Переменная x в уравнении принадлежит специальному множеству $\overline{[0;\, l]_\sigma}$, в котором каждая точка ξ, принадлежащая множеству $S(\sigma)$ точек разрыва функции $\sigma(x)$, заменена на упорядоченную тройку собственных элементов $\{\xi - 0,\ \xi,\ \xi + 0\}$. В точках ξ уравнение понимается как равенство

$$\Delta \left(pu''_{xx}\right)'_x(\xi) + u(\xi)\,\Delta Q(\xi) = \lambda u(\xi)\,\Delta M(\xi)\,,$$

где $\Delta\psi(\xi)$ - скачок функции $\psi(\xi)$ в точке ξ.

Литература

[1] Покорный Ю.В. Стилтьеса и производная по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. РАН. – 1999. – Т. 364, 2. – С. 167 – 169.

[2] Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач // Успехи матем. наук. – Т. 63, вып. 1 (379). – 2008. – С. 111 – 154.

[3] Покорный Ю.В. Осцилляционный метод в спектральных задачах / Покорный Ю.В. [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 192 с.

Случаи интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле

М.В. Шамолин

(Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова; shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru)

В работе приводятся результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного четырехмерного ($4D-$) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных двумерных ($2D-$) и трехмерных ($3D-$) твердых тел, взаимодействующих со средой, когда в системе присутствует неконсервативная пара сил, заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно [1]. Получено несколько случаев интегрируемости в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии некоторой следящей силы (ср. с [1–3]). Один из фрагментов осветим в данной работе подробнее.

Пусть четырехмерное твердое тело Θ массы m с гладкой трехмерной границей $\partial\Theta$ движется в среде, заполняющей четырехмерную область евклидового пространства. При этом тензор инерции тела в некоторой связанной системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ имеет вид $\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}$. Расстояние от точки N приложения неконсервативной силы $\mathbf{S}$ до точки D является функцией некоторого угла α: $DN = R(\alpha)$ (ср. с [1–3]). Сила $\mathbf{S}$ имеет величину $S = s(\alpha)\mathrm{sgn}\cos\alpha \cdot v^2,\ |\mathbf{v}_D| = v$, где s — некоторая функция, характеризующая в системе как рассеяние, так и подкачку энергии [1, 2]. При этом функции R и S определим следующим образом (ср. с [1, 2]) $R = R(\alpha) = A\sin\alpha,\ S = S_v(\alpha) = Bv^2\cos\alpha;\ A, B > 0$.

Если Ω — тензор угловой скорости тела Θ, $\Omega \in \mathrm{so}(4)$, то часть уравнений движения, отвечающая алгебре $\mathrm{so}(4)$, имеет вид [2]

$$\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{1}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\},\ \lambda_1 = (-I_1+I_2+I_3+I_4)/2, \ldots,\ \lambda_4 = (I_1+I_2+I_3-I_4)/2$, M — момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbf{R}^4$, спроектированный на естественные координаты в алгебре $\mathrm{so}(4)$, $[\ ]$ — коммутатор в $\mathrm{so}(4)$.

Кососимметрическая матрица $\Omega \in \mathrm{so}(4)$ определяется шестью величинами $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6$ — своими компонентами в алгебре $\mathrm{so}(4)$. При этом, очевидно, выполнены следующие равенства: $\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i$ для любых $i, j = 1, \ldots, 4$.

При вычислении момента внешней силы строится отображение

$$\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathrm{so}(4),$$

переводящее пару векторов из $\mathbf{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры so(4) [2, 3].

Уравнение движения центра масс C тела Θ представится в виде $m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}$, где по многомерной формуле Ривальса $\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}$, $\mathbf{w}_D = \mathbf{v}_D + \Omega\mathbf{v}_D$, $E = \dot{\Omega}$, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$), E — тензор углового ускорения [1, 2].

Нам необходимо несколько расширить задачу, а именно, по прямой $Dx_1 = DC$ будет действовать следящая сила $\mathbf{T}$, введение которой используется для рассмотрения интересующих нас классов движений, в результате чего порядок динамической системы может быть понижен. В данной работе интересен такой класс движения, когда центр масс тела движется прямолинейно и равномерно.

Если $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ — координаты точки N в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, $\{-S, 0, 0, 0\}$ — координаты вектора $\mathbf{S}$, то момент силы при проектировании в алгебру so(4) имеет вид

$$\{0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S\} \in \mathbf{R}^6 \cong M \in \mathrm{so}(4).$$

При этом, если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — сферические координаты в $\mathbf{R}^4$, то $x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1$, $x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2$, $x_{4N} = R(\alpha)\sin\beta_1\sin\beta_2$.

С учетом всего можно расписать уравнение (1) в виде

$$\begin{gathered}
(\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0,\\
(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = 0,\\
(\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = x_{4N}S,\\
(\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = 0,\\
(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = -x_{3N}S,\\
(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = x_{2N}S.
\end{gathered} \tag{2}$$

Очевидно, что существуют три циклических первых интеграла у уравнений (2): $\omega_1 = \omega_1^0, \omega_2 = \omega_2^0, \omega_4 = \omega_4^0$, при этом считаем, что $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0$. В результате этого оставшиеся уравнения на so(4) примут следующий вид (здесь $n_0^2 = AB/2I_2$):

$$\dot{\omega}_3 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2,$$

$$\dot{\omega}_5 = -n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2,$$

$$\dot{\omega}_6 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1.$$

Замена угловых скоростей $z_1 = \omega_3\cos\beta_2 + \omega_5\sin\beta_2$, $z_2 = -\omega_3\sin\beta_2\cos\beta_1 + \omega_5\cos\beta_2\cos\beta_1 + \omega_6\sin\beta_1$, $z_3 = \omega_3\sin\beta_2\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_2\sin\beta_1 + \omega_6\cos\beta_1$ после учета условий, понижающих порядок общей системы, позволяет рассматривать "совместные" уравнения движения на касательном расслоении $T\mathbb{S}^3$ трехмерной сферы ($\sigma = DC$)

$$\dot{v} = \sigma\cos\alpha[n_0^2 v^2 \sin^2\alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^3)],$$

$$\begin{gathered}
\dot{\alpha} = -z_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha\cos^2\alpha + \sigma\sin\alpha(z_1^2 + z_2^2 + z_3^3)/v,\\
\dot{z_3} = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + z_2^2)\mathrm{ctg}\alpha,\ \dot{z_2} = z_2 z_3 \operatorname{ctg}\alpha + z_1^2 \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta_1,\\
\dot{z_1} = z_1 z_3 \operatorname{ctg}\alpha - z_1 z_2 \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta_1,\ \dot{\beta_1} = z_2\operatorname{ctg}\alpha,
\end{gathered} \tag{3}$$

$$\dot{\beta_2} = -z_1\operatorname{ctg}\alpha\csc\beta_1.$$

В системе седьмого порядка появилась независимая подсистема шестого порядка, в которой отделяется независимая подсистема пятого порядка (3). Для полного интегрирования необходимо знать, вообще говоря, шесть независимых первых интегралов. Однако после замен переменных и введения нового дифференцирования $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $z_* = z_2/z_1$, $z = n_0 vZ$, $z_k = n_0 vZ_k$, $k = 1, 2, 3$, $z_* = Z_*$, $n_0 v\ ' \mapsto\ '$, она приводится к виду ($b = \sigma n_0, [b] = 1$)

$$v' = v\Psi(\alpha, Z, Z_3),\ \Psi(\alpha, Z, Z_3) = b\cos\alpha[\sin^2\alpha - (Z^2 + Z_3^2)],$$

$$\alpha' = -Z_3 + b\sin\alpha\cos^2\alpha + b\sin\alpha(Z^2 + Z_3^2),$$
$$Z_3' = \sin\alpha\cos\alpha - Z^2\text{ctg}\alpha - Z_3\Psi(\alpha, Z, Z_3),\ Z' = ZZ_3\text{ctg}\alpha - Z\Psi(\alpha, Z, Z_3), \tag{4}$$

$$Z_*' = Z\sqrt{1+Z_*^2}\text{ctg}\alpha\text{ctg}\beta_1,\ \beta_1' = \frac{ZZ_*}{\sqrt{1+Z_*^2}}\text{ctg}\alpha, \tag{5}$$

$$\beta_2' = -\frac{Z_1}{\sqrt{1+Z_*^2}}\text{ctg}\alpha\csc\beta_1.$$

Видно, что система пятого порядка (3) распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (4) — третьего, а система (5) (после замены независимого переменного) — второго. Поэтому для полной интегрируемости достаточно указать два независимых интеграла системы (4), один — системы (5) и два дополнительных интеграла, "привязывающих" оставшиеся уравнения. При этом заметим, что систему (4) можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbb{S}^2$ двумерной сферы.

Полная система седьмого порядка обладает аналитическим первым интегралом вида $v^2(1 - 2bZ_3\sin\alpha + (Z^2 + Z_3^2)) = V_C^2$, поскольку центр масс движется прямолинейно и равномерно.

Система (4) принадлежит к классу систем, возникающих в динамике трехмерного ($3D-$) твердого тела, и обладает двумя независимыми первыми интегралами, являющимися трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций (ср. с [1–3]):

$$\frac{Z^2 + Z_3^2 - bZ_3\sin\alpha + \sin^2\alpha}{Z\sin\alpha} = C_1 = \text{const},\ G(Z, Z_3, \sin\alpha) = C_2 = \text{const}.$$

Система (5) имеет первый интеграл в виде

$$\frac{\sqrt{1+Z_*^2}}{\sin\beta_1} = C_3 = \text{const}$$

и, в свою очередь, дополнительный первый интеграл, позволяющий определить величину β_2, имеет вид

$$\pm\frac{\cos\beta_1}{\sqrt{C_3^2 - 1}} = \sin\{C_3(\beta_2 + C_4)\},\ C_4 = \text{const}.$$

Литература

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд–во "Экзамен 2007. 352 с.

2. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.

3. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.

Метод конечных элементов для сингулярно возмущенных эллиптических краевых задач на сетках Шишкина

У.И. Шустикова
(Самара, ПГУТИ; ulana-1988@mail.ru)

Метод конечных элементов Галеркина является одним из основных универсальных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Он имеет существенные алгоритмические преимущества перед разностными методами в случае многомерных задач и областей со сложной геометрией. В случае сингулярно возмущенных задач для отыскания приближенного решения во всей области необходимо сгущение