УДК 531.552

ДИНАМИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

М.В. Шамолин

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

shamolin@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Предложена качественная методика построения геометрических и нахождения динамических инвариантов (первых интегралов) интегрируемых механических систем с переменной диссипацией.

Ключевые слова: динамическая система, переменная диссипация, трансцендентный первый интеграл.

Работа посвящена развитию методов анализа в теории неконсервативных систем, возникающих в таких областях, как динамика твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой [1–5], теория колебаний и др. В принципе, данный материал может быть интересен специалистам по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и механике жидкости и газа [6–10].

В общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Получен целый спектр случаев полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обусловливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов).

Получены новые семейства фазовых портретов систем с переменной диссипацией на маломерных и многомерных многообразиях. Обсуждаются вопросы их абсолютной или относительной грубости. Обнаружены новые интегрируемые случаи движения твердого тела, в том числе в классической задаче о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды.

Приводятся предварительные суждения и кратко обсуждаются полученные ранее результаты. Конкретизируются так называемые динамические системы с переменной диссипацией. Данный класс систем характеризуется как класс, в ряде случаев допускающий полное интегрирование. Поскольку в системе присутствуют отталкивающие и притягивающие предельные множества, полное интегрирование если и может производиться, так только в классе трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций.

Рассказывается о наглядных характеристиках таких систем, затем дается определение (или, точнее, одно из определений) системы с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним.

Вводится в рассмотрение важный класс динамических систем с дополнительными симметриями. На самом деле, вводимые симметрии вполне естественны, поскольку, в принципе, правую часть системы можно разложить в ряд Фурье, при этом часто бывает, что эти ряды конечны. Вводимый класс систем оказывается классом систем с переменной диссипацией с нулевым средним. Приводятся естественные примеры из динамики плоскопараллельного и пространственного движения твердого тела.

Изучаются системы с симметриями на двумерном цилиндре. И хотя часть материала уже появлялась в печати, автор счел нужным опубликовать данный материал в данном контексте.

Изучаются также маятниковые системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Приводится достаточно общий вид таких систем третьего порядка, которые допускают наличие трансцендентных первых интегралов. Задачи, порождающие проблемы качественного анализа, берутся из плоской и пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой.

Исследуются новые случаи интегрируемости в плоской и пространственной динамике, т.е. случаи, описываемые динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Подавляющая часть данного материала ранее не публиковалась. Преимущество изложения такого материала состоит в том, что практически все исследуемые системы описывают вполне конкретные движения и имеют соответствующие гидродинамические аналогии. На примере конкретной динамической системы, вводится характеристический индекс, «кодирующий» соответствующий тип фазового портрета (абсолютно) грубой системы в пространстве ее квазискоростей. При этом каждый такой индекс соответствует топологически изолированному (т.е. неэквивалентному другим типам) типу фазового портрета.

Список литературы

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А. О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло-узел // Математический сборник. 1959. Т. 48. Вып. 3.

2. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Динамические системы первой степени негрубости на плоскости // Математический сборник. 1965. Т. 68. Вып. 3.

3. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Достаточные условия для негрубости первой степени динамической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, №12.

4. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14, №5. С. 247–250.

5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.

6. Шамолин М.В. Случаи интегрируемости уравнений пространственной динамики твердого тела // Прикл. механика. 2001. Т. 37, №6. С. 74–82.

7. Шамолин М.В. Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. №5. С. 22–28.

8. Шамолин М.В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // Успехи матем. наук. 2002. Т. 57, вып. 1. С. 169–170.

9. Шамолин М.В. Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой // Прикл. механика. 2004. Т. 40, №4. С. 137–144.

10. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.

DYNAMICAL INVARIANTS OF INTEGRABLE DYNAMIC SYSTEMS WITH VARIABLE DISSIPATION

M.V. Shamolin

The paper presents results referred to geometric and dynamic invariant theory of completely integrable systems and also to the classification of integrable cases of low-dimensional and high-dimensional rigid body dynamics in a non-conservative force field.

Keywords: dynamical system, transcendental integrability, phase pattern.