ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2011, том 440, № 2, с. 187–190

МЕХАНИКА

УДК 531.01+531.552+517.925

ПОЛНЫЙ СПИСОК ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

© 2011 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком В.В. Козловым 23.05.2011 г.

Поступило 25.05.2011 г.

Получен новый случай интегрируемости в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил. Результаты [1–4], касающиеся движения двумерного и трехмерного твердых тел в сопротивляющейся среде, перенесены на случай высокой размерности. При этом в отличие от предыдущих работ по четырехмерному телу [5–7] при построении неконсервативного силового поля воздействия на тело учитывается линейная зависимость данного поля от тензора угловой скорости, несмотря на то, что само введение угловой скорости в компоненты неконсервативного поля априори не очевидно.

В работах [1, 2] показана полная интегрируемость плоской задачи о движении твердого тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует один первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле комплексного анализа, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму пластины (одномерного диска), граница которой – две точки (нульмерная сфера).

Позднее [3, 4] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска, граница которого – окружность (одномерная сфера).

В данной работе предполагается, что все взаимодействие (четырехмерного) твердого тела со средой сосредоточено на той части (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму (трехмерного) шара, границей которого является двумерная сфера. При этом в отличие от предыдущих работ по четырехмерному телу [5–7] при построении неконсервативного силового поля воздействия на тело учитывается линейная зависимость данного поля от тензора угловой скорости (имеющего шесть компонент).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ НА АЛГЕБРЕ ЛИ $so(4)$

Пусть четырехмерное твердое тело движется в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерную область евклидового пространства, и все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска D^3. Расстояние от точки N приложения силы сопротивления до центра D диска является функцией, по крайней мере, угла (атаки) α, который измеряется между скоростью v точки D и срединным перпендикуляром к диску, опущенным из центра C масс тела, в четырехмерном пространстве.

Будем считать, что сила сопротивления ортогональна в четырехмерном пространстве диску D^3, и ее величина имеет вид $S = s_1(\alpha)v^2$, $s_1 \geq 0$, $s_1(\alpha) = s(\alpha)\mathrm{sign}\cos\alpha$.

Свяжем с телом систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$, ось Dx_1 которой совпадает с осью CD, а оси Dx_2, Dx_3, Dx_4 лежат в гиперплоскости диска.

Если оператор инерции в системе $Dx_1x_2x_3x_4$ имеет диагональный вид $\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$, Ω – тензор угловой скорости твердого тела, $\Omega \in so(4)$, то та часть уравнений движения четырехмерного твердого тела, которая отвечает алгебре $so(4)$, имеет следующий вид [5–7]:

$$\Omega^{\bullet}\Lambda + \Lambda\Omega^{\bullet} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = \mathrm{M}, \qquad (1)$$

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

где $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, l_3, \lambda_4\}, \lambda_1 = \frac{1}{2}(-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$, ..., $\lambda_4 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + I_3 - I_4)$, M – момент “внешних сил”, действующих на тело в $\mathbf{R}^4$, спроектированный на “естественные” координаты в $so(4)$, $[\cdot,\cdot]$ – коммутатор в $so(4)$. Матрицу $\Omega \in so(4)$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_6$ – компоненты тензора угловой скорости в проекциях на естественные координаты в алгебре Ли $so(4)$.

Если $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ – координаты точки N в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, $\{-S, 0, 0, 0\}$ – координаты вектора силы сопротивления в той же системе, то при вычислении момента силы сопротивления необходимо построить отображение

$$\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to so(4),$$

переводящее пару элементов из $\mathbf{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры $so(4)$.

В проекциях на координаты в алгебре $so(4)$ момент силы сопротивления имеет следующий вид:

$$(0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S) \in \mathbf{R}^6 \simeq M \in so(4).$$

Здесь необходимо сделать важное замечание о введении зависимости функций координат точки N от тензора угловой скорости Ω. Зависимость будет использоваться линейная. Для того, чтобы момент имел диссипативный характер, выберем функции x_{2N}, x_{3N}, x_{4N} в следующем виде (используя (2)):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ x_{3N} \\ x_{4N} \end{pmatrix} = Q - \frac{1}{v}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где Q – функции, не зависящие от тензора угловой скорости, $h_1, \ldots, h_4 > 0$ (ср. со случаями меньшей размерности [1–4]). При этом следует учесть, что если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ – сферические координаты в $\mathbf{R}^4$, то

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ R(\alpha)\cos\beta_1 \\ R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ R(\alpha)\sin\beta_1\sin\beta_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Впрочем, зависимости (3) и (4) можно вводить и в случае n-мерного твердого тела.

С учетом всего можно получить уравнения движения вида (1) в рассмотренном поле силы сопротивления:

$$(\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0, \tag{5}$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = 0, \tag{6}$$

$$(\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = x_{4N}S, \tag{7}$$

$$(\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = 0, \tag{8}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = -x_{3N}S, \tag{9}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = x_{2N}S. \tag{10}$$

ДИНАМИКА В $\mathbf{R}^4$

По аналогии с маломерными случаями можно вывести формулы, аналогичные соответствующие формулам Эйлера и Ривальса, т.е. скорости и ускорения любых двух точек A и B четырехмерного твердого тела в любой системе координат связаны следующими соотношениями:

$$v_B = v_A + \Omega AB, \quad w_B = w_A + \Omega^2 AB + \mathbf{E}AB, \tag{11}$$

где $\Omega \in so(4)$, $\mathbf{E} = \Omega^\bullet \in so(4)$. Матрица $\mathbf{E}$ называется матрицей тензора углового ускорения.

С помощью формул (11) можно получить уравнения движения центра масс четырехмерного твердого тела в $\mathbf{R}^4$.

ДВИЖЕНИЕ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЕРВОСВЯЗИ

Рассмотрим такой класс движений тела, при котором во все время выполнено условие

$$v = \mathrm{const}. \tag{12}$$

При этом предположим, что на тело действует некоторая (следящая) сила, обеспечивающая выполнение условия (12) и являющаяся реакцией данной неинтегрируемой связи (ср. с маломерными случаями [1–4]). Определенным выбором величины тяги вдоль прямой CD выполнение условия (12) может быть достигнуто [1–4].

СЛУЧАЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Пусть по аналогии с трехмерным случаем выполнены равенства

$$I_2 = I_3 = I_4. \tag{13}$$

В случае (13) существуют три циклических первых интеграла у уравнений (5)–(10):

$$\omega_1 = \omega_1^0, \quad \omega_2 = \omega_2^0, \quad \omega_4 = \omega_4^0.$$

Рассмотрим для простоты движения на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \tag{14}$$

Для описания движения тела используется пара динамических функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. По аналогии со случаями меньшей размерности без ограничения общности [1–4] можно считать, что

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A > 0, \quad s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad B > 0.$$

В результате оставшиеся уравнения на алгебре $so(4)$ примут следующий вид $\left(\text{здесь } n_0^2 = \dfrac{AB}{2I_2},\ H_1 = \dfrac{h_1 B}{2I_2}\right)$:

$$\omega_3^\bullet = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - H_1\omega_3 v\cos\alpha,$$
$$\omega_5^\bullet = -n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - H_1\omega_5 v\cos\alpha,$$
$$\omega_6^\bullet = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1 - H_1\omega_6 v\cos\alpha.$$

Если ввести естественную замену угловых скоростей по формулам

$$z_1 = \omega_3\cos\beta_2 + \omega_5\sin\beta_2,$$
$$z_2 = -\omega_3\sin\beta_2\cos\beta_1 + \omega_5\cos\beta_2\cos\beta_1 + \omega_6\sin\beta_1,$$
$$z_3 = \omega_3\sin\beta_2\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_2\sin\beta_1 + \omega_6\cos\beta_1,$$

то "совместные" уравнения движения на $so(4) \times \mathbf{R}^4$ (после учета четырех условий (12) и (14)) примут симметричный вид:

$$\begin{gathered}
\alpha^\bullet = -(1+\sigma H_1)z_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha,\\
z_3^\bullet = n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha -\\
-(1+\sigma H_1)(z_1^2+z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 v z_3\cos\alpha,\\
z_2^\bullet = (1+\sigma H_1)z_2 z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +\\
+(1+\sigma H_1)z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - H_1 v z_2\cos\alpha,\\
z_1^\bullet = (1+\sigma H_1)z_1 z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} -\\
-(1+\sigma H_1)z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - H_1 v z_1\cos\alpha,\\
\beta_1^\bullet = (1+\sigma H_1)z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},
\end{gathered}\tag{15}$$

$$\beta_2^\bullet = -(1+\sigma H_1)z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}. \tag{16}$$

У системы (15), (16) шестого порядка существует независимая подсистема пятого порядка (15). Для полного интегрирования данной системы необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \to z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1}$$

система (15), (16) приводится к следующему виду:

$$\begin{gathered}
\alpha^\bullet = -(1+\sigma H_1)z_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha,\\
z_3^\bullet = n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha -\\
-(1+\sigma H_1)z^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 v z_3\cos\alpha,\\
z^\bullet = (1+\sigma H_1)z z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 v z\cos\alpha,
\end{gathered}\tag{17}$$

$$\begin{gathered}
z_*^\bullet = (1+\sigma H_1)\sqrt{1+z_*^2}\,z\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\\
\beta_1^\bullet = (1+\sigma H_1)\frac{z z_*}{\sqrt{1+z_*^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\beta_1},
\end{gathered}\tag{18}$$

$$\beta_2^\bullet = -z_1(z, z_*)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}. \tag{19}$$

Видно, что система пятого порядка "распалась" на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (17) – третьего, а система (18) (конечно, после замены независимого переменного) – второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (17)–(19) достаточно указать два независимых интеграла системы (17), один системы (18) и дополнительный интеграл, "привязывающий" уравнение (19).

Система (17) появляется в динамике трехмерного твердого тела при наличии дополнительного демпфирования со стороны среды [3, 4]. Она обладает двумя трансцендентными первыми интегралами:

$$\frac{(1+\sigma H_1)z^2 + (1+\sigma H_1)z_3^2 - (\sigma n_0 + \sigma H_1)z_3\sin\alpha + \sigma^2 n_0^2\sin^2\alpha}{z\sin\alpha} = C_1 = \text{const}, \tag{20}$$

$$G\left(\frac{z}{\sin\alpha}, \frac{z_3}{\sin\alpha}, \sin\alpha\right) = C_2 = \text{const}. \tag{21}$$

Система (18) имеет первый интеграл в виде

$$\frac{\sqrt{1+z_*^2}}{\sin\beta_1} = C_3 = \text{const}. \tag{22}$$

В свою очередь, дополнительный первый интеграл имеет вид

$$\pm\frac{\cos\beta_1}{\sqrt{C_3^2 - 1}} = \sin\{C_3(\beta_2 + C_4)\}, \quad C_4 = \text{const}. \tag{23}$$

Теорема. *Система* (17)–(19) *обладает полным набором первых интегралов* (20)–(23), *являющихся элементарными трансцендентными функциями своих фазовых переменных.*

Как уже отмечалось, трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа (наличие у первых интегралов существенно особых точек после их формального продолжения в комплексную область).

В заключение отметим, что ранее другими авторами рассматривались лишь такие движения четырехмерного тела, когда $M \equiv 0$. Данная работа продолжает направление, развиваемое автором, в исследовании уравнений движения твердого тела на $so(4) \times \mathbf{R}^4$ $(M \neq 0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 3. С. 51–54.
2. *Шамолин М.В.* // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14. В. 3. С. 3–237.
3. *Шамолин М.В.* // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 65–68.
4. *Шамолин М.В.* // ДАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.
5. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.
6. *Шамолин М.В* // УМН. 2005. Т. 60. В. 6. С. 233–234.
7. *Шамолин М.В.* // УМН. 2010. Т. 65. В. 1. С. 189–190.