ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2012, том 444, № 5, с. 506–509

МЕХАНИКА

УДК 531.01+531.552

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

© 2012 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком В.В. Козловым 05.03.2012 г.

Поступило 07.03.2012 г.

При изучении динамики многомерного твердого тела многое зависит от структуры силового поля. Для нас опорными результатами такого изучения явились структуры уравнений движения двумерных и трехмерных твердых тел в неконсервативном поле сил сопротивления среды. При этом стало возможным обобщение динамической части уравнений на случай движения четырехмерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного списка первых интегралов. Полученные результаты важны с той точки зрения, что в системе присутствует неконсервативный момент, поскольку в работах других авторов в основном использовалось потенциальное поле сил.

Ранее в [1, 2] автором была показана интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде при некоторых условиях, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле комплексного анализа) функцией квазискоростей. При этом все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности, которая имеет форму (одномерной) пластины. Позднее [2, 3] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной работе исследуется динамическая часть уравнений движения динамически симметричного четырехмерного твердого тела, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму трехмерного шара. При этом тензор угловой скорости движения такого тела шестимерен, а скорость центра масс четырехмерна. Структура таких уравнений движения в некотором смысле сохраняется при переносе на случаи большей размерности (ср. с [4]).

Научно-исследовательский институт механики
Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ НА АЛГЕБРЕ $so(4)$

Пусть четырехмерное твердое тело движется в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерную область евклидового пространства, и все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска. Расстояние от точки N приложения силы сопротивления до центра D диска является функцией, по крайней мере, одного параметра – угла α, который измеряется между скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_D$ точки D и срединным перпендикуляром к диску, опущенным из центра C масс тела, в четырехмерном пространстве (ср. с [2, 5, 6]).

Сила сопротивления ортогональна в четырехмерном пространстве к диску, и ее величина имеет вид $S = s_1(\alpha)v^2$, где $s_1 \geq 0$ – коэффициент сопротивления, $s_1(\alpha) = s(\alpha)\operatorname{sign}\cos\alpha$.

Свяжем с телом систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$, ось Dx_1 которой совпадает с осью CD, а оси Dx_2, Dx_3, Dx_4 лежат в гиперплоскости диска.

Если оператор инерции в системе $Dx_1x_2x_3x_4$ имеет диагональный вид $\operatorname{diag}\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$, Ω – тензор угловой скорости твердого тела, $\Omega \in so(4)$, то та часть уравнений движения тела, которая отвечает алгебре $so(4)$, имеет следующий вид [2, 4]:

$$\Omega^{\bullet}\Lambda + \Lambda\Omega^{\bullet} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M,$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$, ..., $\lambda_4 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + I_3 - I_4)$, M – момент "внешних сил", действующих на тело в $\mathbf{R}^4$, спроектированный на "естественные" координаты в алгебре Ли $so(4)$, $[\ldots]$ – коммутатор в $so(4)$. Элемент (матрицу) $\Omega \in so(4)$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ — компоненты “угловой скорости” в проекциях на естественные координаты в алгебре $so(4)$.

Если $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ — координаты точки N в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, $\{-S, 0, 0, 0\}$ — координаты вектора силы сопротивления в той же системе, то при вычислении момента силы сопротивления необходимо построить отображение

$$R^4 \times R^4 \to so(4),$$

переводящее пару векторов из R^4 в некоторый элемент из алгебры Ли $so(4)$. В проекциях на координаты в алгебре $so(4)$ момент силы сопротивления имеет следующий вид (ср. с [2, 5, 6]):

$$(0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S) \in R^6 \cong M \in so(4).$$

Здесь необходимо сделать важное замечание о введении зависимости функций координат точки N от тензора угловой скорости Ω. Зависимость будет использоваться линейная, при этом для того, чтобы момент имел диссипативный характер, выберем функции x_{2N}, x_{3N}, x_{4N} в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ x_{3N} \\ x_{4N} \end{pmatrix} = Q - \frac{1}{v}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix},$$

где Q — функции, не зависящие от тензора угловой скорости, $h_1, \ldots, h_4 > 0$ (ср. со случаями меньшей размерности [1—4]). При этом следует учесть, что если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — сферические координаты в $\mathbf{R}^4$, то

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ R(\alpha)\cos\beta_1 \\ R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ R(\alpha)\sin\beta_1\sin\beta_2 \end{pmatrix}.$$

Впрочем, данные зависимости можно вводить и в случае n-мерного твердого тела.

С учетом сказанного можно получить уравнения движения в рассмотренном поле силы сопротивления:

$$(\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0, \quad (1)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = 0, \quad (2)$$

$$(\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = x_{4N}S, \quad (3)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = 0, \quad (4)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = -x_{3N}S, \quad (5)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = x_{2N}S. \quad (6)$$

ДИНАМИКА В R^4

По аналогии с трехмерным случаем можно вывести формулы, аналогичные формулам Эйлера и Ривальса; т.е. скорости и ускорения любых двух точек A и B четырехмерного твердого тела в любой аффинной системе координат связаны соотношениями (ср. с [2])

$$v_B = v_A + \Omega AB, \quad w_B = w_A + \Omega^2 AB + \mathrm{E}AB, \quad (7)$$

где $\Omega \in so(4)$, $\mathrm{E} = \dot{\Omega} \in so(4)$. Матрица Е называется матрицей углового ускорения.

С помощью формул (1)—(7) можно получить полную динамическую часть системы уравнений движения четырехмерного твердого тела на $so(4) \times R^4$.

ДВИЖЕНИЕ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Рассмотрим такой класс движений тела, при котором во все время центр масс тела $\mathbf{V}_C$ движется прямолинейно и равномерно, т.е. выполнено условие (см. также [1, 2])

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{const}. \quad (8)$$

Для достижения этого предположим, что на тело действует некоторая (следящая) сила, обеспечивающая выполнение условия (8) (ср. с маломерными случаями [1—3]). Определенным выбором величины следящей силы вдоль прямой CD выполнение условия (8) может быть достигнуто [2].

СЛУЧАЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Пусть по аналогии с маломерными случаями выполнены равенства

$$I_2 = I_3 = I_4.$$

При этом существуют три циклических первых интеграла у уравнений (1)—(6): $\omega_1 = \omega_1^0$, $\omega_2 = \omega_2^0$, $\omega_4 = \omega_4^0$, которые рассмотрим на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \quad (9)$$

Для построения силового поля используется пара функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. По аналогии с маломерными случаями без ограничения общности [2] можно считать, что $R(\alpha) = A\sin\alpha$, $A > 0$, $s(\alpha) = B\cos\alpha$, $B > 0$ (функции Чаплыгина [7]).

В результате уравнения на “части” $so(4)$ примут следующий вид $\left(\text{здесь } n_0^2 = \dfrac{AB}{2I_2}\right)$:

$$\dot{\omega}_3 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \frac{h_1 B}{2I_2}\omega_3 v\cos\alpha,$$

$$\omega_5^{\bullet} = -n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \frac{h_1 B}{2I_2}\omega_5 v\cos\alpha,$$

$$\omega_6^{\bullet} = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1 - \frac{h_1 B}{2I_2}\omega_6 v\cos\alpha.$$

Если ввести естественную замену угловых скоростей по формулам

$$z_1 = \omega_3\cos\beta_2 + \omega_5\sin\beta_2,$$

$$z_2 = -\omega_3\sin\beta_2\cos\beta_1 + \omega_5\cos\beta_2\cos\beta_1 + \omega_6\sin\beta_1,$$

$$z_3 = \omega_3\sin\beta_2\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_2\sin\beta_1 + \omega_6\cos\beta_1,$$

то совместные уравнения движения на прямом произведении $so(4)\times R^4$ (после учета условий (8) и (9)) примут симметричный вид $\left(CD = \sigma,\ b = \sigma n_0,\ H_1 = \dfrac{h_1 B}{2I_2 n_0},\ [b] = [H_1] = 1\right)$:

$$v^{\bullet} = \sigma\cos\alpha[n_0^2 v^2\sin^2\alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)] - bH_1 v z_3\sin\alpha\cos\alpha; \tag{10}$$

$$\alpha^{\bullet} = -z_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha\cos^2\alpha + \frac{\sigma}{v}\sin\alpha(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - bH_1 z_3\cos^2\alpha,$$

$$z_3^{\bullet} = n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)(z_1^2 + z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 v z_3\cos\alpha,$$

$$z_2^{\bullet} = (1 + bH_1)z_2 z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1 + bH_1)z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - H_1 v z_2\cos\alpha, \tag{11}$$

$$z_1^{\bullet} = (1 + bH_1)z_1 z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1 + bH_1)z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - H_1 v z_1\cos\alpha,$$

$$\beta_1^{\bullet} = (1 + bH_1)z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\beta_2^{\bullet} = -(1 + bH_1)z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}. \tag{12}$$

От полной системы седьмого порядка (10)—(12) отделилась независимая подсистема (11), (12) шестого порядка, в которой, в свою очередь, существует независимая подсистема пятого порядка (11). Для полного интегрирования данной системы необходимо, вообще говоря, знать шесть независимых первых интегралов. Однако после замен

$$z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2},\quad z_* = \frac{z_2}{z_1},\quad z = n_0 v Z,\quad z_k = n_0 v Z_k,$$

$$k = 1, 2, 3,\quad z_* = Z_*,\quad n_0 v\langle\,'\,\rangle = \langle\,^{\bullet}\,\rangle$$

исследуемая система приводится к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z, Z_3),\quad \Psi(\alpha, Z, Z_3) = b\cos\alpha[\sin^2\alpha - (Z^2 + Z_3^2)] - bH_1 Z_3\sin\alpha\cos\alpha; \tag{13}$$

$$\alpha' = -Z_3 + b\sin\alpha\cos^2\alpha + b(Z^2 + Z_3^2)\sin\alpha - bH_1 Z_3\cos^2\alpha,$$

$$Z_3' = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)Z^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_3\Psi(\alpha, Z, Z_3) - H_1 Z_3\cos\alpha, \tag{14}$$

$$Z' = (1 + bH_1)ZZ_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z\Psi(\alpha, Z, Z_3) - H_1 Z\cos\alpha;$$

$$Z_*' = (1 + bH_1)Z\sqrt{1 + Z_*^2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)\frac{ZZ_*}{\sqrt{1 + Z_*^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \tag{15}$$

$$\beta_2^{\bullet} = -(1 + bH_1)\frac{Z}{\sqrt{1 + Z_*^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}. \tag{16}$$

Видно, что система пятого порядка (11) распалась на независимые подсистемы более низкого порядка: система (14) — третьего, а система (15) (после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости исследуемой системы достаточно указать два независимых интеграла системы (14), один системы (15) и два дополнительных интеграла, “привязывающих” уравнения (13) и (16).

ПОЛНЫЙ СПИСОК ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Полная система (13)—(16) обладает аналитическим первым интегралом вида

$$v^2(1 - 2bZ_3\sin\alpha + (Z^2 + Z_3^2)) = V_C^2, \tag{17}$$

поскольку выполнено свойство (8). Последнее инвариантное соотношение позволяет определить величину v.

Система (14) принадлежит к классу систем, возникающих в динамике трехмерного твердого тела, и обладает двумя независимыми первыми интегралами, являющимися трансцендентными функциями своих фазовых переменных (в смысле определений комплексного анализа) и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций (ср. с [8, 9]):

$$\frac{(1 + bH_1)Z^2 + (1 + bH_1)Z_3^2 - (b + H_1)Z_3\sin\alpha + \sin^2\alpha}{Z\sin\alpha} = C_1 = \text{const}, \tag{18}$$

$$G\left(\frac{Z}{\sin\alpha}, \frac{Z_3}{\sin\alpha}, Z, Z_3, \sin\alpha\right) = C_2 = \text{const}. \tag{19}$$

Система (15) имеет первый интеграл в виде

$$\frac{\sqrt{1 + Z_*^2}}{\sin\beta_1} = C_3 = \text{const}, \tag{20}$$

и, в свою очередь, дополнительное инвариантное соотношение, позволяющее определить величину β_2, имеет вид

$$\pm\frac{C_3\cos\beta_1}{\sqrt{C_3^2 - 1}} = \sin\{C_3(\beta_2 + C_4)\}, \quad |C_3| > 1, \quad C_4 = \text{const}. \tag{21}$$

Заметим, что для того, чтобы получить оставшийся первый интеграл, необходимо в соотношение (21) вместо постоянной интегрирования C_3 подставить явный вид первого интеграла (20).

Основная теорема. *Динамическая система* (13)–(16) *обладает полным списком инвариантных соотношений* (17)–(21), *одно из которых является аналитической функцией, а остальные — трансцендентные функции своих переменных (после их формального продолжения в комплексную область).*

В предыдущих работах автора [2, 5, 6] уже рассматривались задачи о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил, а также при наличии дополнительной следящей силы. Данная работа дополняет предыдущие исследования и также открывает очередной новый цикл работ, поскольку ранее (см., например, [10–13]) рассматривались лишь такие движения четырехмерного тела, когда момент внешних сил был тождественно равен нулю ($M \equiv 0$) или поле внешних сил было потенциальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1992. № 1. С. 52–58.
2. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.
3. *Шамолин М.В.* // ДАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.
4. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 448 с.
5. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.
6. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.
7. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости В кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133–135.
8. *Шамолин М.В.* // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.
9. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.
10. *Богоявленский О.И.* // ДАН. 1986. Т. 287. № 5. С. 1105–1108.
11. *Богоявленский О.И.* // ДАН. 1983. Т. 272. № 6. С. 1364–1367.
12. *Веселов А.П.* // ДАН. 1983. Т. 270. № 5. С. 1094–1097.
13. *Веселов А.П.* // ДАН. 1983. Т. 270. № 6. С. 1298–1300.