ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2012, том 442, № 4, с. 479–481

МЕХАНИКА

УДК 531.01+531.552+517.925

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СРЕДОЙ, ПРИ УЧЕТЕ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

© 2012 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком В.В. Козловым 03.10.2011 г.

Поступило 05.10.2011 г.

Результаты предлагаемой работы появились благодаря исследованию некоторой пространственной задачи о движении твердого тела в среде с сопротивлением [1–3], в которой пришлось столкнуться с нахождением первых интегралов динамической части уравнений движения, обладающих исключительными свойствами. Данные интегралы выражались через конечную комбинацию элементарных функций, несмотря на наличие в фазовом пространстве системы отталкивающих и притягивающих предельных множеств. В работе предъявляется новый случай интегрируемости в задаче о пространственном движении твердого тела при наличии неконсервативного момента сил. При этом в отличие от некоторых предыдущих работ [4–6] при построении неконсервативного силового поля воздействия среды на тело учитывается линейная зависимость данного поля от угловой скорости, несмотря на то, что само ее введение в компоненты такого поля априори не очевидно.

НЕКОНСЕРВАТИВНОЕ ПОЛЕ СИЛЫ ВОЗДЕЙСТВИЯ СРЕДЫ

Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела массы m с передним круглым торцом (диском, кавитатором) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [1–6]. Пусть (v, α, β) – сферические координаты скорости центра D диска, $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$ – компоненты угловой скорости тела, I_1, I_2, I_2 – главные моменты инерции в системе координат, связанной с телом (ось Dx совпадает с осью симметрии, оси Dy, Dz – в плоскости диска). Воздействие среды на тело моделируется приложенной в точке N диска нормальной к нему силы $\mathbf{S}$, проекция которой со знаком представляется в виде $S = s(\alpha)v^2$, $v = |v_D|$ (ср. с [1–3]).

Здесь необходимо сделать важное замечание о введении зависимости функций координат точки N от угловой скорости. Зависимость будет использоваться линейная. При этом, чтобы момент имел диссипативный характер, выберем функции y_N, z_N $(x_N \equiv 0)$ в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} = Q - \frac{1}{v}\begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где Q – вектор-функция, не зависящая от угловой скорости, $h = h_x = h_y$, $h_z > 0$. При этом следует учесть, что если (v, α, β) – сферические координаты в $\mathbf{R}^3$, то (ср. с [4–6])

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ R(\alpha)\cos\beta \\ R(\alpha)\sin\beta \end{pmatrix}, \quad R(\alpha) = DN. \tag{2}$$

Для описания воздействия среды на тело используется пара динамических функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. В соответствии с последним в качестве таких функций выберем функции типа Чаплыгина [1, 2]:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A > 0, \quad s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad B > 0. \tag{3}$$

НАЛИЧИЕ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ И ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Будем рассматривать более общую задачу о движении тела, а именно, наличие некоторой дополнительной следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через ось симметрии и обеспечивающей во все время движения постоянство скорости центра масс $(\mathbf{T} = -\mathbf{S})$. Тогда при некоторых условиях в случае функций типа Чаплыгина [1, 2] воздействия среды на тело динамическая часть уравнений движения приводится к системе, в которой произойдет

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

отделение независимой подсистемы более низкого порядка.

Действительно, во-первых, выбор фазовых переменных позволяет рассматривать систему динамических уравнений шестого порядка в качестве независимой. Во-вторых, сохраняется компонента продольной составляющей угловой скорости: $\Omega_x = \Omega_{x0} = \mathrm{const}$. Ограничимся далее движением тела без собственного вращения, т.е. $\Omega_{x0} = 0$.

Введем следующие обозначения, безразмерные параметры и дифференцирование:

$$z_1 = \Omega_y \cos\beta + \Omega_z \sin\beta,$$

$$z_2 = -\Omega_y \sin\beta + \Omega_z \cos\beta, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \tag{4}$$

$$z_i = Z_i v n_0, \quad i = 1, 2, \quad \alpha^{\bullet} = \alpha' v n_0, \quad \beta^{\bullet} = \beta' v n_0,$$

$$v^{\bullet} = v' v n_0, \quad b = \sigma n_0, \quad H_1 = \frac{hB}{I_2 n_0},$$

$[b] = [H_1] = [Z_i] = 1$. Тогда динамическая часть уравнений движения благодаря (1)–(4) преобразуется к виду

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + \tag{5}$$

$$+ b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 Z_2 \cos^2\alpha;$$

$$Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha -$$

$$- bZ_2 \sin^2\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$

$$+ bH_1 Z_2^2 \sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_2 \cos\alpha, \tag{6}$$

$$Z_1' = bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha -$$

$$- bZ_1 \sin^2\alpha\cos\alpha + (1 + bH_1)Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$

$$+ bH_1 Z_1 Z_2 \sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_1 \cos\alpha;$$

$$\beta' = (1 + bH_1)Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{7}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha +$$

$$+ b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1 Z_2 \sin\alpha\cos\alpha.$$

ПОЛНЫЙ СПИСОК ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Поскольку мы рассматриваем такой класс движений тела, при котором постоянна величина скорости центра масс, то система (5)–(7) пятого порядка имеет аналитический первый интеграл следующего вида:

$$v^2(1 - 2bZ_2\sin\alpha + b^2(Z_1^2 + Z_2^2)) = V_{C0}^2. \tag{8}$$

Видно, что соотношение (8) позволяет рассматривать вопросы интегрируемости в элементарных функциях системы (6), (7) уже четвертого порядка, в котором выделилась система третьего порядка (6).

Применяя часто используемую подстановку $\tau = \sin\alpha$, систему (6) можно привести к следующей системе с алгебраическими правыми частями:

$$\frac{dZ_2}{d\tau} = \frac{\tau + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_2\tau^2 - (1 + bH_1)\dfrac{Z_1^2}{\tau} - H_1 Z_2 + bH_1 Z_2^2 \tau}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) + b\tau(1 - \tau^2) - bH_1 Z_2(1 - \tau^2)},$$

$$\frac{dZ_1}{d\tau} = \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_1\tau^2 + (1 + bH_1)\dfrac{Z_1 Z_2}{\tau} - H_1 Z_1 + bH_1 Z_1 Z_2 \tau}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) + b\tau(1 - \tau^2) - bH_1 Z_2(1 - \tau^2)}. \tag{9}$$

Произведем переход к однородным координатам u_k, $k = 1, 2$, по формулам $Z_k = u_k\tau$. Тогда система (9) приведется к виду

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)},$$

$$\tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}. \tag{10}$$

Системе (10) можно формально сопоставить уравнение первого порядка (разделив одно уравнение на другое), которое интегрируется в элементарных функциях и позволяет получить явный вид трансцендентного первого интеграла исследуемой системы

$$\frac{(1 + bH_1)u_1^2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} =$$

$$= C_1 = \mathrm{const}, \tag{11}$$

или в переменных (Z_1, Z_2, α)

$$\frac{(1 + bH_1)Z_1^2 + (1 + bH_1)Z_2^2 - (b + H_1)Z_2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{Z_1\sin\alpha} =$$

$$= C_1' = \mathrm{const} \tag{12}$$

Теперь, пользуясь найденным первым интегралом (12) (или (11)), перепишем первое уравнение системы (10) в следующем виде:

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \\ = \frac{1+(1+bH_1)u_2^2-(b+H_1)u_2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}{-u_2+b(1-\tau^2)+b\tau^2(U_1^2(C_1,u_2)+u_2^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}, \tag{13}$$

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\{C_1\pm \\ \pm\sqrt{C_1^2-4(1+bH_1)(1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2)}\},$$

или в виде уравнения Бернулли

$$\frac{d\tau}{du_2} = \\ = \frac{(b-u_2-bH_1u_2)\tau-b\tau^3(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2-H_1u_2)}{1+(1+bH_1)u_2^2-(b+H_1)u_2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}. \tag{14}$$

Уравнение (14) (при помощи (13)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dp}{du_2} = \\ = \frac{2((1+bH_1)u_2-b)p+2b(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2-H_1u_2)}{1+(1+bH_1)u_2^2-(b+H_1)u_2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}, \tag{15}$$

$$p=\frac{1}{\tau^2}.$$

Последнее означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию элементарных иррациональных функций). При этом общее решение уравнения (15) зависит от произвольной постоянной C_2:

$$G_1\left(\frac{Z_1}{\sin\alpha},\frac{Z_2}{\sin\alpha},Z_1,Z_2,b,H_1,C_1\right)=C_2=\text{const}. \tag{16}$$

Поиск полного набора первых интегралов системы (6) закончен. Для поиска последнего дополнительного первого интеграла системы (6), (7) (т.е. интеграла, привязывающего уравнение (7) на угол β) заметим, что поскольку

$$\frac{d\beta}{d\tau}=\frac{(1+bH_1)\dfrac{Z_1}{\tau}}{-Z_2+b\tau(Z_1^2+Z_2^2)+b\tau(1-\tau^2)-bH_1(1-\tau^2)},$$

то к равенству

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \\ = \frac{(1+bH_1)u_1}{-u_2\tau+b\tau^3(u_1^2+u_2^2)+b\tau(1-\tau^2)-bH_1\tau u_2(1-\tau^2)} \tag{17}$$

добавим также равенство

$$\tau\frac{du_1}{d\tau} = \\ = \frac{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}, \tag{18}$$

взятое из системы (10).

Полученная система (17), (18) позволяет выписать уравнение для получения искомого интеграла:

$$\frac{du_1}{d\beta}=2u_2-\frac{b+H_1}{1+bH_1},$$

которое легко интегрируется и в координатах (Z_1, Z_2, α) приводится к виду

$$\cos^2[2(\beta+C_3)]=G_2\left(\frac{Z_1}{\sin\alpha},\frac{Z_2}{\sin\alpha},Z_1,Z_2,b,H_1,C_1\right). \tag{19}$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Система* (5)–(7) *обладает полным набором инвариантных соотношений*: *аналитическим соотношением* (8) *и тремя первыми интегралами* (12), (16), (19), *которые являются элементарными трансцендентными функциями своих фазовых переменных.*

Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция после формального продолжения в комплексную область имеет существенно особые точки.

О других похожих случаях полной интегрируемости уравнений пространственного движения твердого тела, взаимодействующего со средой при дополнительном наличии следящей силы, а также об исследовании обобщенных уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил см. [7–9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. М.: Наука, 1976. 495 с.
2. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости. В кн.: Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133–135.
3. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 3. С. 51–54.
4. *Шамолин М.В.* // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 65–68.
5. *Шамолин М.В.* // ДАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.
6. *Шамолин М.В.* // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14. В. 3. С. 3–237.
7. *Шамолин М.В.* // УМН. 2010. Т. 65. В. 1. С. 189–190.
8. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.
9. *Шамолин М.В.* // УМН. 2005. Т. 60. В. 6. С. 233–234.