_0^-}^{\widetilde{u}_0^+}\Big(t\,A(v)\,\nu^\top+\nu\,A(v)\,t^\top\Big)\sqrt{\frac{\mathcal{F}(v)}{\nu\,A(v)\nu^\top}}\,dv.$$

Отсюда следует, что

$$b_1(\tau,r)[\widetilde{u}_0]^\pm=\kappa\Bigg\{2\int\limits_{\widetilde{u}_0^-}^{\widetilde{u}_0^+}\sqrt{\nu\,A(v)\,\nu^\top\mathcal{F}(v)}dv-\frac{1}{2}\int\limits_{\widetilde{u}_0^-}^{\widetilde{u}_0^+}\Big(t\,A(v)\,\nu^\top+\nu\,A(v)\,t^\top\Big)^2\sqrt{\frac{\mathcal{F}(v)}{(\nu\,A(v)\nu^\top)^{3/2}}}\,dv\Bigg\}. \tag{2.17}$$

Это позволяет получить следующую краевую задачу для первой внешней поправки химического потенциала:

$$\Delta\mu_1^\pm=0\quad\text{в}\quad\Omega^\pm, \tag{2.18}$$
$$n\cdot\nabla_x\mu_1^-=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega,$$
$$\mu_1^+=\mu_1^-=b_1(\tau,r)\quad\text{на}\quad\Gamma(\tau), \tag{2.19}$$

т.е. мы получили квазистационарную задачу со свободной границей. Чтобы замкнуть эту задачу, нам необходимо уравнение для фронта. Для этого достаточно получить нормальную скорость свободной границы, что потребует исследования следующей внутренней поправки порядка $O(1)$, для которой получим следующее уравнение:

$$\begin{gathered}-V_\nu\partial_z\widetilde{u}_0=-\partial_z^2h_0(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})+\partial_s^2\widetilde{\mu}_0-z\kappa^2\partial_z\widetilde{\mu}_0-\\ -\kappa\partial_z\Big(-\kappa\,\partial_zh_{-1}(\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\widetilde{u},\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u})+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\Big(F'(u)-h_{-2}(\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}_0)\Big)\Big)+\\ +\partial_z^2\Big\{-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}h^{-1}(\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}_0)+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d^2}{d^2\varepsilon}\Big(F'(\widetilde{u})-h_{-2}(\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}_0)\Big)\Big\}=\\ =\partial_s^2\widetilde{\mu}_0-z\kappa^2\partial_z\widetilde{\mu}_0-\kappa\partial_z\widetilde{\mu}_1+\partial_z^2\widetilde{\mu}_2,\end{gathered} \tag{2.20}$$

где $V_\nu=\partial_\tau r\cdot\nu$ — нормальная скорость фронта,

$$\begin{gathered}\widetilde{\mu}_2=-\Big(2\,t\,A(\widetilde{u}_0)\,t^\top\partial_s^2\widetilde{u}_0+2\kappa(t\,A'(\widetilde{u}_0)\,\nu^\top+\nu\,A'(\widetilde{u}_0)\,t^\top)\partial_s\widetilde{u}_0+\\ +t\,A'(\widetilde{u}_0)\,t^\top\Big(\partial_s\widetilde{u}_0\Big)^2+z\kappa\,h_{-1}(\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}_0)\Big)+\\ +\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}h^{-1}(\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}_0)+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d^2}{d^2\varepsilon}\Big(F'(\widetilde{u})-h_{-2}(\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\widetilde{u}_0,\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}\widetilde{u}_0)\Big).\end{gathered} \tag{2.21}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $z = (x - r) \cdot \nu / \varepsilon$, откуда в межфазной зоне

$$\varepsilon \partial_\tau u = -V_\nu \partial_z \widetilde{u}_0 + O(\varepsilon).$$

Так как, в силу независитмости $\widetilde{\mu}_0$ от $z$, имеем $\partial_s^2 \widetilde{\mu}_0 - zq\kappa^2 \partial_z \widetilde{\mu}_0 = 0$, то из (2.20) следует

$$-V_\nu \partial_z \widetilde{u}_0 = \partial_z^2 \widetilde{\mu}_2 - \kappa \partial_z \widetilde{\mu}_1.$$

Так как $\widetilde{\mu}_1$ не зависит от $z$, окончательно имеем

$$-V_\nu \partial_z \widetilde{u}_0 = \partial_z^2 \widetilde{\mu}_2.$$

Интегрируя по $z$, получим

$$-V_\nu (\widetilde{u}_0^+ - \widetilde{u}_0^-) = \partial_z \widetilde{\mu}_2^+ - \partial_z \widetilde{\mu}_2^-.$$

Теперь определим предельные значения внутренней поправки $\widetilde{\mu}_2$. Из условия согласования первых производных в порядке $O(\varepsilon^2)$ (см. (2.9)) получим

$$\lim_{z \to \pm\infty} \partial_z \widetilde{\mu}_2 = \pm\, \nu \cdot \nabla_x \mu_1^\pm.$$

Это позволяет замкнуть задачу (2.18) и получить сингулярно предельную задачу для первой модели, отвечающей выбору диффузионного потока (1.2):

$$\begin{gathered} \Delta \mu_1^\pm = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\pm, \\ n \cdot \nabla_x \mu_1^- = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \\ \mu_1^+ = \mu_1^- = b_1(\tau, r) \quad \text{на} \quad \Gamma(\tau), \\ V_\nu = -\frac{\partial_\nu \mu_1^+ - \partial_\nu \mu_1^-}{\widetilde{u}_0^+ - \widetilde{u}_0^-}, \end{gathered} \tag{2.22}$$

где $\partial_\nu$ — нормальная производная на фронте. Как видим, мы получили модифицированную задачу Стефана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Баренблат Г. И., Ентов В. М., Рижик В. М.* Поведение жидкостей и газов в пористых слоях. — М.: Недра, 1984.
2. *Радкевич Е. В.* Условия существования классического решения модифицированной задачи Стефана (закон Гиббса—Томсона)// Мат. сб. — 1992. — *183*, № 2. — С. 77–101.
3. *Радкевич Е. В.* Об асимптотическом решении системы фазового поля// Диффер. уравн. — 1993. — *29*, № 3. — С. 487–500.
4. *Радкевич Е. В., Захарченко М.* Асимптотическое решение расширенной модели Кана—Хилларда// Соврем. мат. и ее прил. — 2003. — *2*. — С. 121–138.
5. *Akhmerov R.* On structure of a set of solutions of Dirichlet boundary-value problem for stationary one-demensional forward-backward parabolic equation// Nonlinear Anal. Theory Meth. and Appl. — 1987. — *11*, № 11. — С. 1303–1316.
6. *Alikakos N., Bates P., Fusco G.* Slow motion for Cahn–Hilliard equation// SIAM J. Appl. Math. — 1991. — *90*. — С. 81–135.
7. *Bates P., Fife P.* The dynamics of nucleation for Cahn–Hilliard equation// SIAM J. Appl. Math. — 1993. — *53*. — С. 990–1008.
8. *Cahn J. W., Hilliard J. E.* Free energy of a non-uniform system, Part I: Interfacial free energy// J. Chemical Physics. — 1958. — *28*, № 1. — С. 258–267.
9. *Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V.* Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase field system// Eur. J. Appl. Math. — 1999. — *10*. — С. 55–77.
10. *Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V.* Asymptotic solution of the conserved phase field system in the fast relaxation case// Eur. J. Appl. Math. — 1998. — *9*. — С. 1–21.
11. *Dreyer W. and Muller W. H.* A study of the coarseing in tin/lead solders// Int. J. Solids Structures. — 2000. — *37*. — С. 3841–3871.
12. *Elliot Ch.* The Stefan problem with a non-monotone constitutive relations// IMA J. Appl. Math. — 1985. — *35*. — С. 257–264.
13. *Elliot Ch., Zheng S.* On the Chan–Hilliard equation// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1986. — *96*, № 4. — С. 339–357.

14. *Fridman A.*, Variational principles and free boundary problem. — New York-Chichester, Brisbane Toronto Singapur, 1982.
15. *Grant C.* Spinodal decomposition for the Cahn–Hilliard equation// Comm. Part. Differ. Equat. — 1985. — *18*, № 3-4. — C. 453–490.
16. *Hilhorst D., Kersner R., Logak E., Mimura M.* On some asymptotic limits of the Fisher equation with degenerate diffusion// in press.
17. *Hollig K.* Existence of infinity many solutions for a forward-backward parabolic equation// Trans. Amer. Math. Soc. — 1983. — *278*, № 1. — C. 299–316.
18. *Kinderlehrer D., Pedregal P.* Weak convergence of integrands and the Young measure representation// SIAM J. Math. Anal. — 1992. — *23*. — C. 1–19.
19. *Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R.* Some global properties of a class of pattern formation equations// Commun. Part. Differ. Equat. — 1989. — *14*, № 2. — C. 245–297.
20. *Nirenberg L.* Topics on Nonlinear Functional Analysis. — New York: New York Courant Inst. Math. Sciences, 1974.
21. *Plotnikov P.* Singular limits of solutions to Cahn–Hilliard equation// in press.
22. *Saffman P. G., Taylor G. I.* The penetration of a fluid into porous medium or Hele-Show cell containing a more viscous liquid// Proc. Roy. Soc. London. — 1958. — *A. 245*. — C. 312–329.
23. *Slemrod M.* Dynamics of measure valued solutions to a backward forward parabolic equation// J. Dyn. Differ. Equat. — 1991. — *2*. — C. 1–28.

Н. Ю. Селиванова
ВИНИТИ РАН, Москва, Россия
E-mail: math@viniti.ru

М. В. Шамолин
Московский Государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Институт механики, Москва, Россия
E-mail: shamolin@imec.msu.ru