СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СРЕДОЙ, ПРИ УЧЕТЕ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
Российская Федерация
119899, Москва, Мичуринский пр., д. 1
E-mail: shamolin@imec.msu.ru, shamolin@ramber.ru

CASES OF INTEGRABILITY IN SPATIAL DYNAMICS OF A RIGID BODY INTERACTING WITH A MEDIUM UNDER ASSUMPTION OF LINEAR DAMPING

M. V. Shamolin (Institute of Mechanics at MSU named by M. V. Lomonosov, 119899, Moscow, Michurinskii Ave., 1)

Keywords: rigid body, resisting medium, integrability, transcendental first integral

Данные результаты появились благодаря исследованию некоторой пространственной задачи о движении твердого тела в среде с сопротивлением, в которой пришлось столкнуться с нахождением первых интегралов динамической части уравнений движения, обладающими исключительными свойствами. Такие интегралы выражались через конечную комбинацию элементарных функций, несмотря на наличие в фазовом пространстве системы отталкивающих и притягивающих предельных множеств. В работе предъявляются новые случаи интегрируемости в задаче о пространственном движении твердого тела при наличии неконсервативного момента сил. При этом, в отличие от некоторых предыдущих работ, при построении неконсервативного силового поля воздействия среды на тело учитывается линейная зависимость данного поля от угловой скорости, несмотря на то, что само ее введение в компоненты такого поля априори не очевидно.

1. Сила воздействия среды. Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела массы m с передним круглым торцом (диском, кавитатором) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [1–6]. Пусть (v,α,β) — сферические координаты скорости центра D диска, $\{\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z\}$ — компоненты угловой скорости тела, I_1, I_2, I_2 — главные моменты инерции в системе координат, связанной с телом (ось Dx совпадает с осью симметрии, оси Dy, Dz — в плоскости диска, рис. 1). Воздействие среды на тело моделируется приложенной в точке N диска нормальной к нему силой $\boldsymbol{S}$, проекция которой со знаком представляется в виде $S = s(\alpha)v^2$, $v = |v_D|$ (ср. с [1–3]).

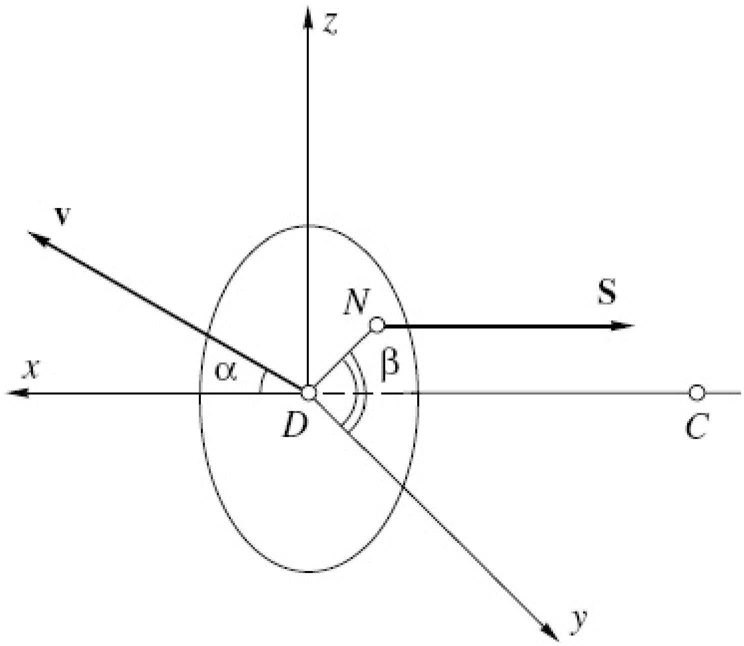

Рис. 1

Одним из ключевых вопросов моделирования воздействия среды на тело является запись координат (y_N, z_N) точки N в системе $Dxyz$ как функций, прежде всего, угла атаки α, а также, возможно, других переменных (прежде всего компонент угловой скорости). Что касается введения данной зависимости от угловой скорости, то она будет использоваться линейная, при этом для того, чтобы построенный момент имел диссипативный характер, выберем функции y_N, z_N ($x_N \equiv 0$) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} = Q - \frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где Q – вектор-функция, не зависящая от угловой скорости, $h = h_x = h_y > 0$ (по причине осевой симметрии тела), $h_z > 0$. При этом следует учесть, что если (v, α, β) – сферические координаты в $\mathbf{R}^3$, то (ср. с [4–6])

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ R(\alpha)\cos\beta \\ R(\alpha)\sin\beta \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Для описания воздействия среды на тело используется пара динамических функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. Явный вид даже для кавитаторов простой формы аналитически описать довольно затруднительно. По этой причине и используется прием «погружения» данной задачи в более широкий класс задач, учитывающий лишь качественные свойства функций $(R(\alpha), s(\alpha))$ (см. также [1–3]).

Опорным для нас является результат С. А. Чаплыгина, который для плоскопараллельного струйного обтекания бесконечной пластины получил функции $y(\alpha)$, $s(\alpha)$ аналитически [1, 2]:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha,\ A > 0,\ s(\alpha) = B\cos\alpha,\ B > 0. \tag{3}$$

2. Наличие следящей силы и динамические уравнения. Будем рассматривать более общую задачу о движении тела, а именно, при наличии некоторой дополнительной следящей силы ***T***, проходящей через ось симметрии и обеспечивающей во все время движения постоянство скорости центра масс (***T*** = –***S***). Тогда, при некоторых условиях в случае функций типа Чаплыгина воздействия среды на тело динамическая часть уравнений движения приводится к системе, в которой произойдет отделение независимой подсистемы более низкого порядка.

Действительно, во-первых, выбор фазовых переменных позволяет рассматривать систему динамических уравнений шестого порядка в качестве независимой. Во-вторых, сохраняется компонента продольной составляющей угловой скорости: $\Omega_x = \Omega_{x0} = \mathrm{const}$. Ограничимся далее движением тела без собственного вращения, т.е. когда $\Omega_{x0} = 0$.

Введем следующие обозначения, безразмерные параметры и дифференцирование:

$$z_1 = \Omega_y\cos\beta + \Omega_z\sin\beta,\ z_2 = -\Omega_y\sin\beta + \Omega_z\cos\beta,\ n_0^2 = AB/I_2,$$

$$z_i = Z_i v n_0,\ i = 1, 2,\ \alpha^\bullet = \alpha' v n_0,\ \beta^\bullet = \beta' v n_0,\ v^\bullet = v' v n_0, \tag{4}$$

$$b = \sigma n_0,\ H_1 = hB/I_2 n_0,$$

$[b] = [H_1] = [Z_i] = 1$. Тогда динамическая часть уравнений движения благодаря (1)–(4) преобразуется к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{5}$$

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1Z_2\cos^2\alpha,$$

$$\begin{aligned} Z_2' = {} & \sin\alpha\cos\alpha + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ & + bH_1Z_2^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_2\cos\alpha, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} Z_1' = {} & bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + (1 + bH_1)Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ & + bH_1Z_1Z_2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_1\cos\alpha, \end{aligned}$$

$$\beta' = (1 + bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{7}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1 Z_2 \sin\alpha\cos\alpha.$$

3. Полный список первых интегралов. Поскольку мы рассматриваем такой класс движений тела, при котором постоянна величина скорости центра масс, то система (5)–(7) пятого порядка имеет аналитический первый интеграл следующего вида:

$$v^2(1 - 2bZ_2\sin\alpha + b^2(Z_1^2 + Z_2^2)) = V_{C0}^2. \tag{8}$$

Видно, что соотношение (8) позволяет рассматривать вопросы интегрируемости в элементарных функциях системы (6), (7) уже четвертого порядка, в котором выделилась система третьего порядка (6).

Применяя часто используемую подстановку $\tau = \sin\alpha$, систему (6) можно привести к следующей системе с алгебраическими правыми частями:

$$\begin{aligned}
\frac{dZ_2}{d\tau} &= \frac{\tau + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_2\tau^2 - (1 + bH_1)Z_1^2/\tau - H_1 Z_2 + bH_1 Z_2^2\tau}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) + b\tau(1 - \tau^2) - bH_1 Z_2(1 - \tau^2)},\\
\frac{dZ_1}{d\tau} &= \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_1\tau^2 + (1 + bH_1)Z_1 Z_2/\tau - H_1 Z_1 + bH_1 Z_1 Z_2\tau}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) + b\tau(1 - \tau^2) - bH_1 Z_2(1 - \tau^2)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Произведем переход к однородным координатам u_k, $k = 1, 2$, по формулам $Z_k = u_k\tau$. Тогда система (9) приведется к виду

$$\begin{cases}
\tau\dfrac{du_2}{d\tau} = \dfrac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)},\\
\tau\dfrac{du_1}{d\tau} = \dfrac{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}.
\end{cases} \tag{10}$$

Системе (10) можно формально сопоставить уравнение первого порядка (разделив одно уравнение на другое), которое интегрируется в элементарных функциях и позволяет получить явный вид трансцендентного первого интеграла исследуемой системы:

$$\frac{(1 + bH_1)u_1^2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}. \tag{11}$$

или в переменных (Z_1, Z_2, α)

$$\frac{(1 + bH_1)Z_1^2 + (1 + bH_1)Z_2^2 - (b + H_1)Z_2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{Z_1\sin\alpha} = C_1' = \text{const}. \tag{12}$$

Теперь, пользуясь найденным первым интегралом (12) (или (11)), перепишем первое уравнение системы (10) в следующем виде:

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1+(1+bH_1)u_2^2-(b+H_1)u_2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}{-u_2+b(1-\tau^2)+b\tau^2(U_1^2(C_1,u_2)+u_2^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}, \tag{13}$$

$$U_1(C_1,u_2)=\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(1+bH_1)(1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2)}\}/2,$$

или в виде уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2}=\frac{(b-u_2-bH_1u_2)\tau-b\tau^3(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2-H_1u_2)}{1+(1+bH_1)u_2^2-(b+H_1)u_2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}. \tag{14}$$

Уравнение (14) (при помощи (13)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2}=\frac{2((1+bH_1)u_2-b)p+2b(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2-H_1u_2)}{1+(1+bH_1)u_2^2-(b+H_1)u_2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)},\ p=\frac{1}{\tau^2}. \tag{15}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию элементарных иррациональных функций). При этом общее решение уравнения (15) зависит от произвольной постоянной C_2:

$$G_1\left(\frac{Z_1}{\sin\alpha},\frac{Z_2}{\sin\alpha},Z_1,Z_2,b,H_1,C_1\right)=C_2=\text{const}. \tag{16}$$

Поиск полного набора первых интегралов системы (6) закончен. Для поиска последнего дополнительного первого интеграла системы (6), (7) (т.е. интеграла, привязывающего уравнение (7) на угол β) заметим, что, поскольку

$$\frac{d\beta}{d\tau}=\frac{(1+bH_1)Z_1/\tau}{-Z_2+b\tau(Z_1^2+Z_2^2)+b\tau(1-\tau^2)-bH_1(1-\tau^2)},$$

то к равенству

$$\frac{d\beta}{d\tau}=\frac{(1+bH_1)u_1}{-u_2\tau+b\tau^3(u_1^2+u_2^2)+b\tau(1-\tau^2)-bH_1\tau u_2(1-\tau^2)}, \tag{17}$$

добавим также равенство

$$\tau\frac{du_1}{d\tau}=\frac{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}, \tag{18}$$

взятое из системы (10).

Полученная система (17), (18) позволяет выписать уравнение для получения искомого интеграла:

$$\frac{du_1}{d\beta}=2u_2-\frac{b+H_1}{1+bH_1},$$

которое легко интегрируется и в координатах (Z_1, Z_2, α) приводится к виду

$$\cos^2[2(\beta+C_3)]=G_2\left(\frac{Z_1}{\sin\alpha},\frac{Z_2}{\sin\alpha},Z_1,Z_2,b,H_1,C_1\right). \tag{19}$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Система (5)–(7) обладает полным набором инвариантных соотношений: аналитическим соотношением (8) и тремя первыми интегралами (12), (16), (19), которые являются элементарными трансцендентными функциями своих фазовых переменных.*

Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция после формального продолжения в комплексную область имеет существенно особые точки.

О других похожих случаях полной интегрируемости уравнений пространственного движения твердого тела, взаимодействующего со средой при дополнительном наличии следящей силы, а также об исследовании обобщенных уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил см. [7–9].

4. Механическая и топологическая аналогия. Уравнения движения сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды, имеют вид:

$$\theta^{\bullet\bullet}+(\beta-H_1)\theta^{\bullet}\cos\theta+\beta\sin\theta\cos\theta-\psi^{\bullet 2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=0, \tag{20}$$

$$\psi^{\bullet\bullet}+(\beta-H_1)\psi^{\bullet}\cos\theta+\theta^{\bullet}\psi^{\bullet}\left[\frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\right]=0. \tag{21}$$

Здесь β, H_1 — безразмерные физические постоянные, θ,ψ – углы, определяющие положение маятника, причем коэффициент H_1 по-прежнему пропорционален вращательным производным момента гидроаэродинамических сил по компонентам угловой скорости пространственного маятника. При этом угол атаки α для свободного тела эквивалентен углу θ отклонения маятника от вектора скорости потока, а угол β – углу ψ.

Теорема 2. *Система третьего порядка (20), (21) траекторно эквивалентна сис-*

теме (6).

Как следствие, можно заметить, что система (20), (21) обладает полным списком (а именно, двумя) аналогичных трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

1. Чаплыгин С.А. Избранные труды. М.: Наука, 1976. 495 с.
2. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133–135.
3. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 1989. – № 3. – С. 51–54.
4. Шамолин М.В. Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. – 1997. – № 2. – С. 65–68.
5. Шамолин М.В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН. – 1999. – Т. 364. – № 5. – С. 627–629.
6. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14. — Вып. 3. — С. 3–237.
7. Шамолин М.В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Успехи мат. наук. – Т. 65. – Вып. 1, 2010. – С. 189–190.
8. Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. – 2000. – Т. 375. – № 3. – С. 343–346.
9. Шамолин М.В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4)\times\mathbf{R}^4$ // Успехи мат. наук. – Т. 60. – Вып. 6, 2005. – С. 233–234.