

## Механика

УДК 531.01+531.552

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ  
В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО  
СО СРЕДОЙМ. В. Шамолин<sup>1</sup>

Исследуется задача плоскопараллельного движения однородного симметричного твердого тела, взаимодействующего со средой лишь через плоский участок его внешней поверхности. При построении силового поля используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности, при этом движение среды не изучается, а рассматривается такая задача динамики твердого тела, в которой его характерное время движения относительно своего центра масс соизмеримо с характерным временем движения самого центра масс.

*Ключевые слова:* твердое тело, сопротивляющаяся среда, система с переменной диссипацией, фазовый портрет.

A problem of plane-parallel motion of a homogeneous symmetric rigid body interacting with a medium only through a flat region of its outer surface is studied. The force field is constructed on the basis of data on the properties of jet flow under quasistationarity conditions. The motion of the medium is not studied. The problem of rigid body dynamics is considered for the case when the characteristic time of motion of the body relative to its center of mass is comparable with the characteristic time of motion of this mass center.

*Key words:* rigid body, resisting medium, system with variable dissipation, phase portrait.

Работа представляет собой исследование задачи движения симметричного твердого тела, взаимодействующего со средой лишь через плоский участок его поверхности. При построении силового поля используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности, при этом движение среды не изучается [1–3]. В отличие от [3, 4], где зависимость момента силы воздействия среды от угловой скорости пренебрежимо мала, в данной работе в соответствии с экспериментом [5] учитываются эффекты от влияния вращательных производных момента гидродинамических сил по угловой скорости [6, 7].

С практической точки зрения представляет существенный интерес изучение устойчивости прямолинейного поступательного (невозмущенного) движения, при котором скорости точек тела перпендикулярны плоской пластине. Полное нелинейное исследование продиктовано необходимостью отыскания таких условий, при которых существуют колебания ограниченной амплитуды возле невозмущенного движения [5].

В предлагаемой работе применяется разработанная автором методика полного нелинейного исследования диссипативных динамических систем определенного вида, благодаря чему получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов с предельными циклами на фазовом цилиндре, состоящее из бесконечного множества топологически неэквивалентных фазовых портретов.

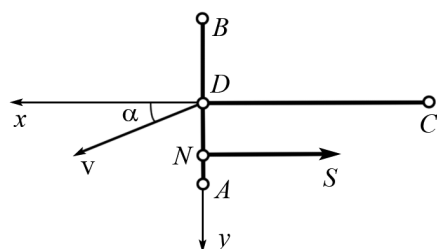


Рис. 1

**1. Постановка задачи.** Пусть однородное тело массы  $m$  совершает плоскопараллельное движение в среде, при этом передняя часть поверхности — плоская пластина  $AB$  (рис. 1) — находится в условиях струйного обтекания. В отсутствие касательных сил воздействие среды на пластину сводится к силе  $\mathbf{S}$  (приложенной в точке  $N$ ) и ей ортогональной. Остальная часть поверхности может быть размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края пластины. Похожее явление возникает после входа тела в воду [2, 5]. Сила тяжести считается пренебрежимо малой по сравнению с сопротивлением.

Свяжем с пластиной систему координат  $Dxyz$  (ось  $z$  перпендикулярна плоскости рисунка,  $Dzx$  — плоскость симметрии). Тогда существует режим невозмущенного движения, перпендикулярного пластине  $AB$ . При этом перпендикуляр  $Dx$ , опущенный из центра тяжести  $C$  тела на пластину, принадлежит

<sup>1</sup> Шамолин Максим Владимирович — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. НИИ механики МГУ; e-mail: shamolin@imec.msu.ru.

линии действия силы  $\mathbf{S}$ , а при возмущении данного режима скорость  $\mathbf{v}$  точки  $D$  отклоняется от оси  $Dx$  на угол  $\alpha$  (атаки).

Введем фазовые координаты:  $v = |\mathbf{v}|$ ,  $\alpha$ ,  $\Omega$  — угловая скорость ( $AB = \Delta$ ). Примем далее квадратичную зависимость величины силы  $\mathbf{S}$  от скорости:  $S = s_1 v^2$ . При этом обычно считают, что  $s_1 = \rho P c_x / 2$ , где  $\rho$  — плотность среды,  $P$  — площадь пластины. Безразмерный коэффициент лобового сопротивления  $c_x$  зависит от  $\alpha$ , числа Струхала и других величин, при этом в статических моделях их считают параметрами. Мы же вводим безразмерную фазовую переменную “типа Струхала”  $\omega = \Omega \Delta / v$ , а также функцию  $s = s_1 \operatorname{sgn} \cos \alpha$ . Ограничимся случаем зависимости  $c_x$  только от  $\alpha$ , т.е. будем считать  $s$  функцией  $\alpha$ , а  $y_N = DN$  — функцией пары  $\alpha, \omega$ .

При невозмущенном движении  $\alpha(t) \equiv 0, \omega(t) \equiv 0$ , поэтому  $y_N$  при малых  $\alpha, \omega$  примем в виде

$$y_N = \Delta(k\alpha - h\omega), \tag{1}$$

где  $k$  и  $h$  — некоторые постоянные. Зависимость  $s$  от  $\alpha$  в силу симметрии тела пренебрегаем. Теперь модель содержит параметры  $s = s_1, k, h$ , определяемые формой пластины, где лишь первый параметр размерный [2, 5].

Положение тела на плоскости зададим координатами  $(x_0, y_0)$  точки  $D$  и углом  $\varphi$ . Полярные координаты  $(v, \alpha)$  конца вектора скорости точки  $D$  и величина  $\Omega$  связаны с переменными  $(x_0^\bullet, y_0^\bullet, \varphi^\bullet, \varphi)$  следующим образом:

$$\varphi^\bullet = \Omega, \quad x_0^\bullet = v \cos(\alpha + \varphi), \quad y_0^\bullet = v \sin(\alpha + \varphi). \tag{2}$$

Состояние системы определяется функциями  $(v, \alpha, \Omega, x_0, y_0, \varphi)$ , первые три из которых рассматриваются в качестве квазискоростей. Ясно, что тройка координат  $(x_0, y_0, \varphi)$  циклическая, что приводит к понижению порядка системы. Динамическая же часть образует замкнутую систему ( $\sigma = DC, I$  — центральный момент инерции)

$$\begin{aligned} v^\bullet \cos \alpha - \alpha^\bullet v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 &= -s(\alpha)v^2/m, & v^\bullet \sin \alpha + \alpha^\bullet v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \Omega^\bullet &= 0, \\ I \Omega^\bullet &= y_N(\alpha, \omega)s(\alpha)v^2, & \omega &= \Omega \Delta / v. \end{aligned} \tag{3}$$

**2. Классы функций, определяющих воздействие среды.** В систему (3) входят функции  $y_N(\alpha, \omega), s$ , определяющие воздействие среды. Если, в частности,  $y_N = y(\alpha)$ , то вид  $y$  устанавливается через эксперимент [2–5]. Цель работы — учет влияния вращательных производных силы воздействия среды по угловой скорости, что требует введения в функции воздействия дополнительного аргумента. Это — нетривиальная задача моделирования. Учитывая соотношение (1), функцию  $y_N$  берем в виде  $y_N(\alpha, \omega) = y_N(\alpha, \Omega/v) = y(\alpha) - H\Omega/v$  ( $H > 0$  [2, 5]), при этом

$$I \Omega^\bullet = F(\alpha)v^2 - Hs(\alpha)\Omega v, \tag{4}$$

где  $F(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha)$ .

Система (3) и уравнение (4) содержат функции  $F(\alpha), s(\alpha)$ , явный вид которых даже для пластин простой формы аналитически описать затруднительно, поэтому используется прием “погружения” задачи в более широкий класс задач, учитывающий лишь качественные свойства функций  $F(\alpha), s(\alpha)$ . Построить же классы  $\{y\}, \{s\}$  помогает результат Чаплыгина, получившего функции  $y(\alpha), s(\alpha)$  для плоскопараллельного обтекания пластины бесконечной длины [8]:

$$y(\alpha) = y_0(\alpha) = A \sin \alpha \in \{y\}, \quad A > 0; \quad s(\alpha) = s_0(\alpha) = B \cos \alpha \in \{s\}, \quad B > 0. \tag{5}$$

Сочетая (5) с экспериментом [2, 4, 7, 8], формально опишем данные классы, состоящие из гладких  $2\pi$ -периодических функций ( $y$  нечетная, а  $s$  четная), таких, что  $y(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi), y'(0) > 0, y'(\pi) < 0$  ( $\{y\} = Y$ );  $s(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2), s(\alpha) < 0$  при  $\alpha \in (\pi/2, \pi), s(0) > 0, s'(\pi/2) < 0$  ( $\{s\} = \Sigma$ ). Функции  $y$  и  $s$  меняют знак при замене  $\alpha$  на  $\alpha + \pi$ . Далее, введенная в (4) функция  $F$  гладкая нечетная  $\pi$ -периодическая, такая, что  $F(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2), F'(0) > 0, F'(\pi/2) < 0$  ( $\{F\} = \Phi$ ). Типичным представителем класса  $\Phi$  является функция [8]  $F = F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in \Phi$ .

**3. Ключевой вопрос для приложений.** В связи с отмеченной ранее неустойчивостью можно поставить вопрос: существуют ли угловые колебания оси симметрии тела конечной (ограниченной) амплитуды? Сформулируем более общо: найдется ли такая пара функций  $y$  и  $s$ , чтобы для некоторого решения уравнений движения выполнялось ограничение  $0 < \alpha(t) < \alpha^* < \pi/2$  начиная с некоторого момента  $t = t_1$ ? Ранее показано [3, 4], что, когда величины  $y_N$  и  $s$  зависят лишь от угла атаки (т.е.  $H = 0$ ),

для любой допустимой пары функций  $y(\alpha)$  и  $s(\alpha)$  во всем диапазоне  $(0 < \alpha < \pi/2)$  конечных углов атаки в системе отсутствуют нетривиальные ограниченные решения. Таким образом, положительный ответ на поставленный выше вопрос возможен в случае учета зависимости момента силы воздействия среды от угловой скорости. Как будет показано, при некоторых предположениях можно ожидать положительного результата.

**4. Приведенные уравнения движения.** Вводя новую независимую переменную по формуле  $dq = v dt$ , первые два уравнения системы (3) и уравнение (4) перепишем в виде

$$v' = \Psi(\alpha, \omega)v, \quad (6)$$

$$\alpha' = -\omega + \sigma\omega^2 \sin \alpha + \sigma F(\alpha) \cos \alpha / I + s(\alpha) \sin \alpha / m - \sigma H\omega s(\alpha) \cos \alpha / I,$$

$$\omega' = F(\alpha) / I + \sigma\omega^3 \cos \alpha - \sigma\omega F(\alpha) \sin \alpha / I + \omega s(\alpha) \cos \alpha / m - H\omega s(\alpha) / I + \sigma H\omega^2 s(\alpha) \sin \alpha / I, \quad (7)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma\omega^2 \cos \alpha + \sigma F(\alpha) \sin \alpha / I - s(\alpha) \cos \alpha / m - \sigma H\omega s(\alpha) \sin \alpha / I, \quad (\dots)' = d/dq, \quad \omega = d\varphi/dq.$$

Система (7) образует независимую подсистему второго порядка. Исследуем устойчивость ее тривиального решения, введя обозначения  $A = y'_N(0)$ ,  $B = s(0)$ ,  $n_0^2 = F(0)/I$  и безразмерные параметры

$$\mu_1 = 2B/mn_0 > 0, \quad \mu_2 = \sigma n_0 > 0, \quad \mu_3 = BH/In_0 > 0. \quad (8)$$

**Предложение 1.** Пусть выполнено неравенство

$$|\mu_3 - \mu_2| < 2. \quad (9)$$

Тогда при  $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$  (соответственно при  $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$ ) тривиальное решение системы (7) асимптотически устойчиво (соответственно является отталкивающим).

Для выяснения возможности рождения предельного цикла около начала координат исследуем устойчивость тривиального решения системы (7) при критическом сочетании параметров  $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$ . Для этого вычислим вспомогательный индекс [3, 9, 10] ( $s_2 = s''(0)$ ,  $f_3 = F'''(0)$ ):

$$\text{Ind} = -5\mu_2 - \mu_1 + \frac{\sigma f_3}{In_0} + 2 \frac{s_2}{mn_0} - \frac{Hs_2}{In_0} + 8\mu_2 \frac{1 + \mu_1^2/4}{(1 + \mu_2(\mu_1 + \mu_2))^2} + \mu_2 \frac{H}{In_0} (5B - 3s_2)U + 12\mu_2 U^2,$$

$$U = \frac{\mu_2 + \mu_1/2}{1 + \mu_2(\mu_1 + \mu_2)}.$$

**Предложение 2.** Если  $\text{Ind} < 0$  (соответственно  $\text{Ind} > 0$ ) и выполнено неравенство (9), то начало координат фазовой плоскости системы (7) при критическом сочетании параметров  $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$  является слабоустойчивым (соответственно неустойчивым) фокусом.

**Теорема 1.** Пусть для системы (7) выполнено неравенство (9). Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если  $\text{Ind} < 0$ , то для любого фиксированного  $\mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильноустойчивым фокусом; при  $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$  начало координат является сильнонеустойчивым фокусом, окруженным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением  $\mu_3$  от  $\mu_2$  до  $\mu_2 - \delta_2$ , как  $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$ .

2) Если  $\text{Ind} > 0$ , то для любого фиксированного  $\mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$  начало координат является сильнонеустойчивым фокусом; при  $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильноустойчивым фокусом, окруженным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с увеличением  $\mu_3$  от  $\mu_2$  до  $\mu_2 + \delta_2$ , как  $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$ .

Проверить выполнение условия  $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$  несложно. Проверка же условия  $\text{Ind} < 0$  затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках пары функций  $(y_N, s)$  неизвестны.

**5. Точки покоя систем.** У системы третьего порядка (6), (7) существуют положения равновесия, которые заполняют одномерные многообразия. Поэтому задача о точках покоя разбивается на две — о точках покоя системы третьего порядка в фазовом пространстве  $\mathbf{W} = R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$  и о точках покоя системы (7) на плоскости  $R^2\{\alpha, \omega\}$  или на цилиндре  $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$ .

**5.1. Точки покоя системы третьего порядка.** Искомые точки покоя зададим системами

$$\alpha = \pi/2 + \pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = 0, \quad v = v_1; \quad (10)$$

$$\alpha = -\pi/2 + 2\pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = -1/\sigma, \quad \sigma \neq 0, \quad v = v_2; \tag{11}$$

$$\alpha = \pi/2 + 2\pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = 1/\sigma, \quad \sigma \neq 0, \quad v = v_3, \tag{12}$$

которые соответствуют в фазовом пространстве  $\mathbf{W}$  прямым, сплошь заполненным точками покоя системы (ср. с [3]).

5.2. *Тривиальные и нетривиальные точки покоя системы второго порядка.* У системы (7) существуют точки покоя на плоскости  $R^2\{\alpha, \omega\}$ , которые задаются следующими совокупностями:

$$\alpha = 2\pi k, \quad k \in Z; \quad \omega = 0; \tag{13}$$

$$\alpha = (2k + 1)\pi, \quad k \in Z; \quad \omega = 0; \tag{14}$$

$$\alpha = \pi/2 + \pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = 0; \tag{15}$$

$$\alpha = -\pi/2 + 2\pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = -1/\sigma, \quad \sigma \neq 0; \tag{16}$$

$$\alpha = \pi/2 + 2\pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = 1/\sigma, \quad \sigma \neq 0. \tag{17}$$

Системы (15)–(17), и только они, задают точки покоя, в которые ортогонально проектируются многообразия положений равновесия (10)–(12) соответственно. Системы (13), (14), и только они, задают точки, в которые ортогонально проектируются частные решения системы (6), (7) вида

$$v(q) = v^0 \exp\left(-\frac{B}{m} q\right), \quad v^0 = v(0), \quad \alpha(q) \equiv \pi k, \quad k \in Z, \quad \omega(q) \equiv 0,$$

при  $k = 0$  соответствующие невозмущенному движению.

Точки покоя (13)–(17) назовем тривиальными положениями равновесия (ТПР). Наряду с ТПР могут существовать точки покоя, не лежащие на прямых  $\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega \sin \alpha \cos \alpha = 0\}$  и соответствующие нетривиальным частным решениям системы (2), (3); их будем называть нетривиальными (НПР).

5.3. *Нетривиальные частные решения.* Рассмотрим систему (7) при условиях (5). Аналогично может быть рассмотрена система общего вида (7). Если НПР существуют, то они удовлетворяют следующим равенствам:

$$\omega = \alpha \sin \alpha, \quad [\sigma u^2 - \sigma n_0^2 + \mu_2 \mu_3] \cos^2 \alpha - B \cos \alpha / m + \alpha(1 - \sigma \alpha) = 0; \tag{18}$$

$$\alpha = \alpha_{\pm} = n_0 \left[ \mu_2 + \mu_3 \pm \sqrt{(\mu_2 + \mu_3)^2 - 4} \right] / (2(1 + \mu_2 \mu_3)). \tag{19}$$

**Следствие.** При выполнении условий (9), (5) система (7) не имеет НПР.

**Замечание 1.** Если у системы (7) и существуют НПР, то они удовлетворяют уравнению

$$\omega^2 \left[ 1 + \frac{\sigma}{I} H \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \right] - \omega \left[ \frac{\sigma}{I} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} + \frac{1}{I} H \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \sin \alpha \right] + \frac{1}{I} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} \sin \alpha = 0. \tag{20}$$

Дискриминант уравнения (20) отрицателен, если почти для любого  $\alpha$  выполнено неравенство

$$(\sigma F(\alpha) + H s(\alpha) \sin \alpha)^2 < 4 I F(\alpha) \sin \alpha \cos \alpha. \tag{21}$$

Если же (21) не имеет места, то и у системы (7) могут существовать положения равновесия  $(\alpha_0, \omega_0)$ , удовлетворяющие системе (18), (19). Они индуцируют наличие следующих нетривиальных решений:

$$v(q) = v^0 e^{\kappa q}, \quad v^0 = v(0), \quad \kappa < 0, \quad \alpha(q) \equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha(0) \neq \pi k, \quad k \in Z, \quad \omega(q) \equiv \omega_0, \quad \omega_0 = \omega(0).$$

**Замечание 2.** У системы (2), (3) существуют частные решения вида

$$v(t) = v_0(1 - v_0 \kappa t)^{-1}, \quad v^0 = v(0), \quad \alpha(t) \equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha(0), \quad \Omega(t) = d\varphi(t)/dt = \Omega_0(1 - v_0 \kappa t)^{-1}, \quad \Omega_0 = \Omega(0);$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \Omega \ln(1 - v_0 \kappa t) / v_0 \kappa, \quad \varphi_0 = \varphi(0);$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \sin(\alpha_0 + \varphi_0) / \Omega_0 - v_0 \sin(\alpha_0 + \varphi_0 + \Omega_0 \ln(1 - v_0 \kappa t) / v_0 \kappa) / \Omega_0, \quad x_0 = x(0);$$

$$y(t) = y_0 - v_0 \cos(\alpha_0 + \varphi_0) / \Omega_0 + v_0 \cos(\alpha_0 + \varphi_0 + \Omega_0 \ln(1 - v_0 \kappa t) / v_0 \kappa) / \Omega_0, \quad y_0 = y(0).$$

**Замечание 3.** Траектория точки  $D$ , соответствующая последним частным решениям, — окружность с центром в  $(x_0 + v_0 \sin(\alpha_0 + \varphi_0)/\Omega_0, y_0 - v_0 \cos(\alpha_0 + \varphi_0)/\Omega_0)$  и радиусом  $v_0/\Omega_0$ .

5.4. *Топологическая классификация ТПП.* 1) Точки (13) являются: седлами, если  $2\mu_1(\mu_3 - \mu_2) > 4 + \mu_1^2$ ; отталкивающими, если  $2\mu_1(\mu_3 - \mu_2) < 4 + \mu_1^2$ ,  $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$ ; притягивающими, если  $2\mu_1(\mu_3 - \mu_2) < 4 + \mu_1^2$ ,  $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$ . 2) Точки (14) являются: седлами, если  $2\mu_1(\mu_2 - \mu_3) > 4 + \mu_1^2$ ; отталкивающими, если  $2\mu_1(\mu_2 - \mu_3) < 4 + \mu_1^2$ ,  $\mu_3 > -\mu_1 + \mu_2$ ; притягивающими, если  $2\mu_1(\mu_2 - \mu_3) < 4 + \mu_1^2$ ,  $\mu_3 < -\mu_1 + \mu_2$ . 3) Точки (15) — седла. 4) Точки (16), (17) являются притягивающими: устойчивыми фокусами, если  $\mu_1\mu_2 < 4$ ; устойчивыми узлами, если  $\mu_1\mu_2 > 4$ ; устойчивыми вырожденными узлами, если  $\mu_1\mu_2 = 4$ .

**6. Расслоения фазового пространства, его симметрии.** Фазовые траектории системы (6), (7) лежат на поверхностях, представляющих собой двумерные цилиндры. В частности, если существует во всем фазовом пространстве первый интеграл системы (7), то он является функцией  $(\alpha, \omega)$ , а поэтому задает семейство цилиндров в пространстве  $\mathbf{W} = R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$ .

**Замечание 4.** Поскольку  $d\varphi/dt = v d\varphi/dq$ , то в пространстве  $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \Omega\}$  системы (3) данному первому интегралу будет соответствовать первый интеграл, который зависит от всех трех фазовых переменных. Поэтому удобнее строить фазовый портрет системы (6), (7) в пространстве  $\mathbf{W}$  с помощью портрета системы (7) на плоскости  $R^2\{\alpha, \omega\}$ , который будет являться ортогональной проекцией на плоскость  $\{(\alpha, \omega, v) \in R^3 : v = \text{const}\}$ . Тогда возможно поднятие траекторий с плоскости в пространство  $\mathbf{W}$ .

**Замечание 5.** Движение возможно лишь в области  $B' = \{(\alpha, \omega, v) \in R^3 : v > 0\} \subset R^3\{\alpha, \omega, v\}$ . После замены  $\bar{p} = \ln v$  полученное векторное поле в фазовом пространстве  $R^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$  не зависит от  $\bar{p}$  и ортогонально проектируется на семейство плоскостей  $\{(\alpha, \omega, \bar{p}) \in R^3 : \bar{p} = \text{const}\}$ .

**Замечание 6.** Чтобы поднять траектории в трехмерное пространство с плоскости, необходимо выяснить знак проекции поля в  $R^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$  на ось  $\bar{p}$  либо на ось  $v$  в области  $B'$  и рассмотреть цилиндры  $M = M^0 \cup \bar{M}$ ,  $M^0 = \{(\alpha, \omega, v) \in B' : \Psi(\alpha, \omega) \cos^{-1} \alpha = 0\}$ ,  $\bar{M} = M_1 \cup M_2 \cup \dots$ ,  $M_s = \{(\alpha, \omega, v) \in B' : \alpha = \pi/2 + \pi s\}$ , разрезающие фазовое пространство на области, в каждой из которых проекция поля на ось  $\bar{p}$  имеет свой знак. На  $M$  проекция на ось  $v$  нулевая.

**Замечание 7.** Для любых  $F \in \Phi$ ,  $s \in \Sigma$  векторное поле системы (7) обладает свойством центральной симметрии относительно точек  $(\pi k, 0)$ ,  $k \in Z$ : в координатах  $(\alpha, \omega)$  поле меняет направление при замене  $(\alpha + \pi k, \omega) \rightarrow (-\alpha + \pi k, -\omega)$ ,  $k \in Z$ , поэтому поле системы (6), (7) обладает симметрией относительно лучей  $\{(\alpha, \omega, v) \in B' : \alpha = \pi k, \omega = 0\}$ .

**7. Классификация фазовых портретов системы на двумерном цилиндре для некоторой области параметров.** 7.1. *Введение в классификацию фазовых портретов.* Поведение поля системы возле точек  $(0, 0)$  и  $(\pi, 0)$  определяет основные особенности глобального портрета. Изучим те системы, которые допускают выполнение неравенства (21) лишь на ТПП.

Бесконечномерное пространство параметров системы обозначим через  $J_1$ . В работе [11] показано, что существуют и единственны траектории, уходящие на бесконечность. Их  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельными множествами являются бесконечно удаленные точки  $(\pi k, \pm\infty)$ ,  $k \in Z$ . В [3, 9] установлено, что отсутствуют замкнутые траектории или замкнутые кривые из траекторий, охватывающих цилиндр, при этом у системы (7) также отсутствуют замкнутые фазовые характеристики, охватывающие цилиндр.

В [3] доказано существование замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых по цилиндру в точку, например существование неизолированных периодических траекторий или предельных циклов. Эта задача сводится к отысканию замкнутых кривых из траекторий лишь вокруг изолированных точек покоя индекса 1.

Основной проблемой классификации портретов является изучение поведения устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющих гиперболических седел.

7.2. *Некоторые свойства ключевых фазовых траекторий системы в области  $J_1$ .* Введем семейство полос на цилиндре  $\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\}$ , при этом  $\Pi_{(-\pi/2, \pi/2)} = \Pi$ ,  $\Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)} = \Pi'$ .

Следующее утверждение относится ко всему бесконечномерному пространству параметров и базируется на наличии топографической системы Пуанкаре (ТСП) в полосе  $\Pi$  [12, 13].

**Предложение 3.** *Устойчивая сепаратриса в полосе  $\Pi'$  для точки  $(\pi/2, 0)$  имеет в качестве  $\alpha$ -предельного множества точку  $(\pi, 0)$  [3] (см. рис. 2, а–в).*

**Следствие.** *У системы (7) в полосе  $\Pi'$  не существует никаких замкнутых характеристик.*

**8. Многопараметрическое семейство фазовых портретов системы на двумерном цилиндре.** Динамическая система (7) имеет на двумерном фазовом цилиндре следующие положения равновесия:

$$(0, 0) \text{ и } (\pi, 0), (\pi/2, 0) \text{ и } (3\pi/2, 0), \quad (22)$$

$$(\pi/2, 1/\sigma) \text{ и } (-\pi/2, -1/\sigma).$$

**Теорема 2.** В пространстве параметров  $J_1$  существует область  $J_2$  (которая далее и рассматривается) положительной меры, соответствующая следующему поведению траекторий системы: 1) других положений равновесия, кроме (22), система не имеет; 2) в полосе  $\Pi'$  система не имеет замкнутых фазовых характеристик; 3) в полосе  $\Pi$  около положения равновесия  $(0, 0)$  при изменении параметров системы (8) может происходить бифуркация рождения единственного устойчивого цикла из слабого фокуса.

**Замечание 8.** Области параметров  $J_2$  соответствует следующее поведение траекторий возле положений равновесия (22): 1) положение равновесия  $(\pi, 0)$  является отталкивающим; 2) положение равновесия  $(0, 0)$  является отталкивающим, если  $\mu_1 > \mu_3 - \mu_2$ , и притягивающим, если  $\mu_1 \leq \mu_3 - \mu_2$ ; если  $\mu_1 = \mu_3 - \mu_2$ , то оно является слабым притягивающим фокусом. Замкнутые характеристики системы для области параметров  $J_2$  могут существовать лишь в полосе  $\Pi$  [3, 9].

Рассмотрим ключевой вопрос о глобальном поведении следующих сепаратрис:

- 1) выходящей из точки  $(\pi/2, 0)$  в полосу  $\Pi'$ ;
- 2) входящей в точку  $(-\pi/2, 0)$  из полосы  $\Pi$ ;
- 3) выходящей из точки  $(\pi/2, 0)$  в полосу  $\Pi$ .

**Теорема 3.** Глобальное поведение любых двух сепаратрис 1–3 независимо [3, 10].

Выберем в качестве пары ключевых сепаратрисы 1 и 2.

**Определение 1.** Индексом  $k_1$  сепаратрисы 1 назовем рациональное число, выбираемое из множества  $\{r \in \mathbb{Q} : r = 1/4 + m, r = 1/2 + m, m \in \mathbb{N}_0\}$ . Скажем, что  $k_1 = r$ , если сепаратриса 1 имеет в качестве  $\omega$ -предельного множества точку  $(2\pi r, 1/\sigma)$  в случае  $r = 1/4 + m$  и точку  $(2\pi r - 0, +\infty)$  в случае  $r = 1/2 + m$ .

**Определение 2.** Индексом  $k_2$  сепаратрисы 2 назовем натуральное число  $j$ , выбираемое из множества  $\{j \in \mathbb{N} : j = 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Скажем, что  $k_2 = j$ , если сепаратриса 2 имеет в качестве  $\alpha$ -предельного множества точку  $(0, 0)$  или устойчивый предельный цикл,  $j = 1$ ; точку  $(\pi/2, 0)$ ,  $j = 2$ ; точку  $(\pi, 0)$ ,  $j = 3$ ; точку  $(-\pi, 0)$ ,  $j = 4$ ; точку  $(-\pi, 0)$ ,  $j = 5$ .

**Теорема 4.** Для любого  $k$  из (возможно, усеченной) области определения допустимо соответствующее поведение сепаратрис 1 и 2 (определения корректны, см. также [4]).

Теорема 4 позволяет сделать вывод: любое достаточно малое возмущение системы, описывающей физический маятник, которое дает искомую систему, бесконечно много раз перестраивает глобальный тип невозмущенного фазового портрета. Портреты, индекс  $k$  которых равен  $(1/4, 2)^*$ ,  $(1/4, 4)^*$ ,  $(1/4, 5)$ , показаны соответственно на рис. 2, а, б, в. Звездочкой помечены портреты, имеющие предельные циклы. Для системы (7) при выполнении условий (5) имеем *трехпараметрическое семейство* портретов, зависящее от параметров (8). Двухпараметрическое семейство, построенное в [4], не содержит предельных циклов. Но эти два семейства объединяет тот факт, что каждому значениям безразмерных параметров задачи соответствует пара независимых индексов (в данном случае  $k_1, k_2$ ), “кодирующих” тип портрета.

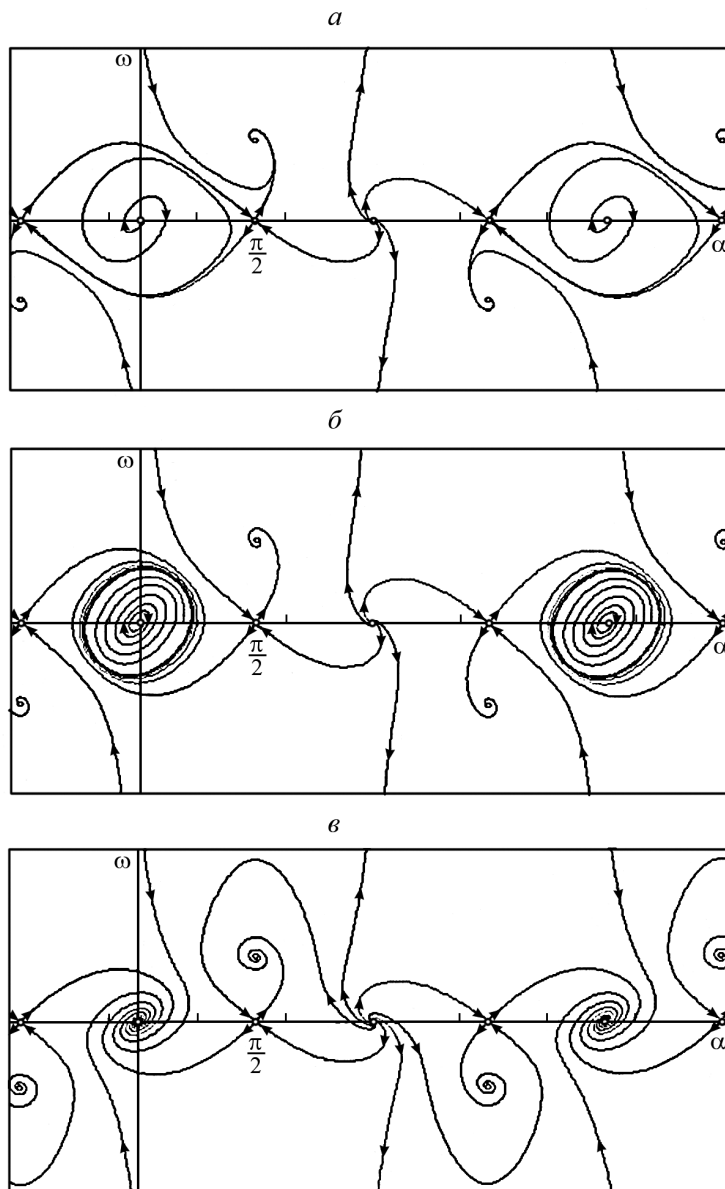


Рис. 2

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-01-00231-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Физматгиз, 1947.
2. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: МГУ, 1986.
3. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2006.
4. Шамолин М.В. Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Докл. РАН. 1994. **337**, № 5. 611–614.
5. Ерошин В.А., Самсонов В.А., Шамолин М.В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 1995. № 3. 23–27.
6. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1969.
7. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1988.
8. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч.: В 3 т. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. 133–135.
9. Шамолин М.В. Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1992. № 2. 52–56.
10. Шамолин М.В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Экзамен, 2007.
11. Шамолин М.В. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 1. 68–71.
12. Шамолин М.В. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 2. 66–70.
13. Шамолин М.В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Успехи матем. наук. 1997. **52**, вып. 3. 177–178.

Поступила в редакцию  
12.11.2008

УДК 539.3

### К ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ С СИЛЬНО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ ХАРАКТЕРНЫМИ РАЗМЕРАМИ

Т. И. Горяева<sup>1</sup>, Д. В. Георгиевский<sup>2</sup>

Проведен анализ главных членов общих асимптотических разложений решений первой краевой задачи трехмерной теории упругости в перемещениях (квазистатика, сжимаемость) для цилиндрического слоя. Естественным малым асимптотическим параметром является отношение толщины слоя к длине образующей. При этом радиус основания может быть любого “промежуточного”, включая концы, порядка. Такой геометрией обладает, например, цилиндрическое тело, имеющее характерные макро-, микро- и наноразмеры по различным направлениям.

*Ключевые слова:* теория упругости, задача в перемещениях, тонкое тело, цилиндрический слой, асимптотическое решение, система главного приближения.

An analysis of the principal terms of the general asymptotic expansions for the solutions to the 3D elasticity boundary value problem in terms of displacements (quasistatic case, compressibility) for a cylindrical layer is performed. A ratio of the layer thickness to the height of the

<sup>1</sup> Горяева Татьяна Ивановна — асп. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ; e-mail: georgiev@mech.math.msu.su.

<sup>2</sup> Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ; e-mail: georgiev@mech.math.msu.su.