MISCELLANEOUS

УДК 517.925+531.01

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

© 2011 М.В. Шамолин[1]

В работе сообщается о результатах по исследованию уравнений движения динамически симметричного четырехмерного ($4D-$) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных двумерных ($2D-$) и трехмерных ($3D-$) твердых тел, взаимодействующих со средой, когда в системе присутствует неконсервативная пара сил, заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно [1]. Получено несколько случаев интегрируемости в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерное пространство, при наличии некоторой следящей силы.

Пусть четырехмерное твердое тело Θ массы m с гладкой трехмерной границей $\partial\Theta$ движется в среде, заполняющей четырехмерную область евклидового пространства. При этом тензор инерции тела в некоторой связанной системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ имеет вид $\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}$. Расстояние от точки N приложения неконсервативной силы $\mathbf{S}$ до точки D является функцией некоторого угла α: $DN = R(\alpha)$ (ср. с [1–3]). Сила $\mathbf{S}$ имеет величину $S = s(\alpha)\mathrm{sgn}\cos\alpha \cdot v^2$, $|\mathbf{v}_D| = v$, где s — некоторая функция, характеризующая в системе как рассеяние, так и подкачку энергии [1; 2]. При этом функции R и S определим следующим образом (ср. с [1; 2]): $R = R(\alpha) = A\sin\alpha$, $S = S_v(\alpha) = Bv^2\cos\alpha$; $A, B > 0$.

Если Ω — тензор угловой скорости тела Θ, $\Omega \in \mathrm{so}(4)$, то часть уравнений движения, отвечающая алгебре $\mathrm{so}(4)$, имеет вид [2]

$$\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{1}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, $\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2, \ldots$, $\lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2$, M — момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbf{R}^4$, спроектированный на естественные координаты в алгебре $\mathrm{so}(4)$, $[\ ]$ — коммутатор в $\mathrm{so}(4)$. Кососимметрическая матрица $\Omega \in \mathrm{so}(4)$ определяется шестью величинами ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 — своими компонентами в алгебре $\mathrm{so}(4)$. При этом, очевидно, выполнены следующие равенства: $\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i$ для любых $i, j = 1, \ldots, 4$.

При вычислении момента внешней силы строится отображение $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathrm{so}(4)$, переводящее пару векторов из $\mathbf{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры $\mathrm{so}(4)$ [2; 3].

Уравнение движения центра масс C тела Θ представится в виде $m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}$, где по многомерной формуле Ривальса $\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}$, $\mathbf{w}_D = \mathbf{v}_D +$

[1]Шамолин Максим Владимирович (shamolin@imec.msu.ru), Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119899, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

$+\Omega\mathbf{v}_D$, $E=\dot{\Omega}$, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F}=\mathbf{S}$), E — тензор углового ускорения [1; 2].

Нам необходимо несколько расширить задачу, а именно по прямой $Dx_1=DC$ будет действовать следящая сила $\mathbf{T}$, введение которой используется для рассмотрения интересующих нас классов движений, в результате чего порядок динамической системы может быть понижен. В данной работе интересен такой класс движения, когда центр масс тела движется прямолинейно и равномерно.

Если $(0,x_{2N},x_{3N},x_{4N})$ — координаты точки N в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, $\{-S,0,0,0\}$ — координаты вектора $\mathbf{S}$, то момент силы при проектировании в алгебру so(4) имеет вид

$$\{0,0,x_{4N}S,0,-x_{3N}S,x_{2N}S\}\in\mathbf{R}^6\cong M\in\mathrm{so}(4).$$

При этом если $(v,\alpha,\beta_1,\beta_2)$ — сферические координаты в $\mathbf{R}^4$, то $x_{2N}=$ $=R(\alpha)\cos\beta_1$, $x_{3N}=R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2$, $x_{4N}=R(\alpha)\sin\beta_1\sin\beta_2$.

С учетом всего можно расписать уравнение (1) в виде

$$\begin{gathered}(\lambda_4+\lambda_3)\dot{\omega}_1+(\lambda_3-\lambda_4)(\omega_3\omega_5+\omega_2\omega_4)=0,\\ (\lambda_2+\lambda_4)\dot{\omega}_2+(\lambda_2-\lambda_4)(\omega_3\omega_6-\omega_1\omega_4)=0,\\ (\lambda_4+\lambda_1)\dot{\omega}_3+(\lambda_4-\lambda_1)(\omega_2\omega_6+\omega_1\omega_5)=x_{4N}S,\\ (\lambda_3+\lambda_2)\dot{\omega}_4+(\lambda_2-\lambda_3)(\omega_5\omega_6+\omega_1\omega_2)=0,\\ (\lambda_1+\lambda_3)\dot{\omega}_5+(\lambda_3-\lambda_1)(\omega_4\omega_6-\omega_1\omega_3)=-x_{3N}S,\\ (\lambda_1+\lambda_2)\dot{\omega}_6+(\lambda_1-\lambda_2)(\omega_4\omega_5+\omega_2\omega_3)=x_{2N}S.\end{gathered}\tag{2}$$

Очевидно, что существуют три циклических первых интеграла у уравнений (2): $\omega_1=\omega_1^0,\omega_2=\omega_2^0,\omega_4=\omega_4^0$, при этом считаем, что $\omega_1^0=\omega_2^0=\omega_4^0=0$. В результате этого оставшиеся уравнения на so(4) примут следующий вид (здесь $n_0^2=$ $=AB/2I_2$): $\dot{\omega}_3=n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2$, $\dot{\omega}_5=-n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2$, $\dot{\omega}_6=$ $=n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1$.

Замена угловых скоростей $z_1=\omega_3\cos\beta_2+\omega_5\sin\beta_2$, $z_2=-\omega_3\sin\beta_2\cos\beta_1+$ $+\omega_5\cos\beta_2\cos\beta_1+\omega_6\sin\beta_1$, $z_3=\omega_3\sin\beta_2\sin\beta_1-\omega_5\cos\beta_2\sin\beta_1+\omega_6\cos\beta_1$ после учета условий, понижающих порядок общей системы, позволяет рассматривать "совместные" уравнения движения на касательном расслоении $T\mathbb{S}^3$ трехмерной сферы $(\sigma=DC)$

$$\begin{gathered}\dot{v}=\sigma\cos\alpha[n_0^2v^2\sin^2\alpha-(z_1^2+z_2^2+z_3^3)],\\ \dot{\alpha}=-z_3+\sigma n_0^2v\sin\alpha\cos^2\alpha+\sigma\sin\alpha(z_1^2+z_2^2+z_3^3)/v,\\ \dot{z_3}=n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha-(z_1^2+z_2^2)\mathrm{ctg}\alpha,\ \ \dot{z_2}=z_2z_3\,\mathrm{ctg}\,\alpha+z_1^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta_1,\\ \dot{z_1}=z_1z_3\,\mathrm{ctg}\,\alpha-z_1z_2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta_1,\ \ \dot{\beta_1}=z_2\,\mathrm{ctg}\,\alpha,\\ \dot{\beta_2}=-z_1\,\mathrm{ctg}\,\alpha\csc\beta_1.\end{gathered}\tag{3}$$

В системе седьмого порядка появилась независимая подсистема шестого порядка, в которой отделяется независимая подсистема пятого порядка (3). Для полного интегрирования необходимо знать, вообще говоря, шесть независимых первых интегралов. Однако после замен переменных и введения нового дифференцирования $z=\sqrt{z_1^2+z_2^2}$, $z_*=z_2/z_1$, $z=n_0vZ$, $z_k=n_0vZ_k$, $k=1,2,3$, $z_*=Z_*$, $n_0v\ '\mapsto\ '$ она приводится к виду $(b=\sigma n_0,[b]=1)$

$$v'=v\Psi(\alpha,Z,Z_3),\ \ \Psi(\alpha,Z,Z_3)=b\cos\alpha[\sin^2\alpha-(Z^2+Z_3^2)],$$

$$\begin{gathered}\alpha'=-Z_3+b\sin\alpha\cos^2\alpha+b\sin\alpha(Z^2+Z_3^2),\\ Z_3'=\sin\alpha\cos\alpha-Z^2\mathrm{ctg}\alpha-Z_3\Psi(\alpha,Z,Z_3),\ \ Z'=ZZ_3\mathrm{ctg}\alpha-Z\Psi(\alpha,Z,Z_3),\end{gathered}\tag{4}$$

$$Z_*'=Z\sqrt{1+Z_*^2}\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta_1,\ \ \beta_1'=\frac{ZZ_*}{\sqrt{1+Z_*^2}}\mathrm{ctg}\alpha,\tag{5}$$

$$\beta_2' = -\frac{Z_1}{\sqrt{1+Z_*^2}}\mathrm{ctg}\alpha\csc\beta_1.$$

Видно, что система пятого порядка (3) распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (4) — третьего, а система (5) (после замены независимого переменного) — второго. Поэтому для полной интегрируемости достаточно указать два независимых интеграла системы (4), один — системы (5) и два дополнительных интеграла, "привязывающих" оставшиеся уравнения. При этом заметим, что систему (4) можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbb{S}^2$ двумерной сферы.

Полная система седьмого порядка обладает аналитическим первым интегралом вида $v^2(1-2bZ_3\sin\alpha+(Z^2+Z_3^2)) = V_C^2$, поскольку центр масс движется прямолинейно и равномерно.

Система (4) принадлежит к классу систем, возникающих в динамике трехмерного ($3D-$) твердого тела, и обладает двумя независимыми первыми интегралами, являющимися трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций (ср. с [1–3]):

$$\frac{Z^2+Z_3^2-bZ_3\sin\alpha+\sin^2\alpha}{Z\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const},\quad G(Z, Z_3, \sin\alpha) = C_2 = \mathrm{const}.$$

Система (5) имеет первый интеграл в виде

$$\frac{\sqrt{1+Z_*^2}}{\sin\beta_1} = C_3 = \mathrm{const},$$

и, в свою очередь, дополнительный первый интеграл, позволяющий определить величину β_2, представлен как

$$\pm\frac{\cos\beta_1}{\sqrt{C_3^2-1}} = \sin\{C_3(\beta_2+C_4)\},\quad C_4 = \mathrm{const}.$$

Литература

[1] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.

[2] Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.

[3] Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998, Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.