

УДК 531.01+531.552

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

© 2011 г. *М.В. Шамолин*

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, shamolin@gambler.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00231-а).

Предлагаемая работа представляет собой очередной этап исследования задачи плоскопараллельного движения твердого тела, взаимодействующего со средой лишь через передний плоский участок своей внешней поверхности. При построении силового воздействия среды используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности (например, о входе однородных круговых цилиндров в воду). Движение среды не изучается, а рассматривается такая задача динамики твердого тела, в которой характерное время движения тела относительно его центра масс соизмеримо с характерным временем движения самого центра. Предъявляются условия асимптотической устойчивости прямолинейного поступательного торможения, получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов в пространстве квазискоростей, подготовлен количественный материал для проведения дальнейших натурных экспериментов о движении в среде полых круговых цилиндров.

Ключевые слова: твердое тело, сопротивляющаяся среда, интегрируемость, автоколебания, натурный эксперимент.

RIGID BODY MOTION IN A RESISTING MEDIUM

M.V. Shamolin

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University

Proposed work presents next stage of the study of the problem of the plane-parallel motion of a rigid body interacting with resistant medium only through the flat plate of its external surface. During of construction of mathematical model the information of the rigid body motion in a jet flow under assumptions of quasi-stationary conditions is used. The motion of a medium is not studied but is considered such problem of the motion of a rigid body in which case the typical time of the motion the body around its centre of mass is commensurable since typical time of the motion of centre itself. The conditions to asymptotic stability of the rectilinear onward braking is fulfilled, new multivariable family phase portrait in space of quasi-velocities is received, the quantitative material for undertaking further natural experiment about motion of the flap circular cylinder is prepared.

Key words: rigid body, resisting medium, integrability, self-oscillations, natural experiment.

Введение

Дадим краткое резюме предыдущим этапам исследований. По причине сложности нелинейного анализа начальным их этапом явилось пренебрежение зависимостью момента силы воздействия среды от угловой скорости тела и использование такой зависимости лишь от угла атаки [1-15].

С практической точки зрения важен вопрос исследования устойчивости так называемого невозмущенного (прямолинейного поступательного) движения, при котором скорости точек тела перпендикулярны пластине (кавитатору).

Весь спектр результатов, найденных при указанном простейшем предположении, позволял сделать вывод о невозможности нахождения таких условий, при которых у приведенных систем существовали бы решения, соответствующие угловым колебаниям тела ограниченной амплитуды.

Эксперимент о движении в воде однородных круговых цилиндров [6,13,14,16] подтвердил, что при моделировании воздействия среды на твердое тело действительно необходимо учитывать зависимость момента силы воздействия среды и от угловой скорости тела. При этом в уравнениях движения возникают дополнительные члены, вносящие в систему диссипацию.

При изучении движения тела с конечными углами атаки основным вопросом нелинейного анализа является нахождение таких условий, при которых существуют колебания ограниченной амплитуды возле невозмущенного движения. Это подтверждает необходимость полного нелинейного исследования.

В более ранних работах удалось использовать неустойчивость прямолинейного поступательного торможения в методических целях [3,6], а именно, для определения неизвестных параметров воздействия среды на твердое тело в условиях квазистационарности.

Учет демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело при некоторых условиях приводит к положительному ответу на главный вопрос нелинейного анализа: при движении тела в среде с конечными углами атаки в принципе возможно возникновение устойчивых автоколебаний, которые обуславливаются учетом дополнительной зависимости воздействия среды от угловой скорости тела, что вносит в систему дополнительную диссипацию.

Более того, в процессе применения методики исследования диссипативных динамических систем определенного вида получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов на двумерном цилиндре, состоящее из бесконечного множества топологически неэквивалентных фазовых портретов, меняющих свой топологический тип при изменении параметров системы вырожденным образом (см. также [15]).

1. Плоскопараллельное движение твердого тела в сопротивляющейся среде и устойчивость ключевого режима

1.1. Модельные предположения. Предположим, что однородное твердое тело массы m совершает плоскопараллельное движение в однородном потоке среды и некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой плоскую пластину AB , находящуюся в условиях струйного обтекания средой [1,10,11,17]. Это означает, что в случае отсутствия касательных сил воздействие среды на пластину сводится к силе S (приложенной в точке N), ортогональной к ней (рис.1). Остальная часть поверхности тела мо-

жет быть размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края пластины, и не испытывает действия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа тела в воду [2,3,16]. Предполагается также, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой воздействия среды.

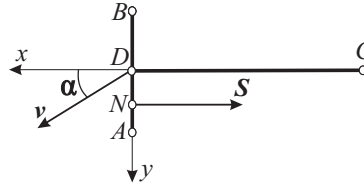


Рис.1.

Рассматриваемая модель взята из конкретной задачи о входе в воду однородных круговых цилиндров. При этом из экспериментальной информации заимствовано силовое поле со стороны среды. В этом смысле изучение движения среды, как таковой, становится непринципиальным.

В предлагаемой работе достигнут некоторый компромисс между относительной правдоподобностью описания модели, а также принципиальной возможностью получить результаты аналитически. По этой причине дифференциальные уравнения с частными производными движения среды не рассматриваются, поскольку характерное силовое поле выбрано, и в данном приближении стало достаточным изучить лишь обыкновенные дифференциальные уравнения движения тела.

Свяжем с пластиной правую систему координат $Dxuz$ (ось z – перпендикулярна плоскости рисунка) и будем считать Dzx плоскостью геометрической симметрии тела. Тогда среди возможных движений существует режим прямолинейного поступательного торможения (невозмущенного движения), перпендикулярного пластине AB . При этом срединный перпендикуляр Dx , опущенный из центра тяжести C тела на плоскость пластины, принадлежит линии действия силы S . А при возмущении данного режима вектор скорости v точки D относительно среды, вообще говоря, отклоняется от оси DC геометрической симметрии на некоторый угол (атаки) α (рис.1).

Для построения динамической модели введем первые три фазовые координаты: v – величина скорости точки D относительно потока среды, угол α и Ω – алгебраическое значение проекции абсолютной угловой скорости тела на ось z , $AB=\Delta$.

Примем, что величина силы S квадратично зависит ($S = s_1 v^2$, что традиционно для задач прикладной гидроаэродинамики) от v с некоторым коэффициентом s_1 . Обычно его представляют в виде $s_1 = \rho P c_x / 2$, где c_x – уже безразмерный коэффициент лобового сопротивления (ρ – плотность среды, P – площадь пластины). Этот коэффициент зависит от угла атаки, числа Струхалия и других величин, которые в статических моделях обычно считают параметрами. Мы же в дальнейшем вводим безразмерную фазовую переменную «типа Струхалия» $\omega \cong \Omega \Delta / v$, а также функцию $s = s_1 \text{sgn} \cos \alpha$, при этом воздействие среды на тело будут определять функции (v_N, s) . Функция s вводится для дальнейшего формального исследования системы динамических уравнений при любых углах атаки. В приложениях, когда угол α удовлетворяет условиям $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, очевидно равенство $s \cong s_1$.

Ограничимся зависимостью коэффициента c_x от угла атаки, т.е. в принципе будем считать величину s функцией α , а величину $y_N = DN$ – функцией переменных (α, ω) .

Как уже отмечалось, предыдущие работы [5-9] посвящены такому исследованию плоского взаимодействия, при котором учитывается зависимость пары (y_N, s) лишь от угла атаки. В данной же работе изучаются плоскопараллельные и пространственные движения тела в нелинейной постановке в случае зависимости величины s от угла атаки и при условии дополнительной зависимости функции y_N от приведенной угловой скорости ω .

Задача о свободном торможении тела (т.е. когда на тело действует лишь сила сопротивления среды – см. далее случай 1)) с малыми углами атаки формирует дальнейшее представление о нелинейных динамических системах, описывающих взаимодействие среды с телом, при учете так называемых вращательных производных момента силы воздействия среды по угловой скорости тела.

Невозмущенное движение определяется равенствами $\alpha(t) \equiv 0$, $\omega(t) \equiv 0$. Поэтому функцию $y_N(\alpha, \omega)$ при малых (α, ω) будем использовать в виде

$$y_N = \Delta(k\alpha - h\omega), \quad (1.1)$$

где k и h – некоторые постоянные. Зависимостью же s от α , в силу геометрической симметрии тела, обеспечивающей четность функции s , пренебрегаем.

Линеаризованная модель силового воздействия среды содержит три параметра $s = s_1, k, h$, которые определяются формой пластины в плане. Первый из этих параметров – коэффициент s – размерный, параметры же k, h – безразмерные, в силу способа их введения. Величины s, k могут быть экспериментально определены путем весовых измерений в установках типа гидро- или аэродинамических труб. В [16,18] имеется информация о теоретическом определении этих величин для отдельных форм пластин, позволяющая считать, что $k > 0$. Что же касается параметра h (который вносит в систему зависимость момента силы от угловой скорости), то даже сама необходимость введения его в модель априори не очевидна.

Изучение свойств движения рассматриваемых классов тел в Институте механики МГУ им. М.В. Ломоносова [3,6] было начато экспериментами по регистрации движения в воде однородных круговых цилиндров. Эксперимент позволил сделать следующие выводы. Первый: невозмущенный режим движения тела (в воде) неустойчив, по крайней мере, по отношению к углу ориентации тела. Также стало возможным определение безразмерных параметров k, h воздействия среды на твердое тело.

Второй вывод таков: при моделировании воздействия среды на тело действительно необходимо учитывать дополнительный параметр, эквивалентный вращательной производной момента гидроаэродинамических сил по угловой скорости тела, который и вносит в систему дополнительную диссипацию (см. также [19-21]).

Величина коэффициента демпфирующего момента уже была оценена в [2] для некоторых случаев движения тел в воде. Данная там оценка говорит о неустойчивости по углу атаки и угловой скорости невозмущенного движения твердого тела в воде. Фор-

мально, увеличивая величину данного коэффициента, возможно достижение устойчивости такого движения, которое в некоторых средах (например, в глине) устойчиво в вышеописанном смысле, как показывает эксперимент [16]. Но, возможно, данная устойчивость достигается благодаря наличию в системе значительного демпфирования со стороны среды или наличию сил, касательных к пластине.

Положение тела на плоскости зададим координатами (ξ, η) точки D и углом отклонения φ . Полярные координаты (v, α) конца вектора скорости точки D и алгебраическое значение проекции угловой скорости Ω связаны с переменными $(\xi^{\bullet}, \eta^{\bullet}, \phi^{\bullet}, \phi)$ (неинтегрируемыми) кинематическими соотношениями:

$$\phi^{\bullet} = \Omega, \quad \xi^{\bullet} = v \cos(\alpha + \phi), \quad \eta^{\bullet} = v \sin(\alpha + \phi). \quad (1.2)$$

Таким образом, фазовое состояние системы будем определять через функции $(v, \alpha, \Omega, \xi, \eta, \phi)$, а первые три величины рассматривать в качестве квазискоростей.

Поскольку кинетическая энергия тела и обобщенные силы не зависят от положения тела на плоскости, координаты (ξ, η, ϕ) являются циклическими, что приводит к понижению порядка общей системы уравнений движения.

Уравнения движения центра масс (в проекциях на Dx) и изменения кинетического момента образуют замкнутую систему уравнений, рассматриваемую в трехмерном фазовом пространстве квазискоростей ($\sigma = DC, I$ – центральный момент инерции):

$$v^{\bullet} \cos \alpha - \alpha^{\bullet} v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = -s(\alpha)v^2 / m, \quad (1.3)$$

$$v^{\bullet} \sin \alpha + \alpha^{\bullet} v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \Omega^{\bullet} = 0, \quad (1.4)$$

$$I \Omega^{\bullet} = y_N(\alpha, \omega) s(\alpha) v^2, \quad \omega \cong \Omega \Delta / v. \quad (1.5)$$

Уравнения (1.2), (1.3)–(1.5) вместе образуют полную систему для описания плоскопараллельного движения твердого тела в среде в условиях квазистационарности.

1.2. Функции воздействия среды, зависящие от угловой скорости тела. В динамическую систему (1.3)–(1.5) входят функции $y_N(\alpha, \omega)$ и $s(\alpha)$, определяющие воздействие среды на тело. Функция y_N (ср. с (1.1)), кроме как от угла атаки α , зависит еще и от приведенной угловой скорости ω . Если, в частности, последней зависимостью пренебречь (как было в ряде предыдущих работ – так называемое простейшее предположение на функции воздействия среды), то величина y_N – функция лишь угла атаки: $y_N = y(\alpha)$. Ее зависимость от единственного аргумента определяется с помощью экспериментальной информации о свойствах струйного обтекания [1,4,7]. В этом случае в дальнейшем можно применить метод «погружения» задачи в более общий класс задач.

Но все-таки основной целью данной работы является учет влияния вращательных производных момента силы воздействия среды по компонентам угловой скорости тела, который требует введения в функции воздействия среды дополнительных аргументов,

что само по себе является нетривиальной задачей моделирования. Как уже отмечалось, в данной работе ограничимся введением угловой скорости в качестве аргумента лишь в функцию y_N , а подобным ее введением в приведенный коэффициент s пренебрежем.

По аналогии с (1.1), величину y_N будем рассматривать в следующем виде:

$$y_N(\alpha, \omega) \equiv y_N(\alpha, \Omega/v) = y(\alpha) - H\Omega/v, \quad (1.6)$$

при этом, в силу результатов эксперимента [3,6,16], $H > 0$.

Тогда уравнение (1.5) примет следующий вид:

$$I\Omega^{\bullet} = F(\alpha)v^2 - Hs(\alpha)\Omega v, \quad F(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha). \quad (1.7)$$

Система (1.3), (1.4), (1.7) содержит функции $F(\alpha)$, $s(\alpha)$, явный вид которых даже для пластин простой формы аналитически описать довольно затруднительно. По этой причине и используется прием «погружения» данной задачи в более широкий класс задач, учитывающий лишь качественные свойства функций $F(\alpha)$, $s(\alpha)$.

Опорным для нас является результат С.А. Чаплыгина, который для плоскопараллельного струйного обтекания бесконечной пластины получил функции $y(\alpha)$, $s(\alpha)$ аналитически [11]:

$$y(\alpha) = y_0(\alpha) = A \sin \alpha \in Y, \quad A > 0, \quad (1.8)$$

$$s(\alpha) = s_0(\alpha) = B \cos \alpha \in \Sigma, \quad B > 0. \quad (1.9)$$

Этот результат и помогает построить функциональные классы Y , Σ . Сочетая (1.8), (1.9) с экспериментальной информацией о свойствах струйного обтекания [3,6,16], формально опишем данные классы. Они состоят из функций достаточно гладких, 2π -периодических ($y(\alpha)$ – нечетная, а $s(\alpha)$ – четная), удовлетворяющих следующим условиям: $y(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $y'(0) > 0$, $y'(\pi) < 0$ (класс функций Y); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (класс функций Σ). Как y , так и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$. Таким образом,

$$s \in \Sigma, \quad y \in Y. \quad (1.10)$$

Из вышеперечисленных условий следует, что введенная в (1.7) функция F – достаточно гладкая нечетная π -периодическая функция, удовлетворяющая следующим условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{F\} = \Phi$).

В частности, аналитическая функция [11] $F = F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in \Phi$ является типичным представителем класса функций Φ .

В связи с отмеченной в [3,6] неустойчивостью невозмущенного движения можно поставить следующий вопрос: существуют ли угловые колебания оси симметрии тела конечной (ограниченной) амплитуды?

Сформулируем этот вопрос в более общем виде: существует ли пара функций y и s

воздействия среды такая, чтобы для некоторого решения динамической части уравнений движения выполнялось бы ограничение $-\pi/2 < \alpha(t) < \alpha^* < \pi/2$, начиная с некоторого момента времени $t = t_1$?

При простейшем ограничении на функции y_N и s ранее показано [7,9], что при квазистационарном описании взаимодействия среды с симметричным телом (когда величины y_N и s зависят лишь от угла атаки) для любой допустимой пары функций (y, s) во всем диапазоне $(-\pi/2 < \alpha < \pi/2)$ конечных углов атаки в системе отсутствуют какие-либо колебательные решения конечной (ограниченной) амплитуды.

Таким образом, для возможного положительного ответа на вопрос, поставленный выше, будем учитывать зависимость момента силы воздействия среды от приведенной угловой скорости, при этом будем использовать формулу (1.6) при $H > 0$. Оказывается, при некоторых предположениях можно ожидать положительного ответа на данный вопрос.

Конечно, с практической точки зрения важен анализ динамических уравнений лишь в окрестности невозмущенного движения, поскольку при некоторых критических углах атаки может произойти замыв боковой поверхности, и настоящая модель воздействия среды на тело перестает быть достоверной. Но для тел с боковой поверхностью различной формы величины критических углов, вообще говоря, различны и неизвестны. Поэтому приходится исследовать весь диапазон углов.

Итак, для исследования плоскопараллельного обтекания пластины средой используются классы динамических систем, определенные с помощью пары функций воздействия среды, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

Введем следующие три положительных безразмерных параметра:

$$\mu_1 = 2 \frac{B}{mn_0} > 0, \quad \mu_2 = \sigma n_0 = \sigma \sqrt{\frac{AB}{I}} > 0, \quad \mu_3 = \frac{BH}{In_0} = \sqrt{\frac{B}{AI}} H > 0.$$

1.3. Об устойчивости свободного торможения твердого тела в сопротивляющейся среде. Выполняя достаточно стандартную процедуру для аэро- или гидродинамики [10,16,20,21], а именно, вводя новую независимую переменную (пройденный путь q точки D) по формуле $dq = vdt$, означающую введение нового дифференцирования, систему (1.3)–(1.5) можно переписать в следующем виде:

$$v' = \Psi(\alpha, \omega)v, \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + \sigma\omega^2 \sin \alpha + \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha - \frac{\sigma}{I} H \omega s(\alpha) \cos \alpha, \\ \omega' &= \frac{1}{I} F(\alpha) + \sigma\omega^3 \cos \alpha - \frac{\sigma}{I} \omega F(\alpha) \sin \alpha + \omega \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha - \\ &\quad - \frac{B}{I} H \omega \cos \alpha + \frac{\sigma}{I} H \omega^2 s(\alpha) \sin \alpha, \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma\omega^2 \cos \alpha + \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha - \frac{\sigma}{I} H \omega s(\alpha) \sin \alpha,$$

где штрихом обозначено дифференцирование по q , $\omega = d\varphi/dq$, $F(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha)$.

Два последних уравнения (1.12) системы (1.11), (1.12) образуют независимую подсистему второго порядка на фазовом цилиндре $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$.

Как и выше, речь пойдет об исследовании устойчивости тривиального решения системы (1.12), которое, очевидно, и соответствует прямолинейному поступательному торможению (невозмущенному движению).

Выпишем соответствующее характеристическое уравнение возле начала координат: $\lambda^2 - \lambda[2B/m + \sigma n_0^2 - BH/I] + (B/m + \sigma n_0^2)(B/m - BH/I) + n_0^2(1 + \sigma BH/I) = 0$.

Предложение 1. Пусть выполнено неравенство

$$|\mu_3 - \mu_2| < 2. \quad (1.13)$$

Тогда при $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$ ($\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$) тривиальное решение системы (1.12) асимптотически устойчиво (является отталкивающим).

Далее, для возможного рождения предельного цикла около начала координат исследуем устойчивость тривиального решения системы (1.12) при критическом сочетании параметров $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$.

Введем следующий вспомогательный индекс [13,22] (здесь $s_2 = s''(0)$, $f_3 = f'''(0)$):

$$In = -5\mu_2 - \mu_1 + \frac{\sigma f_3}{In_0} + 2 \frac{s_2}{mn_0} - \frac{Hs_2}{In_0} + 8\mu_2 \frac{1 + \mu_1^2/4}{(1 + \mu_2(\mu_1 + \mu_2))^2} + \\ + \mu_2 \frac{H}{In_0} (5B - 3s_2) \frac{\mu_2 + \mu_1/2}{1 + \mu_2(\mu_1 + \mu_2)} + 12\mu_2 \left(\frac{\mu_2 + \mu_1/2}{1 + \mu_2(\mu_1 + \mu_2)} \right)^2.$$

Важно заметить, что только что введенный индекс In конечно же связан с ляпуновскими величинами, однако в явном виде ими не является.

Предложение 2. Если $In < 0$ ($In > 0$) и при этом выполнено неравенство (1.13), то начало координат фазовой плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$ системы (1.12) при критическом сочетании параметров $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$ является слабым устойчивым (неустойчивым) фокусом.

Теорема 1. Пусть для системы (1.12) выполнено неравенство (1.13). Тогда:

1) Если $In < 0$, то для любых фиксированных μ_1, μ_2 найдутся такие $\delta_1, \delta_2 > 0$, что при $\mu_3 \in (\mu_1 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 + \delta_1)$ начало координат является сильным устойчивым фокусом; при $\mu_3 \in (\mu_1 + \mu_2 - \delta_2, \mu_1 + \mu_2)$ начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окруженным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением μ_3 от $\mu_1 + \mu_2$ до $\mu_1 + \mu_2 - \delta_2$ как $\sqrt{|\mu_1 + \mu_2 - \mu_3|}$.

2) Если $In > 0$, то для любых фиксированных μ_1, μ_2 найдутся такие $\delta_1, \delta_2 > 0$, что при $\mu_3 \in (\mu_1 + \mu_2 - \delta_2, \mu_1 + \mu_2)$ начало координат является сильным неустойчивым фоку-

сом; при $\mu_3 \in (\mu_1 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 + \delta_1)$ начало координат является сильным устойчивым фокусом, окруженным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом μ_3 от $\mu_1 + \mu_2$ до $\mu_1 + \mu_2 + \delta_2$ как $\sqrt{|\mu_1 + \mu_2 - \mu_3|}$.

2. Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой

Рассмотрим случай свободного движения (торможения) твердого тела в сопротивляющейся среде с точки зрения глобального нелинейного анализа.

2.1. Начало качественного анализа. Точки покоя систем второго и третьего порядков. В фазовом пространстве $R^2\{\alpha, \omega\}$ системы второго порядка (1.12) (которую повторно приведем чуть ниже) ее точки покоя могут являться проекциями неособых фазовых траекторий трехмерного фазового пространства. Дело в том, что у системы третьего порядка (1.11), (1.12) существуют положения равновесия, которые заполняют одномерные многообразия.

Поэтому вопрос о точках покоя разбивается на два: о точках покоя системы третьего порядка в пространстве $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$ и о точках покоя укороченной системы (1.12) на плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$ или на фазовом цилиндре $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$.

Точки покоя системы третьего порядка. Искомые точки покоя будут заданы системами с положительными параметрами v_1, v_2, v_3 :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = 0, \quad v = v_1, \quad (2.1)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = -\frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0, \quad v = v_2, \quad (2.2)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0, \quad v = v_3. \quad (2.3)$$

Системы (2.1)–(2.3) задают в пространстве $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$ одномерные многообразия (прямые), сплошь заполненные точками покоя системы (ср. с [12, 15]).

Тривиальные и нетривиальные точки покоя системы второго порядка на плоскости. У системы (1.12) существуют точки покоя на плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$, которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha = 2\pi k, \quad k \in Z; \quad \omega = 0, \quad (2.4)$$

$$\alpha = (2k + 1)\pi, \quad k \in Z; \quad \omega = 0, \quad (2.5)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = 0, \quad (2.6)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0, \quad (2.7)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = -\frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0. \quad (2.8)$$

Системы (2.6), (2.7), (2.8) и только они задают на фазовой плоскости точки покоя, в которые ортогонально проектируются многообразия положений равновесия (2.1), (2.2), (2.3) соответственно.

Системы (2.4), (2.5), и только они, задают точки, в которые ортогонально проектируются частные решения вида $v(q) = v^0 e^{-\frac{B}{m}q}$, $v^0 = v(0)$; $\alpha(q) \equiv \pi k$, $k \in Z$; $\omega(q) \equiv 0$, при четном k соответствующие прямолинейному поступательному торможению.

Точки покоя (2.4)–(2.8) назовем тривиальными положениями равновесия (ТПР). Наряду с ТПР могут существовать точки покоя, соответствующие нетривиальным частным решениям общей системы (1.2)–(1.5).

Определение 1. Нетривиальными положениями равновесия (НПР) системы (1.12) на плоскости называются точки покоя, не лежащие на прямых $\{(\alpha, \omega) \in R^2: \omega \sin \alpha \cos \alpha = 0\}$.

Нетривиальные положения равновесия системы второго порядка, соответствующие нетривиальным частным решениям. Рассмотрим для простоты систему (1.12) при выполнении условий (1.8), (1.9). Аналогично может быть рассмотрена система более общего вида (1.12). Необходимым условием существования НПР является их выражение системой

$$\omega = a \sin \alpha, \quad [\sigma a^2 - \sigma n_0^2 + \mu_2 \mu_3] \cos^2 \alpha - \frac{B}{m} \cos \alpha + a(1 - \sigma a) = 0, \quad (2.9)$$

причем

$$a = a_{\pm} = \frac{n_0}{2(1 + \mu_2 \mu_3)} \left[\mu_2 + \mu_3 \pm \sqrt{(\mu_2 + \mu_3)^2 - 4} \right]. \quad (2.10)$$

Следствие 1. При выполнении условий (1.13), (1.8), (1.9) НПР для рассматриваемой системы не существуют.

Замечание 1. Если у системы более общего вида (1.12) существуют НПР, то они удовлетворяют уравнению

$$\omega^2 \left[1 + \frac{\sigma}{I} H \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \right] - \omega \left[\frac{\sigma F(\alpha)}{I \cos \alpha} + \frac{1}{I} H \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \sin \alpha \right] + \frac{1}{I} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} \sin \alpha = 0. \quad (2.11)$$

Дискриминант уравнения (2.11) отрицателен, если для любого α

$$\left[\frac{\sigma}{I} \frac{F(\alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1}{I} H \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \right]^2 < \frac{4}{I} \frac{F(\alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha}. \quad (2.12)$$

Таким образом, у системы (1.12) при выполнении неравенства (2.12) для любого α не существуют НПП. При выполнении же условий (1.8), (1.9) условие (2.12) эквивалентно неравенству (1.13).

Если неравенство (2.12) не выполнено, то, как уже указывалось, у системы второго порядка (1.17) (например, при условиях (1.9), (1.10)) могут существовать положения равновесия (α_0, ω_0) , необходимым образом удовлетворяющие системе (2.9), (2.10).

Замечание 2. У системы (1.11), (1.12) существуют частные решения вида

$$\begin{aligned} v(q) &= v^0 e^{\kappa q}, \quad v^0 = v(0), \quad \kappa < 0, \\ \alpha(q) &\equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha(0) \neq \pi k, \quad k \in Z, \\ \omega(q) &\equiv \omega_0, \quad \omega_0 = \omega(0). \end{aligned}$$

Замечание 3. У системы (1.2)–(1.5) существуют частные решения вида

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{v_0}{1 - v_0 \kappa t}, \quad v_0 = v(0), \\ \alpha(t) &\equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha(0), \\ \Omega(t) &= \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{\Omega_0}{1 - v_0 \kappa t}, \quad \Omega_0 = \Omega(0), \end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_0 - \frac{\Omega_0}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t), \quad \phi_0 = \phi(0), \\ \xi(t) &= x_0 + \frac{v_0}{\Omega_0} \sin(\alpha_0 + \phi_0) - \frac{v_0}{\Omega_0} \sin\left(\alpha_0 + \phi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t)\right), \quad \xi_0 = \xi(0), \\ \eta(t) &= y_0 - \frac{v_0}{\Omega_0} \cos(\alpha_0 + \phi_0) + \frac{v_0}{\Omega_0} \cos\left(\alpha_0 + \phi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t)\right), \quad \eta_0 = \eta(0). \end{aligned}$$

Замечание 4. Траектория центра D пластины при движении на плоскости $R^2\{\xi, \eta\}$, соответствующая последним частным решениям системы (1.2)–(1.5), – окружность с центром в точке $(\xi_0 + v_0 \sin(\alpha_0 + \phi_0) / \Omega_0, \eta_0 - v_0 \cos(\alpha_0 + \phi_0) / \Omega_0)$ и радиусом v_0 / Ω_0 .

2.2. Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа. *Топологическая классификация ТПП системы на плоскости.* Рассмотрим возле точки (α_0, ω_0) систему (1.12) при условиях (1.8), (1.9). Нетрудно показать, что имеет место

Предложение 3.

1) Точки покоя (2.4) являются седлами, если $2\mu_1(\mu_3 - \mu_2) > 4 + \mu_1^2$; отталкивающими точками, если $2\mu_1(\mu_3 - \mu_2) < 4 + \mu_1^2$, $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$; притягивающими точками, если $2\mu_1(\mu_3 - \mu_2) < 4 + \mu_1^2$, $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$. Причем при выполнении последних двух групп условий данные точки покоя являются фокусами, если $|\mu_2 - \mu_3| < 2$ и узлами, если $|\mu_2 - \mu_3| > 2$.

2) Точки покоя (2.5) являются седлами, если $2\mu_1(\mu_2 - \mu_3) > 4 + \mu_1^2$; отталкивающими точками, если $2\mu_1(\mu_2 - \mu_3) < 4 + \mu_1^2$, $\mu_3 > -\mu_1 + \mu_2$; притягивающими точками, если $2\mu_1(\mu_2 - \mu_3) < 4 + \mu_1^2$, $\mu_3 < -\mu_1 + \mu_2$. Причем при выполнении последних двух групп условий данные точки покоя являются фокусами, если $|\mu_2 - \mu_3| < 2$ и узлами, если $|\mu_2 - \mu_3| > 2$.

3) Точки покоя (2.6) являются седлами.

4) Точки покоя (2.7), (2.8) всегда являются притягивающими: устойчивыми фокусами, если $\mu_1\mu_2 < 4$; устойчивыми узлами, если $\mu_1\mu_2 > 4$; устойчивыми вырожденными узлами, если $\mu_1\mu_2 = 4$.

Расслоения фазового пространства и его симметрии. В силу отделения от системы третьего порядка (1.11), (1.12) независимой подсистемы второго порядка (1.12) фазовые траектории в пространстве $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$ лежат на поверхностях, являющихся двумерными цилиндрами. В частности, если существует во всем фазовом пространстве полный набор первых интегралов системы (1.12), то хотя бы один из них является функцией переменных (α, ω) , а поэтому задает семейство цилиндров в пространстве $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$.

Замечание 5. Поскольку $d\phi/dt = v d\phi/dq$, то в фазовом пространстве $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \Omega\}$ системы (1.3)–(1.5) данному первому интегралу будет соответствовать первый интеграл, который зависит от всех трех фазовых переменных.

Благодаря вышеописанной редукции, удобнее строить фазовый портрет системы (1.11), (1.12) в пространстве $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$ с помощью фазового портрета системы (1.12) на плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$. Последний не будет являться частью портрета в пространстве $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$ в теоретико-множественном смысле, а будет ортогональной проекцией фазового портрета на плоскость $\{(\alpha, \omega, v) \in R^3 : v = \text{const}\}$.

Поэтому становятся возможными поднятие фазовых траекторий с плоскостей $R^2\{\alpha, \omega\}$ в пространство $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$ и получение трехмерных фазовых портретов искомой системы.

Замечание 6. Поскольку $v > 0$, то движение возможно лишь в области

$$B' = \{(\alpha, \omega, v) \in R^3 : v > 0\} \subset R^3\{\alpha, \omega, v\}.$$

Если формально сделать замену переменных в области B' по формуле $\bar{p} = \ln v$, то полученное векторное поле в фазовом пространстве $R^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$ не зависит от \bar{p} , т.е.

имеет цилиндрическую природу более высокого порядка и ортогонально проектируется на все семейство плоскостей $\{(\alpha, \omega, \bar{p}) \in R^3 : \bar{p} = \text{const}\}$. При этом положения равновесия на плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$ полностью совпадают с объединением как проекций многообразий особых точек, так и проекций неособых фазовых траекторий области B' .

Замечание 7. Для полного решения вопроса о поднятии траекторий в трехмерное фазовое пространство необходимо выяснить знак проекции векторного поля в $R^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$ на \bar{p} -ось либо на v -ось в области B' .

Рассмотрим поверхность M , являющуюся объединением поверхностей $M = M^0 \cup \overline{M}$, где $M^0 = \{(\alpha, \omega, v) \in B' : \Psi(\alpha, \omega) \cos^{-1} \alpha = 0\}$ (там, где $\cos \alpha = 0$, доопределим поверхность по непрерывности), а поверхность \overline{M} , в свою очередь, представляется в виде объединения плоскостей $\overline{M} = \bigcup_{s \in Z} M_s$, где $M_s = \{(\alpha, \omega, v) \in B' : \alpha = \pi/2 + \pi s\}$.

Перечисленные поверхности являются цилиндрами, которые разрезают фазовое пространство на области, в каждой из которых проекция векторного поля на v -ось имеет фиксированный знак. На самой поверхности M (и только на ней) проекция векторного поля на v -ось обращается в нуль.

Замечание 8. Для любых $F \in \Phi$, $s \in \Sigma$ (свойство (1.10)) векторное поле системы (1.12) обладает свойством центральной симметрии относительно точек $(\pi k, 0)$, $k \in Z$, т.е. в координатах (α, ω) векторное поле меняет направление при замене

$$\begin{pmatrix} \alpha + \pi k \\ \omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\alpha + \pi k \\ -\omega \end{pmatrix}, \quad k \in Z.$$

Таким образом, векторное поле системы (1.11), (1.12) третьего порядка обладает симметрией относительно лучей $\{(\alpha, \omega, v) \in B' : \alpha = \pi k, \omega = 0\}$.

2.3. Классификация фазовых портретов системы на двумерном цилиндре для некоторой области параметров. Поведение поля системы возле точек $(0,0)$ и $(\pi,0)$ определяет многие основные топологические особенности глобального фазового портрета системы. Будем изучать те динамические системы, которые допускают выполнение равенства (2.12) лишь на ТПР.

Бесконечномерное пространство параметров системы, при котором выполнено только что указанное свойство неравенства (2.12), обозначим через J_1 . Данное неравенство, как уже указывалось, трансформируется в неравенство (1.13), если $F = F_0 \in \Phi$, $s = s_0 \in \Sigma$ (случаи (1.8), (1.9)).

Так, например, в случаях (1.8), (1.9) в общем бесконечномерном пространстве физически допустимых параметров системы (1.12) в основном будем изучать область

$$\{(\mu_1, \mu_2) \in R^2 : \mu_1 > 0, \quad 0 < |\mu_2 - \mu_3| < 2\}.$$

Для проведения классификации фазовых портретов системы на плоскости или цилиндре необходимо ответить на следующие вопросы.

А) Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве α - и ω -предельных множеств бесконечно удаленные точки.

Можно доказать существование и единственность таких траекторий, которые уходят на бесконечность. Их α - и ω -предельными множествами являются бесконечно удаленные точки $(\pi k, \pm\infty)$, $k \in Z$ и только они [13, 23].

В) Ввиду рассмотрения динамических систем на цилиндре – наличие замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий, не стягиваемых по цилиндру в точку (охватывающих цилиндр).

Можно также показать, что при этом у системы (1.12) отсутствуют замкнутые фазовые характеристики, охватывающие фазовый цилиндр [13,24,25].

С) Существование замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых по цилиндру в точку. В частности, существование неизолированных периодических траекторий или предельных циклов.

Заметим, что, в силу 2π -периодичности векторного поля системы по α , последняя задача сводится к отысканию замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий лишь вокруг точек покоя индекса 1 [13,24,25].

Д) Основным вопросом классификации портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющихся гиперболических седел.

Данные сепаратрисы разделяют всю фазовую плоскость на области без положений равновесия. Ввиду последнего фазовые портреты мгновенно достраиваются.

Ответ на последний вопрос требует доказательства ряда вспомогательных утверждений, которые будут рассмотрены ниже.

Некоторые свойства ключевых фазовых траекторий системы (1.12) в области параметров J . Введем следующее семейство полос на фазовом цилиндре:

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\},$$

при этом $P_{(-\pi/2, \pi/2)} = P$, $P_{(\pi/2, 3\pi/2)} = P'$.

Следующее утверждение относится, вообще говоря, ко всему бесконечномерному пространству параметров и базируется на наличии топографической системы Пуанкаре (ТСП) в полосе P [13,24,25].

Предложение 4. Устойчивая сепаратриса в полосе P' для точки $(\pi/2, 0)$ имеет в качестве α -предельного множества начало координат.

Предложение 4 доказывается методом ТСП (см. также [13,24,25]).

Следствие 2. Ввиду центральной симметрии поля поведение других аналогичных сепаратрис подчиняется аналогичным законам (рис. 2-9).

Следствие 3. У системы (1.12) в полосе P' не существует любых замкнутых характеристик, составленных из траекторий.

2.4. Многопараметрическое семейство фазовых портретов системы на двумерном цилиндре. Итак, динамическая система (1.12) имеет на двумерном фазовом цилиндре следующие положения равновесия (рис. 2-9):

$$(0,0) \text{ и } (\pi,0), (\pi/2,0) \text{ и } (3\pi/2,0), (\pi/2,1/\sigma) \text{ и } (-\pi/2,-1/\sigma). \quad (2.13)$$

Теорема 2. В бесконечномерном пространстве параметров системы (1.12) имеется область J_2 положительной меры, которая соответствует следующему поведению траекторий данной системы:

- 1) других положений равновесия, кроме как (2.13), система (1.12) не имеет;
- 2) в полосе Π' система (1.12) не имеет замкнутых фазовых характеристик;
- 3) в полосе Π около положения равновесия $(0,0)$ при изменении ее параметров может происходить бифуркация рождения единственного устойчивого предельного цикла из слабого фокуса (см. теорему 1).

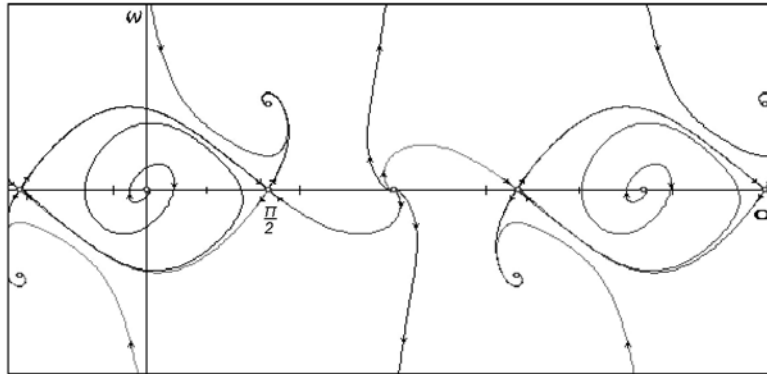


Рис.2.

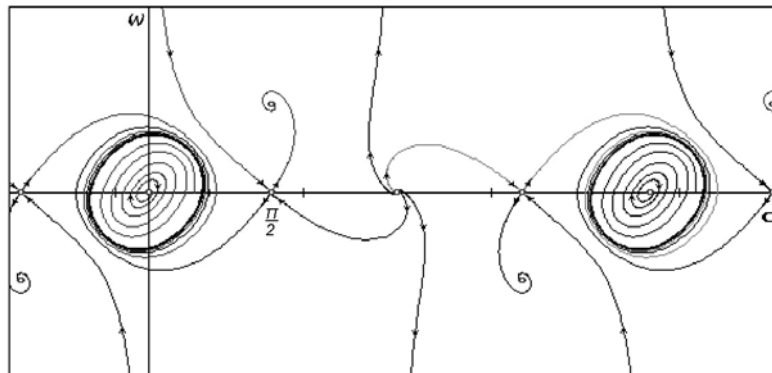


Рис.3.

Итак, в данной работе рассматривается лишь следующая бесконечномерная область параметров системы (1.12):

$$J = J_1 \cap J_2. \tag{2.14}$$

Замечание 9. Таким образом, области параметров (2.14) соответствует следующее поведение фазовых траекторий возле положений равновесия (2.13):

- 1) положение равновесия $(\pi, 0)$ является отталкивающим;
- 2) положение равновесия $(0, 0)$ является отталкивающим, если $\mu_1 > \mu_3 - \mu_2$, и притягивающим, если $\mu_1 \leq \mu_3 - \mu_2$, при этом, если $\mu_1 = \mu_3 - \mu_2$, то оно является слабым притягивающим фокусом.

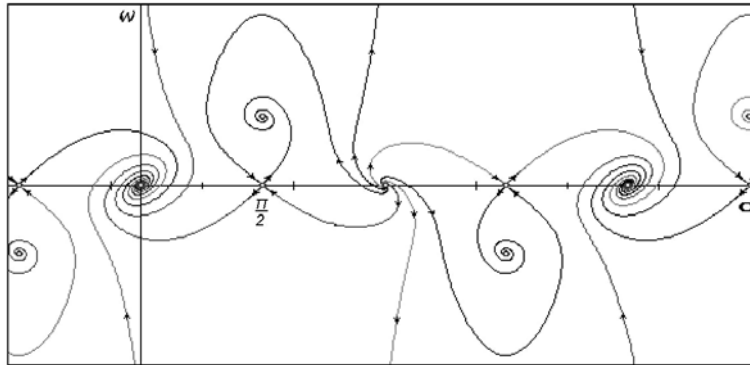


Рис.4.

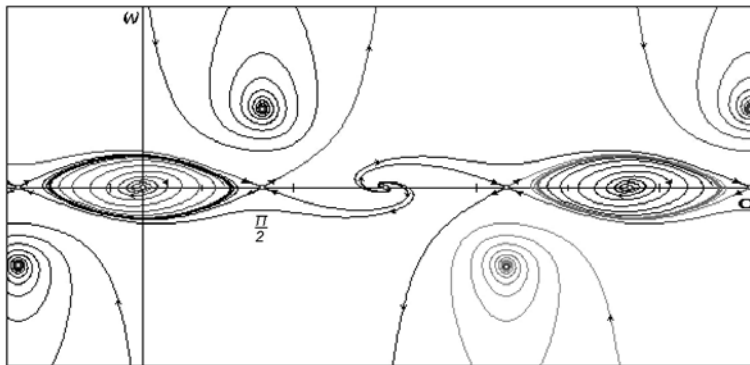


Рис.5.

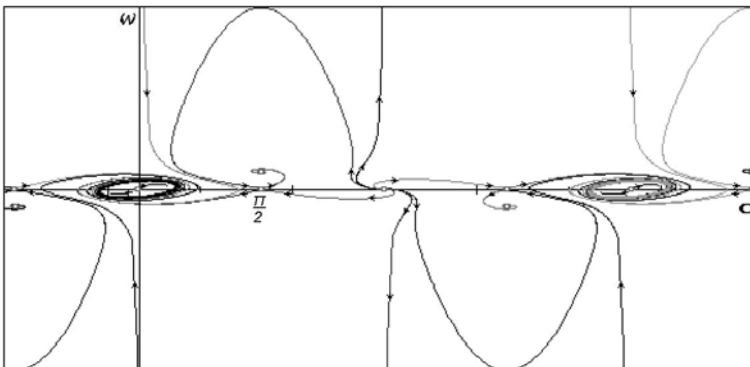


Рис.6.

Замкнутые кривые, состоящие из фазовых траекторий системы (1.12), для области параметров (2.14) могут существовать лишь в полосе Π [13,24,25] (рис. 2–9).

Как уже отмечалось, основным вопросом классификации портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющихся гиперболических седел.

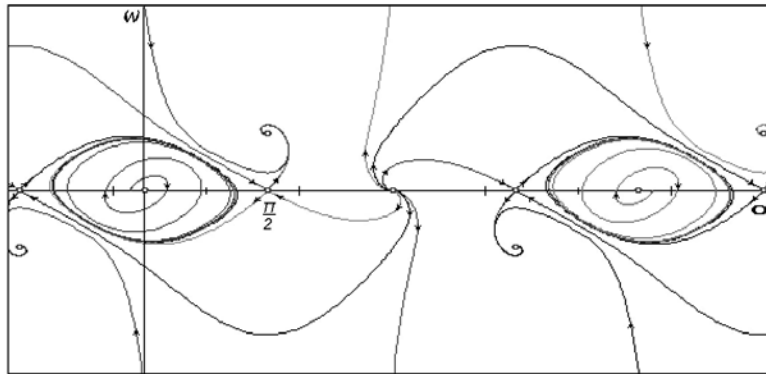


Рис.7.

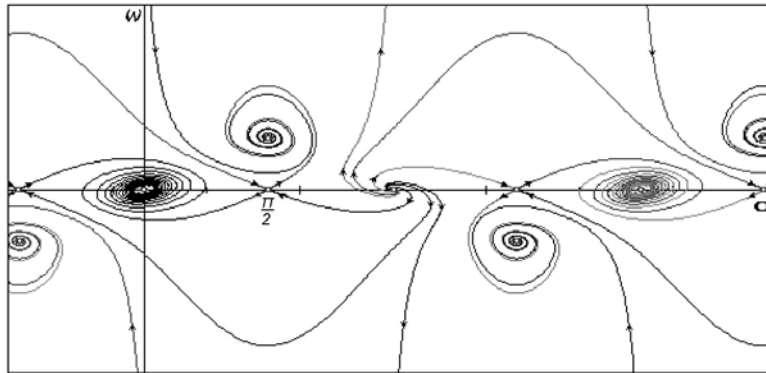


Рис.8.

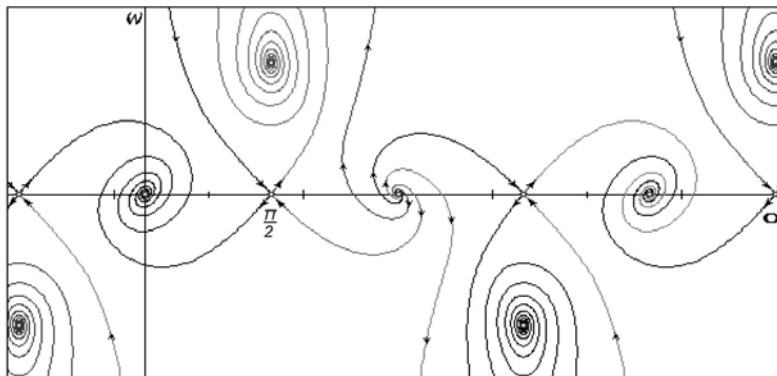


Рис.9.

Рассмотрим ключевой вопрос – о глобальном поведении следующих сепаратрис:

- а) выходящей из точки $(\pi/2, 0)$ в полосу Π' ;
- б) входящей в точку $(-\pi/2, 0)$ из полосы Π ;
- в) выходящей из точки $(\pi/2, 0)$ в полосу Π .

Под независимостью поведения данных трех сепаратрис будем понимать ситуа-

цию, при которой они имеют предельные множества, независимо выбираемые из области определения всех логически возможных их предельных множеств, принимая во внимание характер расположения всех изоклин системы и имеющихся положений равновесия.

Теорема 3. *Глобальное поведение любых двух сепаратрис из а)–в) независимо, т.е. поведение любой из трех сепаратрис определяется через поведение двух других [13,14].*

Выберем в качестве пары ключевых сепаратрис, поведение которых независимо, сепаратрисы а) и б) (рис. 2–9).

Определение 2. *Индексом k_1 сепаратрисы а) назовем рациональное число, выбираемое из множества $\{r \in \mathbb{Q} : r = 1/4 + m, r = 1/2 + m, m \in \mathbb{N}_0\}$.*

Скажем, что $k_1 = r$, если сепаратриса а) имеет в качестве ω -предельного множества точку $(2\pi r, 1/\sigma)$, если $r = 1/4 + m$, и точку $(2\pi r - 0, +\infty)$, если $r = 1/2 + m$.

Определение 3. *Индексом k_2 сепаратрисы б) назовем натуральное число j , выбираемое из множества $\{j \in \mathbb{N} : j = 1, 2, 3, 4, 5\}$.*

Скажем, что $k_2 = j$, если сепаратриса б) имеет в качестве α -предельного множества точку $(0,0)$ или устойчивый предельный цикл ($j = 1$); точку $(\pi/2, 0)$ ($j = 2$); точку $(\pi, 0)$ ($j = 3$); точку $(-0, -\infty)$ ($j = 4$); точку $(-\pi, 0)$ ($j = 5$).

Нетрудно установить, что глобальное поведение сепаратрисы в) действительно зависит от индексов k_1 и k_2 , т.е. от поведения сепаратрис а) и б) в каждом конкретном случае (см. также [8, 12–14,15]).

Замечание 10. Если фиксировать индекс k_1 , то индекс k_2 может в некоторых случаях выбираться из более узкого множества, описанного в определении 3.

Теорема 4. *Для любого k из (возможно усеченной) области определения допустимо соответствующее глобальное поведение сепаратрис а) и б).*

Таким образом, определения 2 и 3 корректны, и строится бесконечное семейство фазовых портретов, содержащее портреты с предельными циклами, при этом все портреты имеют различные качественные свойства.

Теорема 4 позволяет сделать следующий вывод: любое достаточно малое возмущение системы, описывающей физический маятник на плоскости, дающее искомую систему в рассматриваемой области параметров, бесконечно много раз перестраивает глобальный тип гамильтонова фазового портрета физического маятника (подробнее см. в [13,14,26]).

Некоторые из портретов (индекс k принимает значения $(1/4,2)^*$, $(1/4,4)^*$, $(1/4,5)$, $(1/2,3)^*$, $(1/4,5)^*$, $(1/4,3)^*$, $(1/4,3)$, $(1/4,4)$) показаны соответственно на рис.2–9. Здесь звездочкой помечены фазовые портреты, имеющие в полосе П (простые или сложные) предельные циклы.

Для системы вида (1.12) при выполнении условий (1.8), (1.9) имеем, таким образом, некоторое трехпараметрическое семейство фазовых портретов, зависящее от параметров μ_1, μ_2, μ_3 .

Двухпараметрическое семейство, построенное в [15], не содержит предельных циклов, в отличие от только что построенного семейства. Но эти два семейства объединяет

тот факт, что каждому значению параметров задачи соответствует пара независимых индексов (в данном случае k_1, k_2), «кодирующих» топологический тип фазового портрета.

3. Подготовка данных для проведения натуральных экспериментов

3.1. Задача о входе в воду однородных круговых цилиндров. Вернемся далее к задаче о входе в воду однородных круговых цилиндров. Значения физических параметров цилиндров, при которых прямолинейное поступательное торможение в принципе может стать устойчивым, имеет вид $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$ (см. выше) или

$$h \frac{mD^2}{I} - 2 - k \frac{m\sigma D}{I} > 0. \quad (3.1)$$

При этом если величина, стоящая в левой части неравенства (3.1), равна нулю, то будем говорить о критическом случае.

Напомним, что здесь D – диаметр кругового цилиндра, σ – расстояние от центра масс до переднего торца, I, m – инерционно-массовые характеристики цилиндра, постоянные k и h – безразмерные параметры воздействия среды на цилиндр (см. [6,16]).

Для параметров k, h воздействия воды на тело с передним круглым торцом уже была принята оценка $k = h = 0.1$. Таким образом, условие (3.1) позволяет попытаться «сконструировать» твердое тело – круговой цилиндр, для которого прямолинейное поступательное торможение может стать устойчивым. Для этого осталось выбрать параметры σ, D, I, m цилиндра, исходя из условия (3.1).

Анализируя неравенство (3.1), можно сделать следующий вывод. Инерционно-массовые параметры однородных цилиндров таковы, что неравенство (3.1) при $h=0.1$ удовлетворить невозможно. Действительно, при данном значении $h=0.1$ левая часть (3.1) представляется в виде

$$F_1(k, h, m, I, \sigma, D) \Big|_{k=h=0,1} = h \frac{mD^2}{I} - k \frac{m\sigma D}{I} - 2 \Big|_{k=h=0,1} = F_2(\sigma, D).$$

правая часть которого, в свою очередь, с точностью до положительного множителя всегда принимает следующее отрицательное значение: $-3D^2 - 12\sigma D - 80\sigma^2$, что соответствует экспоненциальной неустойчивости прямолинейного поступательного торможения. Здесь учитывается, что центральный момент инерции цилиндра представляется в виде

$$I = m \left(\frac{\sigma^2}{3} + \frac{D^2}{16} \right).$$

Более того, если исследовать левую часть (3.1) при изменении значения h , то она может достигать нуля лишь при следующем наименьшем критическом значении h_* :

$$\left(10h_* - \frac{5}{4} \right) - \frac{\sigma}{D} - \frac{20}{3} \frac{\sigma^2}{D^2} = 0, \quad \frac{\sigma}{D} = \frac{\sigma}{D}, \quad (3.2)$$

превосходящем принятое ранее значение $h = 0.1$ и равном

$$h_* = 0.125. \quad (3.3)$$

Условия (3.2) и (3.3) позволяют сделать следующий промежуточный вывод. Прямолинейное поступательное торможение однородного кругового цилиндра в воде не может быть устойчивым по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости.

Тем не менее, отметим, что задача исследуемой устойчивости решается в соответствии с ранее принятой оценкой на данный коэффициент: $h = 0.1$.

3.2. Задача о входе в воду полых круговых цилиндров. Поставим теперь задачу определения геометрических и инерционно-массовых параметров составного твердого тела – полого цилиндра – для достижения указанной устойчивости. А именно, представим себе некоторый полый цилиндр («гильзу», рис.10), геометрические и инерционно-массовые характеристики которого в дальнейшем приведут к выполнению искомого неравенства при уже фиксированном нами значении $h = 0.1$.

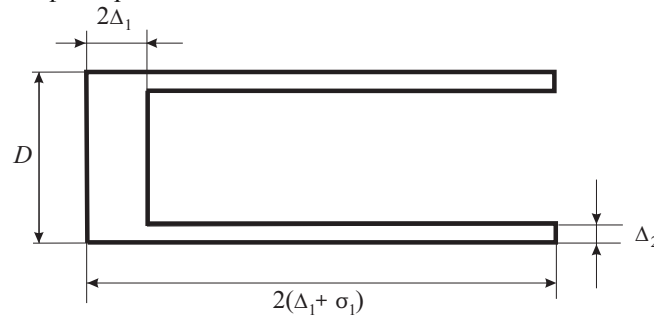


Рис.10.

Исследуемое составное твердое тело представляет собой переднюю однородную часть (цилиндр) диаметра D и высоты $2\Delta_1$, который продолжается боковыми стенками длины $2\sigma_1$ и ширины Δ_2 (рис.10).

Вычислим параметры составного тела, входящие в неравенство (3.1), – расстояние до центра масс до переднего круглого торца σ , а также (центральный) радиус инерции тела ρ . Данные величины выражаются следующими формулами:

$$\sigma = \frac{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)(\sigma_1 + 2\Delta_1)}{\Delta_1 D^2 + 4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)}, \quad (3.4)$$

$$\rho^2 = \frac{\Delta_1 D^2}{4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2) + \Delta_1 D^2} \left\{ \frac{4}{3} \Delta_1^2 + \frac{D^2}{16} - 2\Delta_1 \sigma + \sigma^2 \right\} + \frac{4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)}{4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2) + \Delta_1 D^2} \times \left\{ \frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{D^2}{8} - \frac{\Delta_2 (D - \Delta_2)}{4} + \frac{D^4 \Delta_1^2 (\sigma_1 + \Delta_1)^2}{(4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2) + \Delta_1 D^2)^2} \right\}. \quad (3.5)$$

Можно использовать полные равенства (3.4), (3.5), но это не имеет решающего значения, поскольку достаточно принять следующие допущения:

$$\Delta_1^2 \approx \Delta_2^2 \approx \Delta_1 \Delta_2 \approx 0. \quad (3.6)$$

Далее, все геометрические параметры будем считать безразмерными:

$$\overline{\Delta}_1 = \frac{\Delta_1}{D}, \quad \overline{\Delta}_2 = \frac{\Delta_2}{D}, \quad \overline{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{D},$$

при этом в дальнейшем, для простоты записи, везде черту опустим.

Тогда левая часть (3.1) при допущениях (3.6) при $h=0.1$ в критическом случае приводит к равенству

$$\Delta_1 \left(-\frac{1}{4} \right) + \sigma_1 \Delta_2 \left(\frac{7}{2} \right) - 4\sigma_1^2 \Delta_2 = 0. \quad (3.7)$$

Найдем критическое значение σ_1^* безразмерной длины боковых стенок составного тела. Оно равно

$$\sigma_1^* = \frac{7}{16} + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{49}{4} - 4 \frac{\Delta_1}{\Delta_2}}. \quad (3.8)$$

Из равенства (3.8) видно, что величина Δ_1 / Δ_2 может колебаться лишь в следующих пределах: $0 < \Delta_1 / \Delta_2 < 49 / 16 = 3.0625$.

Формально, при $\Delta_1 \rightarrow 0$ (передний торец стремится к бесконечно тонкому диску) искомое критическое значение стремится к

$$\sigma_1^* = 0.875. \quad (3.9)$$

В частном интересном случае при $\Delta_1 = \Delta_2$ оно найдется в виде

$$\sigma_1^* = \frac{1}{16} (7 + \sqrt{33}) \approx 0.797, \quad (3.10)$$

а также при $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \rightarrow \frac{49}{16}$ искомое критическое значение стремится к

$$\sigma_1^* = 0.4375. \quad (3.11)$$

Таким образом, можно выбирать значение σ_1^* в пределах $0.4375 \leq \sigma_1^* \leq 0.875$, не смотря на то, что (3.9)–(3.11) затрагивают лишь удобные частные случаи.

Так, в частности, если принять $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.1$ (т.е., если $D = 30$ мм, то $\Delta_1 = \Delta_2 = 3$ мм), тогда размерная длина боковых стенок должна быть равна $2\sigma_1 \approx 1.6D \approx 47.8$ мм, а общая «критическая» длина всего составного тела составит $47.8 + 6 \approx 54$ мм.

В заключение заметим, что если же для проведения эксперимента потребуется «скорректировать» постоянную h воздействия среды на тело, то искомое выражение для величины σ_1^* представится следующим образом. Линеаризованное критическое равенство (3.7) переписывается в виде

$$\Delta_1 \left(10h - \frac{5}{4} \right) + \sigma_1 \Delta_2 \left(40h - \frac{1}{2} \right) - 4\sigma_1^2 \Delta_2 = 0,$$

а искомая величина σ_1^* найдется из равенства

$$\sigma_1^*(h) = \frac{1}{8} \left\{ \left(40h - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(40h - \frac{1}{2} \right)^2 + 16 \left(10h - \frac{5}{4} \right) \frac{\Delta_1}{\Delta_2}} \right\}.$$

3.3. Возможности движения твердого тела в сопротивляющейся среде с ограниченными углами атаки. Как уже отмечалось в предыдущих разделах, если параметры задачи допускают наличие критического случая (левая часть равенства (3.1) равна нулю), то в зависимости от старших производных функций воздействия среды y_N и s прямолинейное поступательное торможение тела может быть или устойчивым, или неустойчивым по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости.

Выше (теорема 2) найдены достаточные условия для такой устойчивости или неустойчивости, включающие неравенства на старшие производные функций воздействия среды. Но главная трудность заключается в том, что измерить в эксперименте данные производные в явном виде не представляется возможным.

Продемонстрируем, как можно исследовать поведение тела около прямолинейного поступательного торможения (т.е. устойчивые или неустойчивые угловые колебания), используя экспериментальную информацию, тем самым неявно оценивая старшие производные функций воздействия среды.

Сначала отметим, что следующее неравенство, гарантирующее *колебательную* устойчивость или неустойчивость, по крайней мере в случае предложенных выше изделий, выполнено (можно несколько изменить массу тела, изготавливая изделия из металлов различной плотности):

$$\frac{DI\rho_{жс}}{m^2} < \frac{8k}{c_x\pi}, \quad (3.12)$$

где k известным параметрам добавлены: $\rho_{жс}$ – плотность жидкости (в данном случае воды), $c_x=0.82$ – безразмерный коэффициент лобового сопротивления.

Действительно, в системе СГС неравенство (3.12) эквивалентно $D\rho^2/m < 0.31$, $[m]=г$, $[D]=[\rho]=см$, где ρ – (центральный) радиус инерции, выражаемый формулой (3.5).

Далее, во время проведения эксперимента в случае колебательного характера движения необходимо получение информации не менее чем о *трех* полупериодах с амплитудами a_1, a_2, a_3 (т.е. полутора периодов колебаний). Исследуя значения параметров, близких к критическому случаю, из теоремы 1 о рождении предельных циклов получаем

два вывода об устойчивости ключевого режима – прямолинейного поступательного торможения и о характере угловых колебаний тела (см. ниже I и II).

Сначала сделаем важное замечание о последовательных изменениях значений измеряемых в эксперименте амплитуд a_1, a_2, a_3 .

Замечание 11. Последовательность отношений величин $a_1, a_2, a_3, a_2/a_1, a_3/a_2, \dots$ (и далее, если удастся измерить не три полуколебания, а более) во многом может определить характер колебательного процесса. Так, если величины a_1, a_2, a_3 (a_1, a_2, a_3, \dots) напоминают возрастающую (убывающую) геометрическую прогрессию (в частности, отношения $a_2/a_1, a_3/a_2$ примерно равны), то с долей уверенности можно говорить о достаточно быстром росте (затухании) угловых колебаний. Если же величины a_1, a_2, a_3 возрастают, а их отношения $a_2/a_1, a_3/a_2$ явно убывают, то следует говорить о возможном переходе к угловым колебаниям ограниченной амплитуды.

I. Пусть после проведения натурального эксперимента с параметрами, соответствующими критическому случаю, наблюдаются устойчивые колебания по отношению к углу отклонения. Тогда при малом уменьшении продольной длины тела (см. пример 1 ниже) может возникнуть затухание угловых колебаний (рис.11).

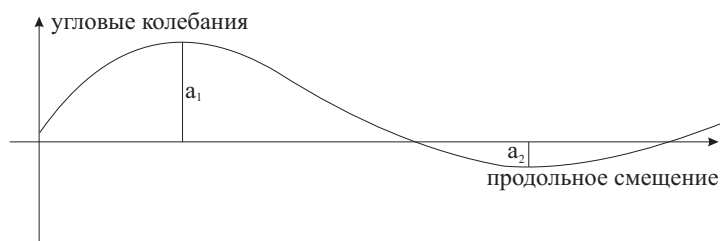


Рис.11.

При малом же увеличении продольной длины тела (см. пример 2 ниже) следует ждать роста угловых колебаний и в дальнейшем могут наблюдаться устойчивые угловые автоколебания тела (рис.12). При этом надо обратить внимание на скорость изменения амплитуды колебаний (см. замечание 11).

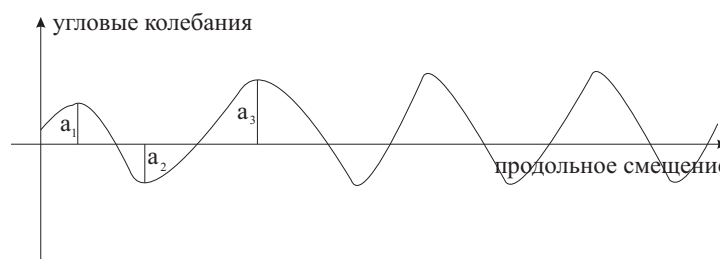


Рис.12.

Более того, проводя эксперимент повторно для изделия из примера 2 при достаточно больших возмущениях начального угла атаки и (или) угловой скорости, возможен переход к устойчивым угловым автоколебаниям с конечными амплитудами (рис.13), аналогичным предыдущему случаю на рис.12.

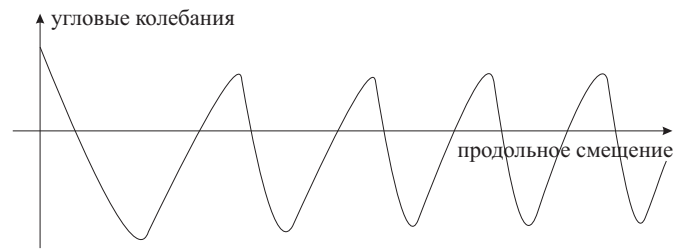


Рис.13.

Пример 1: общая длина тела равна $50 < 54$ (мм).

Пример 2: общая длина тела равна $60 > 54$ (мм).

II. Пусть после проведения натурального эксперимента с параметрами, соответствующими критическому случаю, наблюдается рост угловых колебаний. Тогда при малом уменьшении продольной длины тела (см. пример 1 выше) также можно говорить об устойчивых колебаниях ограниченной амплитуды (т.е. переход от неустойчивых угловых автоколебаний тела, рис.14). При этом надо обратить внимание на скорость изменения амплитуды колебаний (см. замечание 11).

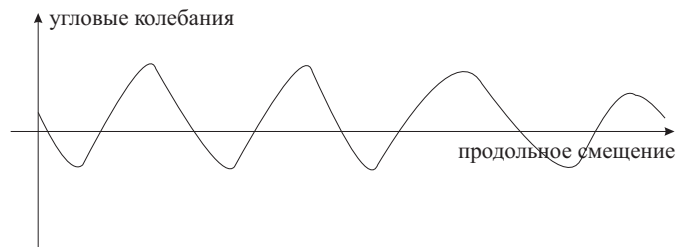


Рис.14.

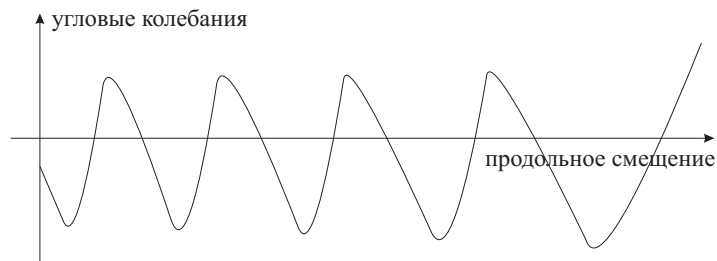


Рис.15.

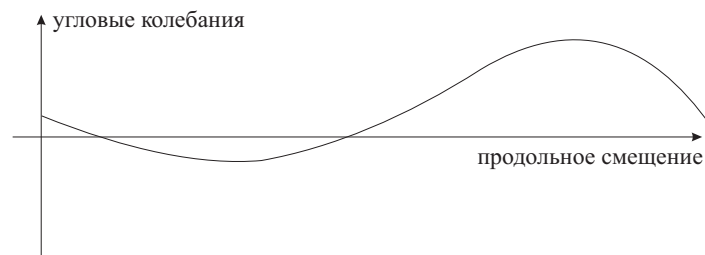


Рис.16.

Более того, проводя эксперимент повторно для изделия из примера 1 при конечных возмущениях начального угла атаки и (или) угловой скорости, возможен переход от неустойчивых автоколебаний к их росту (рис.15). При малом же увеличении продольной длины тела (см. пример 2 выше) следует ждать роста угловых колебаний (рис.16).

При изучении рассматриваемой модели найдены достаточные условия асимптотической устойчивости одного из ключевых режимов – прямолинейного поступательного торможения. В применение к однородным круговым цилиндрам выписаны конкретные оценки на их инерционно-массовые характеристики, при этом учитываются результаты приведенных ранее экспериментов, в том числе по получению безразмерных параметров воздействия воды на них.

В работе также показано, что при некоторых условиях на старшие производные функций воздействия среды (плеча силы воздействия и коэффициента сопротивления) возможно присутствие в системе либо устойчивого, либо неустойчивого автоколебательных режимов движения. При этом непреодолимой сложностью является измерение старших производных данных функций воздействия среды, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и знаки старших производных даже в отдельных точках таких функций нам неизвестны.

В процессе применения разработанной ранее методики исследования диссипативных динамических систем определенного вида, возникающих в задаче о свободном торможении, получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов на двумерном цилиндре квазискоростей, состоящее из бесконечного множества топологически неэквивалентных портретов, вырожденным образом меняющих свой топологический тип при изменении параметров системы. Полученное семейство обладает или устойчивым, или неустойчивым автоколебательным режимами в конечном диапазоне углов атаки. Область физических параметров при этом является множеством конечной меры во всем бесконечномерном пространстве параметров системы, так что полученные портреты являются типичными.

Полученные результаты позволяют сконструировать полые круговые цилиндры – «гильзы», использование которых может обеспечить необходимую устойчивость при проведении дополнительных натурных экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979, 322 с.
2. *Ерошин В.А., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Сб. научн.-метод. статей по теоретич. механ. Вып. 18. – М.: Наука, 1987, с.75–78.
3. *Ерошин В.А., Самсонов В.А., Шамолин М.В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Известия РАН, МЖГ, 1995, №3, с.23–27.
4. *Локишин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. – М.: Ин-т механики МГУ, 1986, 86 с.
5. *Самсонов В.А., Ерошин В.А., Константинов В.А., Макаришин В.М.* Две модельные задачи о движении тела в среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ №3427. – М.: Ин-т механики МГУ, 1987, 27 с.
6. *Самсонов В.А., Шамолин М.В., Ерошин В.А., Макаришин В.М.* Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании. На-

- учный отчет Ин-та механики МГУ № 4396. – М.: Ин-т механики МГУ, 1995, 41 с.
7. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1989, №3, с.51-54.
 8. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4141. – М.: 1991, 48 с.
 9. Самсонов В.А., Шамолин М.В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3969. – М.: Ин-т механики МГУ, 1990, 80 с.
 10. Чаплыгин С.А. Избранные труды. – М.: Наука, 1976, 495 с.
 11. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. – Л.: Изд-во АН СССР, 1933, с.133-135.
 12. Шамолин М.В. К задаче о пространственном торможении твердого тела в сопротивляющейся среде // Известия РАН, МТТ, 2006, №3, с.45-57.
 13. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Изд-во «Экзамен», 2007, 352 с.
 14. Шамолин М.В. Методы анализа классов неконсервативных систем в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой. – М.: МГУ, 2004, докторская диссертация, 329 с.
 15. Шамолин М.В. Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Доклады РАН, 1994, т.337, №5, с.611-614.
 16. Ерошин В.А. Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН, МЖГ, 1992, №5, с.20-30.
 17. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: Физматгиз, 1947, 928 с.
 18. Prandtl L., Betz A. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, b. 4 Lieferung. Munchen–Berlin; R. Oldenburg, 1932, 148 p.
 19. Бивин Ю.К., Викторов В.В., Степанов Л.П. Исследование движения твердого тела в глинистой среде // Изв. АН СССР, МТТ, 1978, №2, с.159-165.
 20. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика продольного и бокового движения. – М.: Машиностроение, 1969, 349 с.
 21. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика самолета. Пространственное движение. – М.: Машиностроение, 1988, 320 с.
 22. Шамолин М.В. Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1992, №2, с.52-56.
 23. Шамолин М.В. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1993, №1, с.68-71.
 24. Шамолин М.В. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1993, №2, с.66-70.
 25. Шамолин М.В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Успехи матем. наук, 1997, 52, вып.3, с.177-178.
 26. Шамолин М.В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, переработанное и дополненное. – М.: Изд-во «Экзамен», 2007, 320 с.

Поступила в редакцию 14.02.11