Современная математика и ее приложения. Том 78 (2012). С. 99–108

УДК 517.957.6

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ[1]

© 2012 г. **Н. Ю. СЕЛИВАНОВА, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Изучается некоторая однофазная задача со свободной границей. Доказывается локальная разрешимость (по времени) данной задачи, при этом разрабатываемый общий метод применяется в более конкретном случае. Для этого вводятся новая замена пременных, параметризация границы, и исследуемая задача сводится к задаче в постоянной области.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Пусть $\Omega(t)$ — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, граница которого $\partial\Omega(t)$ — объединение $\Gamma\cup\Sigma(t)$ двух компактных связных гиперповерхностей. Здесь Γ фиксировано и возможно пусто (далее для простоты без потери общности можно считать именно так), а $\Sigma(t)$ меняется с течением времени. Рассмотрим следующую однофазную задачу со свободной границей: найти функцию $u(x,t)$ и гладкое однопараметрическое семейство гиперповерхностей

$$\Sigma = \bigcup_{t\in(0,T]} (\Sigma(t)\times\{t\}),$$

удовлетворяющие следующей краевой задаче (см. также [1–4, 8–10]):

$$\begin{cases} Au = f(x,t), & x\in\Omega(t), \quad (1.1)\\ u = g(x,t), & x\in\partial\Omega(t), \quad (1.2)\\ v_n = -\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right), & x\in\Sigma(t), \quad (1.3)\end{cases} \tag{1}$$

где A — эллиптический оператор второго порядка с гладкими коэффициентами:

$$A = \partial_i(a_{ij}\partial_j) + b_j\partial_j,$$

(a_{ij}) — симметричная положительно определенная матрица, удовлетворяющая условию эллиптичности:

$$\sum_{ij} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant |\xi^2|, \quad \xi\in\mathbb{R}^N,$$

и b_j — гладкие коэффициенты.

Пусть f и g — заданные функции в $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+$, v_n — нормальная скорость $\Sigma(t)$, n — единичная нормаль к $\Sigma(t)$, внешняя к $\Omega(t)$.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-00231А.

Наша цель — доказать локальную (по времени) разрешимость задачи (1).

Разрабатывая общий метод, мы для ясности изложения будем параллельно применять его в конкретном, более простом случае.

Пусть $\Omega(t)$ — переменная область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная неподвижной плоскостью $x_3 = -1$ и поверхностью $\Sigma(t)$: $x_3 = \rho(x_1, x_2, t)$. $A = \Delta$ — оператор Лапласа, т.е. $a_{ij} = 1$, если $i = j$, и $a_{ij} = 0$ — иначе, $b_j = 0$.

В $\Omega(t)$ имеем задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,t), & x \in \Omega(t), \qquad (2.1) \\ u = g(x,t), & x \in \partial\Omega(t), \qquad (2.2) \\ v_n = -\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right), & x \in \Sigma(t). \qquad (2.3) \end{cases} \tag{2}$$

2. Замена переменных, параметризация границы, сведение задачи к задаче в постоянной области

Рассмотрим Σ^* — $(N-1)$-мерную гладкую связную область (поверхность), вложенную в $\Omega \in \mathbb{R}^N$.

Пусть $M^*(s)$ — какая-то точка на поверхности Σ^* и $n^*(s)$ — единичная внешняя нормаль к Σ^* в точке M^*. Тогда $M(s,d) = M^*(s) + dn^*(s)$ для некоторого малого положительного числа L_0, зависящего только от кривизны поверхности Σ^*, $M(\cdot,\cdot)$ — C^∞-диффеоморфизм из $\Sigma^* \times [-L_0, L_0]$ на

$$\Sigma(L_0) = \{M \in \mathbb{R}^N \mid \mathrm{dist}(M, \Sigma^*) < L_0\}.$$

Для достаточно малого $\rho_0 \ll 1$ можно параметризовать Σ_0 определенным выше образом:

$$\Sigma_0 = \Sigma^{\rho_0} = \Sigma^* + \rho_0 n^*.$$

Другими словами,

$$\Sigma_0 = \{M^{\rho_0} \mid M^{\rho_0} = M^* + \rho_0(s) n^*,\ M^* \in \Sigma^*\},$$

где $\rho_0(s)$ — $C^{m+\alpha}$-функция из Σ^*в $\mathbb{R}$.

Будем считать, что

$$\|\rho_0\|_{m+\alpha} \leqslant \delta,$$

где $\delta < \dfrac{L_0}{8}$ и $\delta \ll 1$.

Замечание 1. Для любой гладкой области M обозначим через $\|\cdot\|_{m+\alpha,n+\beta}$ норму пространства $C^{n+\beta}([0,T], C^{m+\alpha}(M))$. Когда $m = n$ и $\alpha = \beta$, будем вместо $\|\cdot\|_{m+\alpha,m+\alpha}$ писать просто $\|\cdot\|_{m+\alpha}$.

Замечание 2. Используя теоремы вложения, полученные результаты можно перенести и на пространство $W_p^m(M \times [0,T])$.

Для достаточно малого $T \ll 1$ можно параметризовать все семейство $\{\Sigma(t)\}_{t\in[0,T]}$, т.е.

$$\Sigma_\rho(t) = \{M^\rho \mid M^\rho = M^*(s) + \rho(s,t) n^*(s),\ M^* \in \Sigma^*\},$$

где ρ — $C^{m,\alpha}$-функция из $\Sigma^* \times [0,T]$ в $\left[-\dfrac{L_0}{4}, \dfrac{L_0}{4}\right]$.

Теперь определим замену переменных, которая позволит перейти от задачи со свободной границей к задаче в фиксированной области.

Пусть $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — «срезающая» функция, причем для любого фиксированного $t \in [0,T]$ отображение

$$Y_\rho : (x,t) \to x - \zeta\left(\frac{d(x)}{L_0}\right)\rho(S(x),t) n^*(S(x))$$

является C^2-диффеоморфизмом из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$ для любой функции $\rho \in C^{m,\alpha}(\Sigma^* \times [0,T])$ такой, что $\|\rho\|_0 \leqslant \dfrac{L_0}{4}$. При этом Y_ρ отображает $\Omega(t)$ в Ω^*, а $\Sigma(t)$ в Σ^*.

Рассмотрим теперь
$$v(y,t) = u((Y_\rho)^{-1}(y,t),t)$$
для $(y,t) \in \Omega^* \times [0,T]$. Тогда в новых переменных получим (см. также [5, 6, 11]):
$$\begin{cases} \mathcal{L}^\rho v(y,t) = F_0(y,t), & y \in \Omega^*, \\ v(y,t) = G(y,t), & y \in \Sigma^*, \end{cases} \tag{3}$$
где
$$\mathcal{L}^\rho v(y,t) = \sum_{k,l=1} (\nabla_x Y_\rho^k, A\nabla_x Y_\rho^l) \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l} + \sum_m \operatorname{div}_x(a_{ij}^1(\nabla_x Y_\rho^m)) \frac{\partial v}{\partial y_m} + \sum_m b_m \left(\nabla v, \frac{\partial Y_\rho}{\partial x_m}\right)$$
и
$$F_0(y,t) = f(Y_\rho^{-1}(y,t),t), \qquad G_0(y,t) = g(Y_\rho^{-1}(y,t),t).$$
И наконец,
$$a_{ij}^1(y,t) = a_{ij}(Y_\rho^{-1}(y,t)).$$

Рассмотрим теперь, как преобразуется уравнение (3). Если граница задана уравнением $H(x_1,x_2,x_3,t) = 0$, то его можно переписать в виде
$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \left(\nabla H, \frac{\partial x}{\partial t}\right) = 0.$$
Разделив это уравнение на $\|\nabla H\|$, получим
$$-\frac{\dfrac{\partial H}{\partial t}}{\|\nabla H\|} = \left(\frac{\nabla H}{\|\nabla H\|}, \frac{\partial x}{\partial t}\right) = \left(n, \frac{\partial x}{\partial t}\right) = v_n.$$
В силу параметризации граница задается уравнением
$$H = x - \rho(s_1(x),\dots,s_{N-1}(x),t)n(s(x)) = 0;$$
отсюда
$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$
$$\|\nabla H\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_N}\right)^2}$$
и, так как
$$\frac{\partial \rho}{\partial x_k} = \frac{\partial \rho}{\partial s_1}\frac{\partial s_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial \rho}{\partial s_{N-1}}\frac{\partial s_{N-1}}{\partial x_k},$$
окончательно получаем
$$v_n = \frac{\partial_t \rho}{\sqrt{1 + \left\| \sum\limits_{k=1}^{N-1} \partial_{s_k}\rho \nabla_x s_k \right\|^2}}.$$

Далее, согласно приведенной выше замене переменных, внешняя нормальная производная u принимает вид
$$\partial_n u(x,t) = \left(\sqrt{1 + \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \partial_{s_k}\rho \nabla_x s_k \right\|^2}\right) (\partial_n v(Y_\rho(x,t),t)).$$
Согласно уравнению (3), $v_N = -\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)$, поэтому получаем
$$-\frac{\partial_t \rho}{\sqrt{1 + \left\| \sum\limits_{k=1}^{N-1} \partial_{s_k}\rho \nabla_x s_k \right\|^2}} = \left(\sqrt{1 + \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \partial_{s_k}\rho \nabla_x s_k \right\|^2}\right) (\partial_n v(Y_\rho(x,t),t)).$$

Окончательно уравнение (3) перепишется в виде

$$\partial_t \rho + \mathcal{H}^\rho \partial_n v = 0, \qquad (y,t) \in \Sigma^* \times [0,T],$$

где

$$\mathcal{H}^\rho = 1 + \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \partial_{s_k} \rho \nabla_x s_k \right\|^2.$$

Итак, переформулируем задачу (1) следующим образом: положим

$$E = \{\rho \in C^{m,\alpha}([0,T] \times \Sigma^*) : \rho(0) = \rho_0, \ \|\rho - \rho_0\|_{m+\alpha, m-1+\alpha} \leqslant \varepsilon\},$$

где ε — положительная константа, много меньшая единицы, которая будет уточнена позднее.

Мы помним, что должно выполняться неравенство

$$\|\rho\|_{0,0} \leqslant \|\rho_0\|_0 + \|\rho - \rho_0\|_{0,m+\alpha-1} T < \frac{L_0}{4}$$

для достаточно малого T, чтобы граница Σ^ρ была параметризована. Положим

$$F = \{u \in C^{m,\alpha}([0,T] \times \Omega^*) : \|u\|_{m+\alpha, m-1+\alpha} \leqslant C_F(\|f\|_{m,\alpha} + \|g\|_{m,\alpha})\},$$

где $C_F > 1$ — константа, которая также будет уточнена позднее.

Итак, сформулируем окончательно поставленную задачу: для любой пары (v, ρ), заданной в $E \times F$, найти пару $(w,h) \in E \times F$ — решение задачи (см. также [7]):

$$Aw = Av - \mathcal{L}_{(\rho,h)} v + F_0(y,t) = -(\nabla v, \operatorname{div}_x(a^1_{ij}(\nabla_x Y_h))) + F_0(y,t) + B^{(\rho,h)} v, \quad y \in \Omega^*, \tag{4}$$

$$w(y,t) = g(y,t) + \frac{\partial g}{\partial n}(y,t)\zeta h + r(\rho), \quad y \in \Sigma^*, \tag{5}$$

$$\partial_t h + \mathcal{H}^\rho(\partial_n v) = 0, \quad h(0) = \rho_0, \tag{6}$$

где

$$B^{(\rho,h)} v = (A - A^{(\rho,h)} v) = Av - \sum_{k,l=1}^N (\nabla_x Y^k_\rho, A \nabla_x Y^l_h) \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l} - \sum_m b_m \left(\nabla v, \frac{\partial Y_h}{\partial x_m}\right)$$

и $r(\rho)$ — остаток в формуле Тейлора, примененной к $g(y + \zeta \rho n)$.

Таким образом, имеем отображение $\mathcal{F} : (W,h) = \mathcal{F}(v,\rho)$. Докажем далее, что $\mathcal{F}$ хорошо определено из $E \times F$ в $E \times F$ и обладает сжимающим свойством для достаточно малого T, а значит, имеет единственную неподвижную точку. Тем самым будет доказана локальная разрешимость начальной задачи.

3. Пример. Замена переменных и параметризация границы в случае задачи (2)

Пусть $\Omega(t)$ — переменная область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная неподвижной плоскостью $x_3 = -1$ и поверхностью $\Sigma(t) : x_3 = \rho(x_1, x_2, t)$. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,t), & x \in \Omega(t), \\ u = g(x,t), & x \in \partial\Omega(t), \\ v_n = -\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right), & x \in \Sigma(t). \end{cases} \tag{7}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3 - \zeta\rho, \end{cases}$$

где $\zeta = \zeta(x_3 - \rho(x_1, x_2, t))$ — «срезающая» функция, т.е.

$$\zeta(z) = \begin{cases} 1, & -\dfrac{1}{3} \leqslant z \leqslant 0, \\ 0, & z \leqslant -\dfrac{2}{3}, \end{cases}$$

гладкая при $-\dfrac{2}{3} \leqslant z \leqslant -\dfrac{1}{3}$.

Легко видеть, что в результате такой замены переменная область $\Omega(t)$ перейдет в постоянную полосу Ω^*, ограниченную плоскостями $y_3 = -1$ и $y_3 = 0$. Согласно введенным обозначениям,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = Y_\rho(x) = \begin{pmatrix} Y_\rho^1 \\ Y_\rho^2 \\ Y_\rho^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - \zeta\rho \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial Y_\rho^1(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial Y_\rho^2(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial y_3}\frac{\partial Y_\rho^3(x)}{\partial x_i},$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}, \frac{\partial v}{\partial y_2}, \frac{\partial v}{\partial y_3}\right) \nabla Y_\rho(x),$$

в нашем случае имеем

$$\nabla Y_\rho(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Y_\rho^1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial Y_\rho^1(x)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial Y_\rho^1(x)}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial Y_\rho^2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial Y_\rho^2(x)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial Y_\rho^2(x)}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial Y_\rho^3(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial Y_\rho^3(x)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial Y_\rho^3(x)}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{\partial(\zeta\rho)}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial(\zeta\rho)}{\partial x_2} & 1 - \rho\dfrac{\partial\zeta}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial v}{\partial y_3}\left(-\frac{\partial(\zeta\rho)}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial v}{\partial y_3}\left(-\frac{\partial(\zeta\rho)}{\partial x_2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\partial v}{\partial y_3}\left(1 - \rho\frac{\partial\zeta}{\partial x_3}\right).$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial Y_\rho^1(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial Y_\rho^2(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial y_3}\frac{\partial Y_\rho^3(x)}{\partial x_i}\right) =$$
$$= \sum_k \frac{\partial v}{\partial y_k}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 Y_\rho^k(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k,l}\frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}\sum_{i,j}\frac{\partial Y_\rho^k(x)}{\partial x_i}\frac{\partial Y_\rho^l(x)}{\partial x_j}$$

действие оператора A превращается в

$$Av = \sum_k \frac{\partial v}{\partial y_k}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 Y_\rho^k(x)}{\partial x_i \partial x_j}a_{ij} + \sum_{k,l}\frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}\sum_{i,j}\frac{\partial Y_\rho^k(x)}{\partial x_i}\frac{\partial Y_\rho^l(x)}{\partial x_j}a_{ij}.$$

Обозначим первое слагаемое в правой части этого равенства через I_1, а второе — через I_2. В соответствии с заменой

$$Y_\rho(x) = \begin{pmatrix} Y_\rho^1 \\ Y_\rho^2 \\ Y_\rho^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - \zeta\rho \end{pmatrix}$$

имеем

$$\frac{\partial Y_\rho^1(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial Y_\rho^2(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial Y_\rho^3(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1^2} & -\dfrac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1 \partial x_2} & -\dfrac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ -\dfrac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1 \partial x_2} & -\dfrac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_2^2} & -\dfrac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -\dfrac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1 \partial x_3} & -\dfrac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_2 \partial x_3} & -\dfrac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}.$$

Запишем подробнее производные от $\zeta = \zeta(x_3 - \rho(x_1, x_2, t))$ и от $\zeta\rho$:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = \zeta'\left(-\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = \zeta'\left(-\frac{\partial \rho}{\partial x_2}\right),$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_3} = \zeta'.$$

По правилу Лейбница имеем

$$\frac{\partial(\zeta\rho)}{\partial x_1} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\rho + \zeta\frac{\partial \rho}{\partial x_1} = \zeta'\left(-\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right)\rho + \zeta\frac{\partial \rho}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial(\zeta\rho)}{\partial x_2} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}\rho + \zeta\frac{\partial \rho}{\partial x_2} = \zeta'\left(-\frac{\partial \rho}{\partial x_2}\right)\rho + \zeta\frac{\partial \rho}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial(\zeta\rho)}{\partial x_3} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_3}\rho = \zeta'\rho,$$

$$\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1^2} = \zeta''\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right)^2\rho - \zeta'\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2}\rho - \zeta'\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right)^2 - \zeta'\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right)^2 + \zeta\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} =$$
$$= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right)^2(\zeta''\rho - 2\zeta') - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2}(\zeta'\rho - \zeta),$$

$$\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1 \partial x_2} = \zeta''\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_2}\right)\rho - \zeta'\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1 \partial x_2}\rho -$$
$$-\zeta'\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_2}\right) - \zeta'\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_2}\right) + \zeta\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1 \partial x_2} =$$
$$= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_2}\right)(\zeta''\rho - 2\zeta') - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1 \partial x_2}(\zeta'\rho - \zeta),$$

$$\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_2^2} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_2}\right)^2(\zeta''\rho - 2\zeta') - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_2^2}(\zeta'\rho - \zeta),$$

$$\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1 \partial x_3} = \zeta''\left(-\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right)\rho + \zeta'\frac{\partial \rho}{\partial x_1} = \frac{\partial \rho}{\partial x_1}(\zeta' - \zeta''\rho),$$

$$\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_2 \partial x_3} = \zeta''\left(-\frac{\partial \rho}{\partial x_2}\right)\rho + \zeta'\frac{\partial \rho}{\partial x_2} = \frac{\partial \rho}{\partial x_2}(\zeta' - \zeta''\rho),$$

$$\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_3^2}=\zeta''\rho.$$

Таким образом, получаем

$$I_1=\frac{\partial v}{\partial y_1}\times 0+\frac{\partial v}{\partial y_2}\times 0+\frac{\partial v}{\partial y_3}\times\left(\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_3^2}\right)=$$
$$=-\frac{\partial v}{\partial y_3}\left((\zeta''\rho-2\zeta')\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right)^2\right)-(\zeta'\rho-\zeta)\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2}\right)+\zeta''\rho\right),$$

$$I_2=\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\times 1+\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_2}\times 0+\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_3}\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2 v}{\partial y_2\partial y_1}\times 0+\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\times 1+\frac{\partial^2 v}{\partial y_2\partial y_3}\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2 v}{\partial y_3\partial y_1}\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right)+\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2 v}{\partial y_3^2}\left(\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right)^2+\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right)^2+(1-\rho\zeta')^2\right).$$

Отсюда

$$\mathcal{L}^\rho v=\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_3}\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right)+2\frac{\partial^2 v}{\partial y_2\partial y_3}\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2 v}{\partial y_3^2}\left(\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right)^2+\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right)^2+(1-\rho\zeta')^2\right)-$$
$$-\frac{\partial v}{\partial y_3}\left((\zeta''\rho-2\zeta')\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right)^2\right)-(\zeta'\rho-\zeta)\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2}\right)+\zeta''\rho\right).$$

Согласно приведенным выше рассуждениям о преобразовании уравнения (3), исследуемое уравнение (с учетом того, что $s_1=x_1$ и $s_2=x_2$) принимает вид

$$\partial_t\rho+\mathcal{H}^\rho\partial_n v=0,$$

где

$$\mathcal{H}^\rho=1+\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right)^2.$$

Таким образом, в случае задачи (2) система уравнений (4)–(6) будет иметь вид:

$$\Delta w=\frac{\partial v}{\partial y_3}\left((\zeta''h-2\zeta')\left(\left(\frac{\partial h}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y_2}\right)^2\right)-(\zeta'h-\zeta)\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y_2^2}\right)+\zeta''h\right)+F_0(y,t)+$$
$$+\Delta v-\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_3}\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial y_1}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial y_1}\right)-\frac{\partial^2 v}{\partial y_3\partial y_1}\left(\zeta'\frac{\partial h}{\partial y_1}h-\zeta\frac{\partial h}{\partial y_1}\right)-$$
$$-\frac{\partial^2 v}{\partial y_2\partial y_3}\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial y_2}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial y_2}\right)-\frac{\partial^2 v}{\partial y_3\partial y_2}\left(\zeta'\frac{\partial h}{\partial y_2}h-\zeta\frac{\partial h}{\partial y_2}\right)-$$
$$-\frac{\partial^2 v}{\partial y_3^2}\left(\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial y_1}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial y_1}\right)\left(\zeta'\frac{\partial h}{\partial y_1}\rho-\zeta\frac{\partial h}{\partial y_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial y_2}\rho-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial y_2}\right)\left(\zeta'\frac{\partial h}{\partial y_2}\rho-\zeta\frac{\partial h}{\partial y_2}\right)+(1-\rho\zeta')(1-h\zeta')\right),\quad y\in\Omega^*,$$

$$w=g(y,t)+\frac{\partial g}{\partial y_3}\zeta h+r(\rho),\quad y\in\Sigma^*,$$

$$\partial_t h + \left(1 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y_2}\right)^2\right)\frac{\partial v}{\partial y_3} = 0, \quad h(0) = \rho_0.$$

4. Оценка w через h

Выпишем отдельно уравнения (4) и (5):

$$Aw = -(\nabla v, \operatorname{div}_x(a^1_{ij}(\nabla_x Y_h))) + F_0(y,t) + B^{(\rho,h)}v, \quad y \in \Omega^*, \tag{8}$$

$$w(y,t) = g(y,t) + \frac{\partial g}{\partial n}(y,t)\zeta h + r(\rho), \quad y \in \Sigma^*, \tag{9}$$

где

$$B^{(\rho,h)}v = (A - A^{(\rho,h)}v) = Av - \sum_{k,l=1}^{N}(\nabla_x Y^k_\rho, A\nabla_x Y^l_h)\frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l} - \sum_m b_m\left(\nabla v, \frac{\partial Y_h}{\partial x_m}\right)$$

и $r(\rho)$ — остаток в формуле Тейлора, примененной к $g(y + \zeta\rho n, t)$. Обозначим для простоты

$$R_0 = -(\nabla v, \operatorname{div}_x(a^1_{ij}(\nabla_x Y_h))) + F_0(y,t) + B^{(\rho,h)}v$$

и

$$J_0 = g(y,t) + \frac{\partial g}{\partial n}(y,t)\zeta h + r(\rho).$$

Далее будем писать просто Ω и Σ вместо Ω^* и Σ^*. Напомним, что

$$E = \{\rho \in C^{m,\alpha}([0,T] \times \Sigma) : \rho(0) = \rho_0, \ \|\rho - \rho_0\|_{m+\alpha, m-1+\alpha} \leqslant \varepsilon\}$$

и

$$F = \{u \in C^{m,\alpha}([0,T] \times \Omega) : \|u\|_{m+\alpha,m-1+\alpha} \leqslant C_F(\|f\|_{m,\alpha} + \|g\|_{m,\alpha})\}.$$

Тогда, в силу того, что $(v,\rho) \in E \times F$, имеем

$$R_0 = C^{m,\alpha}([0,T], C^{m-2,\alpha}(\Omega))$$

и

$$J_0 = C^{m,\alpha}([0,T] \times \Sigma).$$

Эллиптичность A дает следующую оценку:

$$\|w\|_{m+\alpha,0} \leqslant C(\|R_0\|_{m-2+\alpha,0} + \|J_0\|_{m+\alpha,0}).$$

Для того чтобы получить пространственно-временную оценку на w, докажем вспомогательную лемму.

Лемма. *Пусть* $R_0 = C^{m,\alpha}([0,T], C^{m-2,\alpha}(\Omega))$, $J_0 = C^{m,\alpha}([0,T] \times \Sigma)$, $v \in F$, $\rho \in E$ *и* w — *решение задачи* (8)–(9). *Имеют место следующие оценки*:

$$\|w\|_{m,\alpha} \leqslant C_1(\|v\|_{m,\alpha}, \|\rho\|_{m,\alpha})\|h\|_{m,\alpha} + C_2$$

и

$$\|w\|_{m+\alpha,m-1+\alpha} \leqslant C_1\|h\|_{m+\alpha,m-1+\alpha} + C_2.$$

Доказательство. Согласно условиям леммы, h, ρ и v являются $C^{m+\alpha}$-функциями по времени, а следовательно, R_0 — по меньшей мере C^m-функция по времени. Значит, можно продифференцировать по времени уравнения (8) и (9). Положим $\omega = \partial^m_t w$. Тогда

$$A\omega = \partial^m_t R_0, \quad y \in \Omega,$$
$$\omega = \partial^m_t J_0, \quad y \in \partial\Omega.$$

Теперь эллиптичность дает следующую оценку:

$$\|\partial^m_t w\|_{m+\alpha,0} \leqslant C(\|\partial^m_t R_0\|_{m-2+\alpha,0} + \|\partial^m_t J_0\|_{m+\alpha,0}).$$

Имеем

$$w \in C^m([0,T], C^{m+\alpha}(\Omega)).$$

Докажем теперь, что $\partial_t^m w \in C^\alpha([0,T], C^{m+\alpha}(\Omega))$. Оценим для t_1 и t_2 следующую величину:

$$\|\partial_t^m w(t_1,\cdot) - \partial_t^m w(t_2,\cdot)\|_{m+\alpha}.$$

В силу уравнений

$$A(\partial_t^m w(t_1,\cdot) - \partial_t^m w(t_2,\cdot)) = \partial_t^m R_0(t_1,\cdot) - \partial_t^m R_0(t_2,\cdot),$$

$$\partial_t^m w(t_1,\cdot) - \partial_t^m w(t_2,\cdot) = \partial_t^m J_0(t_1,\cdot) - \partial_t^m J_0(t_2,\cdot)$$

и условия эллиптичности, имеем

$$\|\partial_t^m w(t_1,\cdot) - \partial_t^m w(t_2,\cdot)\|_{m+\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant C(\|\partial_t^m R_0(t_1) - \partial_t^m R_0(t_2)\|_{m-2+\alpha} + \|\partial_t^m J_0(t_1) - \partial_t^m J_0(t_2)\|_{m+\alpha}).$$

В силу того, что R_0 и J_0 — $C^{m+\alpha}$-функции по времени, можно написать:

$$\|\partial_t^m R_0(t_1) - \partial_t^m R_0(t_2)\|_{m-2+\alpha} \leqslant C_1|t_1 - t_2|^\alpha$$

и

$$\|\partial_t^m J_0(t_1) - \partial_t^m J_0(t_2)\|_{m+\alpha} \leqslant C_2|t_1 - t_2|^\alpha.$$

Теперь введем h в оценку для w. Имеем

$$R_0 = -(\nabla v, \operatorname{div}_x(a_{ij}^1(\nabla_x Y_h))) + F_0(y,t) + B^{(\rho,h)}v$$

и

$$J_0 = g(y,t) + \frac{\partial g}{\partial n}(y,t)\zeta h + r(\rho).$$

Отсюда

$$\|R_0\|_{m-2+\alpha,m+\alpha} \leqslant (\|v\|_{m+\alpha,m+\alpha}\|A\|)\|h\|_{m+\alpha} + \|F_0\|_{m+\alpha,m+\alpha} + \|B^{h,\rho}v\|$$

и

$$\|J_0\|_{m+\alpha,m+\alpha} < \|g\| + (\|h\|\,\|\nabla g\|) + C.$$

Поскольку

$$B^{(\rho,h)}v = Av - \sum_{k,l=1}^N (\nabla_x Y_\rho^k, A\nabla_x Y_h^l)\frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l} - \sum_m b_m\left(\nabla v, \frac{\partial Y_h}{\partial x_m}\right),$$

имеем

$$\|B^{h,\rho}v\| \leqslant (\|A\|\,\|\rho\|\,\|v\|)\|h\|_{m+\alpha,m+\alpha}.$$

Таким образом, получаем следующую оценку на w:

$$\|w\|_{m+\alpha} \leqslant C_1(v,\rho)\|h\|_{m+\alpha} + C_2(f,g),$$

где $C_1(v,\rho)$ зависит только от $\|\rho\|_{m+\alpha}$ и $\|v\|_{m+\alpha}$, а $C_2(f,g)$ зависит от $\|f\|_{m+\alpha}$ и $\|g\|_{m+\alpha}$. Таким образом, мы доказали, что w является $C^{m+\alpha,m+\alpha}$-функцией. Простой подсчет приводит к оценке

$$\|w\|_{m+\alpha,m-1+\alpha} \leqslant C_1(v,\rho)\|h\|_{m+\alpha,m-1+\alpha} + C_2(f,g),$$

где C_1 теперь зависит от $\|\rho\|_{m+\alpha,m-1+\alpha}$. В силу того, что $v \in F$ и $\rho \in E$, величина C_1 ограничена некоторой константой. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
2. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана// Успехи мат. наук. — 1985. — *40*, № 5(245). — С. 133–185.
3. *Елтышева Н.А.* О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости// Мат. сб. — 1988. — *132*, № 2. — С. 186–209.
4. *Лаврентьев М. М. (мл.), Люлько Н.А.* Повышение гладкости решений некоторых гиперболических задач// Сиб. мат. ж. — 1997. — *38*, № 1. — С. 109–124.
5. *Карташов Э. М.* Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами// Изв. РАН. Сер. Энергетика. — 1999. — № 5. — С. 3–34.
6. *Соболев С. Л.* Локально неравновесные модели процессов переноса// Успехи физ. наук. — 1997. — *167*, № 10. — С. 1095–1106.
7. *Тахиров Ж. О.* Двухфазная задача с неизвестными границами для гиперболической системы уравнений первого порядка// Узб. мат. ж. — 1991. — № 6. — С. 48–56.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
9. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990.
10. *Slemrod M.* Dynamics of measure valued solutions to a backward forward parabolic equation// J. Dyn. Differ. Equat. — 1991. — *2*. — С. 1–28.
11. *Solomon A. D., Alexiades V., Wilson D. G., Drake S.* On the formulation of hyperbolic Stefan problem// Quar. Appl. Math. — 1985. — *43*, № 3. — С. 295–304.

Н. Ю. Селиванова
ВИНИТИ РАН, Москва, Россия
E-mail: math@viniti.ru

М. В. Шамолин
Московский Государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Институт механики, Москва, Россия
E-mail: shamolin@imec.msu.ru