Современная математика и ее приложения. Том xx (2011). С. 22–39

УДК 517.9; 531.01; 531.552; 539.3

СИМВОЛЫ ЛЕВИ-ЧИВИТЫ, ОБОБЩЕННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В МЕХАНИКЕ МНОГОМЕРНОГО ТЕЛА

© 2011 г. **Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, М. В. ШАМОЛИН**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Первые формальные обобщения соотношений динамики абсолютно твердого тела, гидромеханики и теории упругости на n-мерный случай можно найти еще в работах Л. Эйлера и А. Ж.-К. Сен-Венана. Им не придавалось большого физического смысла и долгое время они воспринимались как упражнения по тензорной алгебре и анализу. Именно с таких позиций, например, в [1] получены динамические уравнения Эйлера n-мерного тела. Отмечено, что обобщение с трехмерного на n-мерный случай не имеет никакого практического значения. Однако далее в этой же монографии подчеркнуто, что «только освобождение от ограничения определенным числом измерений и возможность такой формулировки законов природы, в которой размерность фигурирует как нечто случайное, убеждают нас в том, что достигнуто их полное математическое понимание».

Действительно, тензорная природа многих физических соотношений в $\mathbb{R}^3$, практическая значимость которых не подвергается сомнению, и такие важные особенности, как их число, виды симметрии и ранг входящих в них величин, становятся понятными и очевидными лишь с выходом в большее число измерений. Это относится, например, к числу уравнений совместности деформаций или напряжений в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$.

Необходимо заметить, что при обобщении на n-мерный случай, как, пожалуй, и при изложении всей классической механики, имеются два подхода, условно называемые тензорным и матричным (тем самым в названиях подчеркивается различие в понятиях «тензор» и «матрица» или «вектор» и «столбец чисел»). Первый из них удобен для понимания инвариантности механических величин и законов, в которых они участвуют. Второй чаще используется на вычислительном этапе решения задач, где важно найти подходящий способ дискретизации. О преимуществах обоих подходов в данной работе речь пойдет ниже.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 08-01-00231, 08-01-00251 и 08-01-00353).

С точки зрения тензорного подхода все инвариантные физические величины можно разбить на две группы. В одну из них входят те тензорные объекты, ранг которых не зависит от размерности n пространства, а зависит лишь диапазон изменения индексов в некоторой выбранной системе координат. Сюда относятся все скаляры, радиус-вектор, векторы скорости и ускорения, тензоры второго ранга деформаций и напряжений, тензор четвертого ранга модулей упругости и многие другие объекты. Если в формулу входят только такие величины, то вид ее при любом n один и тот же. Например, соотношения Коши, связывающие деформации и перемещения,

$$\varepsilon^{\{2\}} = \frac{1}{2}\bigl(\operatorname{Grad}\mathbf{u} + (\operatorname{Grad}\mathbf{u})^T\bigr), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}) \tag{1.1}$$

записываются как в безындексной, так и в индексной формах одинаково в пространстве любой размерности. В (1.1) следует лишь потребовать, чтобы $i, j = 1, \ldots, n$. Обобщение на $\mathbb{R}^n$ соотношений такого типа не представляет сложностей и поэтому в данной работе на этом отдельное внимание заостряться не будет.

К другой группе физических величин относятся тензорные объекты, ранг которых зависит от n. Это прежде всего угловая скорость, моменты, векторные потенциалы и другие величины, в выражения для которых входят векторные произведения, в частности, дифференциальный оператор ротор. Индексная запись соотношений, включающих такие величины, содержит n-мерный символ Леви-Чивиты $\epsilon_{i_1\ldots i_n}$, антисимметричный по любой паре своих n индексов.

Сразу отметим несколько важных свойств символа $\epsilon_{i_1\ldots i_n}$, в том числе представление его сверток с самим собой по разному количеству индексов через символы Кронекера δ_{ij}:

$$\epsilon_{i_1\ldots i_n}\epsilon_{j_1\ldots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1j_1} & \ldots & \delta_{i_1j_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_nj_1} & \ldots & \delta_{i_nj_n} \end{vmatrix} = \delta^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n}, \tag{1.2}$$

$$\epsilon_{i_1\ldots i_{n-1}l}\epsilon_{lj_1\ldots j_{n-1}} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1j_1} & \ldots & \delta_{i_1j_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_{n-1}j_1} & \ldots & \delta_{i_{n-1}j_{n-1}} \end{vmatrix} = \delta^{i_1\ldots i_{n-1}l}_{lj_1\ldots j_{n-1}}, \tag{1.3}$$

$$\epsilon_{jki_1\ldots i_{n-2}}\epsilon_{i_1\ldots i_{n-2}lm} = (n-2)!\,(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}), \tag{1.4}$$

$$\epsilon_{ji_1\ldots i_{n-1}}\epsilon_{i_1\ldots i_{n-1}l} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\delta_{jl}, \tag{1.5}$$

$$\epsilon_{i_1\ldots i_n}\epsilon_{i_1\ldots i_n} = n!. \tag{1.6}$$

По повторяющимся два раза в одночлене малым латинским индексам (как в левых частях (1.3)–(1.6)) производится суммирование от 1 до n. Если латинские индексы большие, то суммирование происходит от 1 до 2 (т.е. речь идет о $\mathbb{R}^2$). По греческим индексам, сколько бы раз они в одночлене не повторялись, суммирования нет.

2. Определение обобщенного векторного произведения и его особенности

Выберем в $\mathbb{R}^n$ ортогональную декартову систему координат $Ox_1\ldots x_n$ с базисными векторами $\mathbf{e}_i$, так что $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Любой тензор $\mathbf{A}^{\{k\}}$ ранга k в полиадном базисе $\mathbf{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_k}$ может быть представлен своими компонентами:

$$\mathbf{A}^{\{k\}} = A_{i_1\ldots i_k}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2.1}$$

По любой паре индексов i_l и i_m, $1 \leqslant l < m \leqslant k$, тензор $\mathbf{A}^{\{k\}}$ естественным образом разлагается в сумму своих симметричной $\mathbf{A}^{\{k\}s}$ и антисимметричной $\mathbf{A}^{\{k\}a}$ частей:

$$A^s_{i_1\ldots i_l\ldots i_m\ldots i_k} = \frac{1}{2}(A_{i_1\ldots i_l\ldots i_m\ldots i_k} + A_{i_1\ldots i_m\ldots i_l\ldots i_k}), \tag{2.2}$$

$$A^a_{i_1\ldots i_l\ldots i_m\ldots i_k} = \frac{1}{2}(A_{i_1\ldots i_l\ldots i_m\ldots i_k} - A_{i_1\ldots i_m\ldots i_l\ldots i_k}). \tag{2.3}$$

Обобщенным векторным произведением в $\mathbb{R}^n$ двух тензоров $\mathbf{A}^{\{k\}}$ и $\mathbf{B}^{\{j\}}$ рангов k и j, где $k+j \leqslant n$, назовем (см. [2]) тензор $\mathbf{C}^{\{n-k-j\}} = \mathbf{A}^{\{k\}} \times \mathbf{B}^{\{j\}}$ ранга $n-k-j$ с компонентами

$$C_{i_{k+j+1}\dots i_n} = \epsilon_{i_1\dots i_n} A_{i_1\dots i_k} B_{i_{k+1}\dots i_{k+j}}. \tag{2.4}$$

Поскольку свертка по $k+j$ индексам в правой части (2.4) происходит с антисимметричным объектом, левая часть зависит лишь от антисимметричных частей (2.3) тензоров $\mathbf{A}^{\{k\}}$ и $\mathbf{B}^{\{j\}}$. Поэтому без ограничения общности во всех формулах типа (2.4) будем полагать тензоры $\mathbf{A}^{\{k\}}$ и $\mathbf{B}^{\{j\}}$ антисимметричными по любой паре своих k и j индексов[1]. Следовательно, из всех n^k и n^j компонент независимыми у них будут только C_n^k и C_n^j соответственно. Тензор $\mathbf{C}^{\{n-k-j\}}$ в (2.4) также антисимметричен и имеет $C_n^{n-k-j} = C_n^{k+j}$ независимых компонент.

Тензору $\mathbf{A}^{\{k\}}$ по формулам

$$a_{i_{k+1}\dots i_n} = \epsilon_{i_1\dots i_n} A_{i_1\dots i_k}, \quad \mathbf{a}^{\{n-k\}} = \mathbf{A}^{\{k\}} \times 1 = 1 \times \mathbf{A}^{\{k\}} \tag{2.5}$$

поставим в соответствие антисимметричный дуальный, или двойственный ему, тензор $\mathbf{a}^{\{n-k\}} = \operatorname{dual} \mathbf{A}^{\{k\}}$. Число независимых компонент у $\mathbf{A}^{\{k\}}$ и $\mathbf{a}^{\{n-k\}}$ совпадает и равно C_n^k.

Умножив обе части (2.5) на $\epsilon_{i_{k+1}\dots i_n l_1\dots l_k}$ и просуммировав по индексам $i_{k+1},\dots,i_n$, нетрудно вывести формулу обращения:

$$\epsilon_{i_{k+1}\dots i_n l_1\dots l_k}\, a_{i_{k+1}\dots i_n} = (-1)^{k(n-k)}\, k!\,(n-k)!\, A_{l_1\dots l_k}. \tag{2.6}$$

Таким образом, если тензор $\mathbf{a}^{\{n-k\}}$ дуален $\mathbf{A}^{\{k\}}$, то $\mathbf{A}^{\{k\}}$ дуален $(-1)^{k(n-k)}\mathbf{a}^{\{n-k\}}/(k!(n-k)!)$:

$$\mathbf{a}^{\{n-k\}} = \operatorname{dual} \mathbf{A}^{\{k\}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}^{\{k\}} = \operatorname{dual} \frac{(-1)^{k(n-k)}}{k!(n-k)!}\, \mathbf{a}^{\{n-k\}}.$$

Ни при каких $n \geqslant 2$ и k выражение $(-1)^{k(n-k)}k!(n-k)!$ не равно единице, поэтому добиться взаимной двойственности тензоров $\mathbf{A}^{\{k\}}$ и $\mathbf{a}^{\{n-k\}}$ не удается в пространстве любой размерности.

В $\mathbb{R}^3$ при $k=j=1$ все три тензора в (2.4) являются векторами, а сама формула (2.4), очевидно, есть определение векторного произведения $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Можно привести механические примеры дуальных тензоров в $\mathbb{R}^3$. Так, вектору вихря $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}/2$, где $\mathbf{v}$ — вектор скорости, дуален антисимметричный тензор вихря (спин-тензор) $\boldsymbol{\Omega}^{\{2\}} = \big(\operatorname{Grad}\mathbf{v} - (\operatorname{Grad}\mathbf{v})^T\big)/2$ в силу соотношений

$$\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\Omega_k, \quad \Omega_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega_{ij}. \tag{2.7}$$

Согласно известным формулам (2.7) любому антисимметричному тензорному полю второго ранга в $\mathbb{R}^3$ можно поставить в соответствие определенное векторное поле и наоборот.

Если в (2.4) положить $k=1$ и выбрать в качестве $\mathbf{A}$ дифференциальный оператор набла $\nabla = \mathbf{e}_i(\partial/\partial x_i) \equiv \mathbf{e}_i\partial_i$, то получим определения обобщенного ротора тензора ранга j в $\mathbb{R}^n$:

$$(\operatorname{Rot}\mathbf{B}^{\{j\}})^{\{n-j-1\}} \equiv (\nabla \times \mathbf{B}^{\{j\}})^{\{n-j-1\}} = \epsilon_{i_1\dots i_n} B_{i_2\dots i_{j+1},i_1} \mathbf{e}_{i_{j+2}} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n} \tag{2.8}$$

и ротора вектора $\mathbf{B}$ в $\mathbb{R}^n$:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{B})^{\{n-2\}} \equiv (\nabla \times \mathbf{B})^{\{n-2\}} = \epsilon_{i_1\dots i_n} B_{i_2,i_1} \mathbf{e}_{i_3} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n}. \tag{2.9}$$

Обратим внимание, что в тензорном анализе в $\mathbb{R}^3$ ротором тензора второго ранга традиционно называют не скаляр $\epsilon_{ilk} B_{lk,i}$, получающийся из (2.8) при $n=3$, $j=2$, а тензор второго ранга

$$(\operatorname{Rot}\mathbf{B}^{\{2\}})^{\{2\}} = \epsilon_{ilm} B_{lk,i}\, \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_k,$$

след которого равен выше упомянутому скаляру. При этом оператор ротор как вектора, так и тензора второго ранга сохраняет ранг объекта. Будем оговаривать различие в терминологии — «ротор» и «обобщенный ротор» — там, где это будет иметь значение.

---

[1]В дальнейшем такие тензоры будем называть просто антисимметричными.

Другие дифференциальные операторы первого порядка — дивергенция Div и градиент Grad — не зависят от n, соответственно уменьшая и увеличивая на единицу ранг того объекта, на который они действуют. Комбинации этих операторов $\operatorname{Div}\operatorname{Grad} \equiv \Delta$ (оператор Лапласа) и $\operatorname{Grad}\operatorname{Div}$ оставляют ранг объекта без изменения. При этом, очевидно, сохраняются тождества

$$\operatorname{Div}\left[(\operatorname{Rot}\mathbf{B}^{\{j\}})^{\{n-j-1\}}\right] \equiv \mathbf{0}^{\{n-j-2\}}, \quad \operatorname{Rot}\left[(\operatorname{Grad}\mathbf{B}^{\{j\}})^{\{j+1\}}\right] \equiv \mathbf{0}^{\{n-j-1\}}.$$

Из определения (2.4), в частности, следует, что обобщенным векторным произведением векторов $\mathbf{A} = A_I\mathbf{e}_I$ и $\mathbf{B} = B_J\mathbf{e}_J$ в $\mathbb{R}^2$ является скаляр $C = \epsilon_{IJ}A_IB_J$ [1]. Обобщенный ротор векторного поля на плоскости — также скаляр:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \epsilon_{IJ}B_{J,I} = B_{2,1} - B_{1,2}.$$

3. Двойное векторное произведение в $\mathbb{R}^n$

Если $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — три вектора в $\mathbb{R}^n$, то ранг двойного векторного произведения $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ равен $n-(1+(n-1-1)) = 1$. Используя правило (1.4) свертки символов Леви-Чивиты по $n-2$ индексам, запишем

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \epsilon_{mi_1\ldots i_{n-2}l}\,(A_m\epsilon_{jki_1\ldots i_{n-2}}B_jC_k)\,\mathbf{e}_l = \\ &= (-1)^{n-1}\epsilon_{lmi_1\ldots i_{n-2}}\epsilon_{i_1\ldots i_{n-2}jk}\,A_mB_jC_k\,\mathbf{e}_l = \\ &= (-1)^{n-1}(n-2)!\,(\delta_{lj}\delta_{mk}-\delta_{lk}\delta_{mj})\,A_mB_jC_k\,\mathbf{e}_l = \\ &= (-1)^{n-1}(n-2)!\,[\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})], \end{aligned}\tag{3.1}$$

что является обобщением известной формулы «бац минус цаб».

В четномерных пространствах, в частности, при $n=2$ в правой части (3.1) возникает знак минус. Если же $\mathbb{R}^2$ вложить в $\mathbb{R}^3$ и двойное векторное произведение векторов $\mathbf{A} = A_I\mathbf{e}_I$, $\mathbf{B} = B_J\mathbf{e}_J$ и $\mathbf{C} = C_K\mathbf{e}_K$, лежащих в плоскости $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, представить как

$$\begin{aligned}\epsilon_{Mil}\,(A_M\epsilon_{JKi}B_JC_K)\,\mathbf{e}_l &= -\epsilon_{ML3}\,\epsilon_{JK3}\,A_MB_JC_K\,\mathbf{e}_L = \\ &= -(\delta_{MJ}\delta_{LK}-\delta_{MK}\delta_{LJ})\,A_MB_JC_K\,\mathbf{e}_L = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}),\end{aligned}$$

то знака минус, как видно, нет. Данное кажущееся несоответствие подчеркивает зависимость от размерности пространства результата произведения (3.1), а следовательно, и (2.4).

Положив в (3.1) сначала $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \nabla$, а затем $\mathbf{A} = \mathbf{C}$, $\mathbf{B} = \nabla$, придем к выражениям для повторного ротора вектора и векторного произведения вектора на его ротор в $\mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{C} = (-1)^{n-1}(n-2)!\,(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{C}-\Delta\mathbf{C}),\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\times\operatorname{rot}\mathbf{C} &= (-1)^{n-1}(n-2)!\,(C_m\partial_kC_m - C_m\partial_mC_k)\mathbf{e}_k = \\ &= (-1)^{n-1}(n-2)!\,\mathbf{C}\cdot\big((\operatorname{Grad}\mathbf{C})^T-\operatorname{Grad}\mathbf{C}\big),\end{aligned}\tag{3.3}$$

которые часто используются в механике сплошной среды. Остановимся далее на некоторых таких приложениях.

3.1. Формула Громеки—Лемба в $\mathbb{R}^n$. Конвективную производную $v_{i,j}v_j\mathbf{e}_i$ скорости $\mathbf{v}$ по времени можно записать как $\operatorname{grad}|\mathbf{v}|^2/2 + (v_{i,j}v_j - v_{j,i}v_j)\mathbf{e}_i$, что согласно формуле (3.3) равно $\operatorname{grad}|\mathbf{v}|^2/2 + [(-1)^n/(n-2)!]\,\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}$. Поэтому полная производная скорости по времени, или ускорение, может быть представлена обобщенной формулой Громеки – Лемба

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{grad}|\mathbf{v}|^2 + \frac{(-1)^n}{(n-2)!}\,\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}.\tag{3.4}$$

[1] Именно скаляр, а не вектор, перпендикулярный плоскости $(\mathbf{A},\mathbf{B})$, ведь «плоские люди» не знают о существовании ортогонального их миру направления.

3.2. Уравнения Ламе и скорости упругих волн в $\mathbb{R}^n$. Уравнения движения n-мерного изотропного упругого тела в перемещениях $\mathbf{u}$ (уравнения Ламе) выводятся аналогично тому, как это делается в трехмерном случае. Они имеют вид

$$(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}+\rho\mathbf{F}=\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \tag{3.5}$$

где λ и μ — постоянные Ламе, $\mathbf{F}$ — массовые силы. Подставляя в (3.5) из (3.2)

$$\Delta\mathbf{u}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\frac{(-1)^n}{(n-2)!}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}, \tag{3.6}$$

придем к другой записи уравнений движения:

$$(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\frac{(-1)^n\mu}{(n-2)!}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}+\rho\mathbf{F}=\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}. \tag{3.7}$$

Применим оператор div к обеим частям (3.7) и получим, что дилатация $\theta=\operatorname{div}\mathbf{u}$ удовлетворяет скалярному неоднородному волновому уравнению

$$\left(c_1^2\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\theta=-\operatorname{div}\mathbf{F},\quad c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}. \tag{3.8}$$

Подействуем теперь оператором rot на обе части (3.5), тем самым превращая их в тензоры ранга $n-2$:

$$\left(c_2^2\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\operatorname{rot}\mathbf{u})^{\{n-2\}}=-(\operatorname{rot}\mathbf{F})^{\{n-2\}},\quad c_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{3.9}$$

Перейдем в (3.9) к дуальным объектам, т.е. антисимметричным тензорам второго ранга с $n(n-1)/2$ независимыми компонентами. Каждая из них будет удовлетворять неоднородному волновому уравнению с одной и той же скоростью c_2 распространения волн и со своей правой частью.

Итак, в неограниченной n-мерной изотропной упругой среде существует только два типа волн — продольные и поперечные — со скоростями c_1 и c_2, не отличающимися от своих значений в трехмерном случае.

3.3. Разложение векторного поля в $\mathbb{R}^n$ на потенциальную и соленоидальную части. Представим n-мерное векторное поле $\mathbf{u}\in C^2$ в виде суммы

$$\mathbf{u}=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{Rot}\psi^{\{n-2\}}, \tag{3.10}$$

где φ и $\psi^{\{n-2\}}$ назовем скалярным и тензорным потенциалами. Покомпонентно равенство (3.10) можно записать в виде

$$u_l=\varphi_{,l}+\epsilon_{ji_1\ldots i_{n-2}l}\,\psi_{i_1\ldots i_{n-2},j}. \tag{3.11}$$

Полагая $\psi^{\{n-2\}}=\operatorname{dual}\mathbf{\Psi}^{\{2\}}$, т. е. $\psi_{i_1\ldots i_{n-2}}=\epsilon_{kmi_1\ldots i_{n-2}}\Psi_{km}$ и подставляя в (3.11), после свертки (1.4) символов Леви-Чивиты по $n-2$ индексам получим

$$\begin{gathered} u_l=\varphi_{,l}+(-1)^n\cdot 2(n-2)!\,\Psi_{jl,j}\\ \mathbf{u}=\operatorname{grad}\varphi+(-1)^n\cdot 2(n-2)!\,\operatorname{Div}\mathbf{\Psi}^{\{2\}} \end{gathered} \tag{3.12}$$

Эквивалентные друг другу разложения (3.10) и (3.12) являются обобщением теоремы Гельмгольца о разложении векторного поля на потенциальную и соленоидальную[1] части. Первая из них по известному полю $\mathbf{u}$ восстанавливается из уравнения $\Delta\varphi=\operatorname{div}\mathbf{u}$. Выведем систему для нахождения $n(n-1)/2$ компонент тензора $\mathbf{\Psi}^{\{2\}}$. Для этого подействуем оператором rot на обе части векторного уравнения (3.12):

$$\epsilon_{kli_1\ldots i_{n-2}}u_{l,k}=(-1)^n\cdot 2(n-2)!\,\epsilon_{kli_1\ldots i_{n-2}}\Psi_{jl,jk} \tag{3.13}$$

[1] Действительно, для любого антисимметричного тензора второго ранга $\mathbf{\Psi}^{\{2\}}$ скаляр $\operatorname{div}\operatorname{Div}\mathbf{\Psi}^{\{2\}}$ тождественно равен нулю.

и свернем (3.13) с $\epsilon_{i_1\ldots i_{n-2}mp}$. С учетом (1.4) придем к искомым $n(n-1)/2$ уравнениям

$$\Psi_{jp,jm} - \Psi_{jm,jp} = \frac{(-1)^n}{2(n-2)!}\,(u_{p,m} - u_{m,p}). \tag{3.14}$$

4. Движение многомерного твердого тела с неподвижной точкой

Вращение n-мерного абсолютно твердого тела вокруг неподвижной точки — одно из наиболее традиционно разрабатываемых приложений n-мерной механики. Уравнения движения такого тела — обобщенные уравнения Эйлера — были выведены и проанализированы с тех или иных позиций в классических работах [1, 3, 4] (см. также обзоры [5–8]). В случае отсутствия момента внешних сил в [9] получены два первых интеграла — энергии и моментов, а в [10] явно выписано $n-1$ первых интегралов. Числу возможных первых интегралов посвящены работы [11, 12], где показывается, что система имеет $n^2/4$ либо $(n^2-1)/4$ однозначных интегралов движения при четном либо нечетном n. Общее решение выражается через θ-функции римановых поверхностей.

В [7] рассмотрены вопросы геометрии скобок Пуассона интегрируемых гамильтоновых систем на группе $\mathfrak{so}(n)$ и получены динамические уравнения движения n-мерного твердого тела в инвариантной форме. Для четырехмерного твердого тела дан обзор интегрируемых случаев Богоявленского, Веселова, Манакова и других авторов. Отличительной особенностью является отсутствие момента внешних сил в правой части динамических уравнений.

Обобщенным гироскопом в $\mathbb{R}^n$ по аналогии с трехмерным пространством в [13] названо твердое тело с неподвижной точкой, у которого все моменты инерции относительно n гиперплоскостей разбиваются на две группы, причем в каждой из этих групп моменты равны между собой. В данном случае система $n(n-1)/2$ обобщенных динамических уравнений Эйлера имеет определенное число первых интегралов, которое зависит от инерционной структуры гироскопа, и редуцируется к линейной неоднородной неавтономной системе. Подробно исследуется случай $n=4$.

4.1. Обобщенные формулы Эйлера и Ривальса.

Поместим неподвижную точку при движении n-мерного абсолютно твердого тела в начало системы координат O. Радиус-вектор любой точки тела $\mathbf{r} = x_i\mathbf{e}_i$ ($|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x_ix_i}$) и скорость $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i$ свяжем друг с другом обобщенной формулой Эйлера [2]:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}^{\{n-2\}}(t)\times\mathbf{r}, \quad v_k = \epsilon_{i_1\ldots i_{n-2}lk}\,\Omega_{i_1\ldots i_{n-2}}(t)\,x_l \tag{4.1}$$

где $\boldsymbol{\Omega}^{\{n-2\}}$ — тензор угловой скорости ранга $n-2$ или просто угловая скорость, зависящая только от времени. Более компактно равенства (4.1) можно записать в терминах дуальной угловой скорости (см. (2.5), (2.6))

$$\omega^{\{2\}} = \operatorname{dual}\boldsymbol{\Omega}^{\{n-2\}}, \quad \boldsymbol{\Omega}^{\{n-2\}} = \operatorname{dual}\frac{\omega^{\{2\}}}{2(n-2)!} \tag{4.2}$$

которая для любого n является антисимметричным тензором второго ранга с $N = n(n-1)/2$ независимыми компонентами:

$$\mathbf{v} = -\omega^{\{2\}}(t)\cdot\mathbf{r}, \quad v_k = \omega_{lk}(t)x_l. \tag{4.3}$$

Заметим, что

$$(\operatorname{Grad}\mathbf{v})^{\{2\}} = v_{k,l}\,\mathbf{e}_l\otimes\mathbf{e}_k = \omega_{lk}\mathbf{e}_l\otimes\mathbf{e}_k = \omega^{\{2\}}, \tag{4.4}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v})^{\{n-2\}} = \epsilon_{lki_1\ldots i_{n-2}}\,v_{k,l}\,\mathbf{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_{n-2}} = \\ = \epsilon_{lki_1\ldots i_{n-2}}\,\omega_{lk}\,\mathbf{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_{n-2}} = 2(n-2)!\,\boldsymbol{\Omega}^{\{n-2\}}. \tag{4.5}$$

Тензорам $\boldsymbol{\Omega}^{\{n-2\}}$ и $\omega^{\{2\}}$ формально можно сопоставить вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}\in\mathbb{R}^N$. При $n=3$, $N=3$ объекты $\boldsymbol{\Omega}^{\{1\}}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ совпадают; при $n=2$, $N=1$ угловая скорость — скалярная величина, которой соответствует одномерное векторное поле.

Введем в рассмотрение ускорение $\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{w} = w_i \mathbf{e}_i$, тензор углового ускорения $\boldsymbol{\Xi}^{\{n-2\}} = \Xi_{i_1 \dots i_{n-2}} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{n-2}}$ (угловое ускорение тела) и тензор $\xi^{\{2\}} = \xi_{ij} \, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ (дуальное угловое ускорение)

$$\Xi_{i_1 \dots i_{n-2}} = \dot{\Omega}_{i_1 \dots i_{n-2}}, \quad \xi_{ij} = \dot{\omega}_{ij}. \tag{4.6}$$

Дифференцируя по времени обе части обобщенной формулы Эйлера (4.1), получим обобщенную формулу Ривальса в двух видах [1]:

$$\begin{gathered} w_k = \epsilon_{i_1 \dots i_{n-2} lk} \, \Xi_{i_1 \dots i_{n-2}} x_l - \delta^{i_1 \dots i_{n-2} kl}_{j_1 \dots j_{n-2} ml} \Omega_{i_1 \dots i_{n-2}} \Omega_{j_1 \dots j_{n-2}} x_m, \\ \mathbf{w} = \boldsymbol{\Xi}^{\{n-2\}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}^{\{n-2\}} \times \left(\boldsymbol{\Omega}^{\{n-2\}} \times \mathbf{r} \right), \end{gathered} \tag{4.7}$$

$$w_k = \xi_{lk} \, x_l - \omega_{lk} \, \omega_{mk} \, x_m, \quad \mathbf{w} = -\xi^{\{2\}} \cdot \mathbf{r} + \omega^{\{2\}} \cdot \omega^{\{2\}} \cdot \mathbf{r}. \tag{4.8}$$

4.2. Гиперплоское движение в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим подробнее гиперплоское движение n-мерного тела с неподвижной точкой, при котором компонента v_n скорости всех точек равна нулю. Докажем, что такое движение, представляющее собой вращение вокруг оси x_n в $\mathbb{R}^n$, описывается тензором угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}^{\{n-2\}}$ с компонентами

$$\Omega_{i_1 \dots i_{n-2}} = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \, \widetilde{\Omega}_{i_1 \dots \bar{i}_j \dots i_{n-2}} \, \delta_{i_j n} \tag{4.9}$$

где $\widetilde{\Omega}_{i_1 \dots \bar{i}_j \dots i_{n-2}} \equiv \widetilde{\Omega}_{i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{n-2}}$ — компоненты некоторого тензора $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{\{n-3\}}$ ранга $n-3$.

Подставим (4.9) в (4.1) и получим

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \, \epsilon_{i_1 \dots i_{n-2} lk} \, \widetilde{\Omega}_{i_1 \dots \bar{i}_j \dots i_{n-2}} \, \delta_{i_j n} \, x_l = \\ &= \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \, \epsilon_{i_1 \dots i_{j-1} n i_{j+1} \dots i_{n-2} lk} \, \widetilde{\Omega}_{i_1 \dots \bar{i}_j \dots i_{n-2}} \, x_l = \\ &= \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{2(n-j)} \, \epsilon_{i_1 \dots \bar{i}_j \dots i_{n-2} lkn} \, \widetilde{\Omega}_{i_1 \dots \bar{i}_j \dots i_{n-2}} \, x_l = \epsilon_{i_1 \dots i_{n-3} lkn} \widetilde{\Omega}_{i_1 \dots i_{n-3}} \, x_l \end{aligned} \tag{4.10}$$

Из цепочки (4.10) видно, что $v_n = 0$ для любой точки тела. Поскольку левая и правая части (4.10) фактически образуют обобщенную формулу Эйлера (4.1), но для $\mathbb{R}^{n-1}$, то $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{\{n-3\}}$ — тензор угловой скорости вращения твердого тела в гиперплоскости $x_n = 0$ (вокруг оси x_n в $\mathbb{R}^n$).

В терминах дуальной угловой скорости гиперплоское движение в $\mathbb{R}^n$ задается значительно компактнее по сравнению с (4.9):

$$\omega_{nl} = 0, \quad l = 1, \dots, n-1. \tag{4.11}$$

4.3. Инерционные и динамические характеристики твердого тела в $\mathbb{R}^n$. Обобщим естественным образом на $\mathbb{R}^n$ вектор количества движения $\mathbf{Q} = Q_k \mathbf{e}_k$, тензор момента количества движения (момента импульса) $\mathbf{K}^{\{n-2\}} = K_{i_1 \dots i_{n-2}} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{n-2}}$, дуальный тензор момента количества движения $\mathbf{k}^{\{2\}} = k_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ и кинетическую энергию T твердого тела, занимающего в момент времени t объем V:

$$\begin{aligned} Q_k &= \int\limits_V \rho v_k \, dV = \epsilon_{i_1 \dots i_{n-2} lk} \Omega_{i_1 \dots i_{n-2}} \int\limits_V \rho x_l \, dV = \\ &= \omega_{lk} \int\limits_V \rho x_l \, dV = M \epsilon_{i_1 \dots i_{n-2} lk} \Omega_{i_1 \dots i_{n-2}} x_l^{(c)} = M \omega_{lk} x_l^{(c)} \end{aligned} \tag{4.12}$$

[1] В операторной (матричной) форме обобщенные формулы Эйлера и Ривальса будут приведены ниже.

$$K_{i_1\ldots i_{n-2}} = \delta^{j_1\ldots j_{n-2}ml}_{i_1\ldots i_{n-2}kl}\Omega_{j_1\ldots j_{n-2}}\int\limits_V \rho x_k x_m\,dV \equiv I^{j_1\ldots j_{n-2}}_{i_1\ldots i_{n-2}}\Omega_{j_1\ldots j_{n-2}}, \tag{4.13}$$

$$k_{ij} = (n-2)!\int\limits_V \rho(\omega_{mj}x_i - \omega_{mi}x_j)x_m\,dV, \tag{4.14}$$

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho|\mathbf{v}|^2\,dV = \frac{1}{2}\,\delta^{j_1\ldots j_{n-2}ml}_{i_1\ldots i_{n-2}kl}\Omega_{j_1\ldots j_{n-2}}\Omega_{i_1\ldots i_{n-2}}\int\limits_V \rho x_k x_m\,dV = \frac{1}{2}\,\omega_{ml}\omega_{kl}\int\limits_V \rho x_k x_m\,dV$$
$$= -\frac{1}{2}\int\limits_V \rho\mathbf{r}\cdot\omega^{\{2\}}\cdot\omega^{\{2\}}\cdot\mathbf{r}\,dV \equiv \frac{1}{2}I^{j_1\ldots j_{n-2}}_{i_1\ldots i_{n-2}}\Omega_{j_1\ldots j_{n-2}}\Omega_{i_1\ldots i_{n-2}}. \tag{4.15}$$

В (4.12)–(4.15) $\rho(\mathbf{r})$ — плотность тела, имеющая физическую размерность ML^{-n}; M — масса тела; $x_l^{(c)}$ — координаты центра масс; $\mathbf{I}^{\{2n-4\}} = I^{j_1\ldots j_{n-2}}_{i_1\ldots i_{n-2}}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_{n-2}}\otimes\mathbf{e}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{j_{n-2}}$ — тензор инерции ранга $2n-4$ с компонентами

$$I^{j_1\ldots j_{n-2}}_{i_1\ldots i_{n-2}} = \delta^{j_1\ldots j_{n-2}ml}_{i_1\ldots i_{n-2}kl}\int\limits_V \rho x_k x_m\,dV. \tag{4.16}$$

Определения $\mathbf{K}^{\{n-2\}}$ и T имеют привычный в классической механике вид

$$\mathbf{K}^{\{n-2\}} = \mathbf{I}^{\{2n-4\}}\odot\mathbf{\Omega}^{\{n-2\}},\quad T = \frac{1}{2}\,\mathbf{\Omega}^{\{n-2\}}\odot\mathbf{I}^{\{2n-4\}}\odot\mathbf{\Omega}^{\{n-2\}}, \tag{4.17}$$

где символ $\odot$ означает свертку по $n-2$ индексам.

5. Уравнения совместности деформаций в $\mathbb{R}^n$

На линейные соотношения Коши (1.1), связывающие вектор перемещений $\mathbf{u}$ с симметричной частью его градиента — тензором малых деформаций $\varepsilon^{\{2\}}$, можно посмотреть как на систему $n(n+1)/2$ уравнений

$$u_{j,i} + u_{i,j} = 2\varepsilon_{ij},\quad i,j = 1,\ldots,n, \tag{5.1}$$

относительно n неизвестных u_i с заданными правыми частями. Если в какой-либо точке M' с радиусом-вектором $\mathbf{r}' = x_i'\mathbf{e}_i$ многомерной сплошной среды заданы вектор перемещений $\mathbf{u}' = u_i'\mathbf{e}_i$ и антисимметричная часть его градиента — тензор поворотов

$$\chi^{\{2\}} = \chi'_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j = [(u'_{j,i} - u'_{i,j})/2]\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j,$$

в то время как деформации известны всюду, то компоненты u_i'' в любой другой точке M'' с радиусом-вектором $\mathbf{r}'' = x_i''\mathbf{e}_i$ определяются по формулам Чезаро

$$u_i'' = u_i' + \chi'_{ji}(x_j'' - x_j') + \int\limits_C [\varepsilon_{ik} + (\varepsilon_{jk,i} - \varepsilon_{ik,j})(x_j - x_j'')]\,dx_k, \tag{5.2}$$

где C — произвольная кривая, соединяющая точки M' и M''. Вывод формул (5.2) в n-мерном случае ничем не отличается от соответствующего вывода в трехмерном (см., например, [14, с. 66-67]).

Если деформации отсутствуют, т. е. $\varepsilon_{ij}\equiv 0$, то из (5.2) фактически следует формула Эйлера (4.3) ($\omega_{ij} = \dot\chi'_{ij}$)

$$u_i'' = u_i' + \chi'_{ji}(x_j'' - x_j'), \tag{5.3}$$

причем точка M' играет роль полюса, а тензор поворотов не зависит от координат.

Для записи уравнений совместности деформаций (условий, при которых система (5.1) совместна относительно перемещений) в компактной форме обычно вводят в рассмотрение тензор несовместности Кренера [15]. В $\mathbb{R}^n$ это объект $\eta^{\{2n-4\}} = \operatorname{Ink}\varepsilon^{\{2\}}$ ранга $2n-4$ с декартовыми компонентами [16, 17]

$$\eta_{i_1\ldots i_{n-2}j_1\ldots j_{n-2}} = \epsilon_{i_1\ldots i_{n-2}kl}\,\epsilon_{j_1\ldots j_{n-2}mp}\,\varepsilon_{lm,kp}. \tag{5.4}$$

Обращение в нуль всех компонент $\eta_{i_1\ldots i_{n-2}j_1\ldots j_{n-2}}$ представляет собой необходимое, а для односвязной области и достаточное условие интегрируемости системы (5.1). Таким образом, число N_n независимых компонент (5.4) равно числу независимых уравнений совместности деформаций.

Из определения (5.4) видно, что тензор $\eta^{\{2n-4\}}$ антисимметричен по всем парам из своих первых $n-2$ индексов, а также $n-2$ последних. Умножим обе части (5.4) на $\epsilon_{i_1\ldots i_{n-2}qs}\,\epsilon_{j_1\ldots j_{n-2}tr}$ и просуммируем по повторяющимся $2n-4$ индексам согласно правилу (1.4). Тогда условия совместности деформаций запишутся в виде

$$2R_{sqtr} \equiv \varepsilon_{st,qr} + \varepsilon_{qr,st} - \varepsilon_{sr,qt} - \varepsilon_{qt,sr} = 0, \tag{5.5}$$

т.е. в терминах тензора Римана – Кристоффеля $\mathbf{R}^{\{4\}}$, имеющего ранг 4 для любого n. Его компоненты удовлетворяют классическим в дифференциальной геометрии условиям симметрии

$$R_{sqtr} = -R_{qstr} = -R_{sqrt} = R_{trsq} \tag{5.6}$$

и тождествам Риччи

$$R_{sqtr} + R_{strq} + R_{srqt} = 0. \tag{5.7}$$

Геометрический смысл уравнений совместности (5.5) состоит в том, что n-мерная сплошная среда в любой момент деформации принадлежит n-мерному евклидову пространству, для которого $R_{sqtr} \equiv 0$.

В $\mathbb{R}^n$ равенства (5.5) могут быть разбиты на три группы.

1) Все свободные индексы s, q, t и r различны (этот случай реализуется, начиная с четырехмерного пространства). Подсчитаем число N_{n1} получающихся соотношений. С учетом (5.6) и (5.7) имеем $N_{n1} = 3C_n^4 - C_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)/12$.
2) Ровно один из пары свободных индексов s, q совпадает с одним из пары t, r. Тогда $N_{n2} = 3C_n^3 = n(n-1)(n-2)/2$. Этот случай реализуется, начиная с $n=3$.
3) Пары индексов s, q и t, r совпадают и $N_{n3} = n(n-1)/2$.

В итоге получим

$$N_n = N_{n1} + N_{n2} + N_{n3} = \frac{n^2(n-1)^2}{12}. \tag{5.8}$$

В двумерном случае уравнение совместности деформаций одно, в трехмерном их шесть, причем никакие из них не являются следствиями остальных. В [18] на примере задачи Кельвина о действии сосредоточенной силы в неограниченном трехмерном упругом пространстве предъявлена схема построения всех “лишних” (кроме истинного) решений при игнорировании хотя бы одного из уравнений совместности.

Заметим, что наличие известных тождеств Бьянки

$$R_{sqtr,p} + R_{sqrp,t} + R_{sqpt,r} \equiv 0 \tag{5.9}$$

не означает, что уравнения совместности деформаций зависимы. Тождества (5.9) представляют собой лишь дифференциальные связи третьего порядка, наложенные на компоненты деформаций ε_{ij}.

Различные аспекты и обоснования полезности “выхода” в n-мерное в теории дислокаций приведены в [19], а в теории концентрации напряжений в упругом пространстве со сферическим включением — в [20].

6. Новые случаи полной интегрируемости в динамике твердого тела, находящегося в неконсервативном поле

В данном разделе изложим некоторые приложения операторного (матричного) подхода.

Исследованию случаев полной интегрируемости уравнений движения четырехмерного твердого тела посвящено огромное количество работ. Авторы не претендуют в данном вопросе на некое первенство. Однако при исследовании “маломерных” уравнений движения вполне конкретных (двумерных и трехмерных твердых тел в неконсервативном поле сил (а именно, в поле сил сопротивления)) пришла идея обобщить уравнения на случай движения четырехмерного твердого тела в аналогичном поле неконсервативных сил. В результате такого обобщения получились два случая интегрируемости в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерное пространство, при наличии некоторой следящей силы, позволяющей методическим образом понизить порядок общей системы динамических уравнений движения. Более того, на взгляд авторов, полученные результаты интересны с той точки зрения, что в системе присутствует (сильно) неконсервативная сила.

Ранее в [21, 22] авторами была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [23, 24] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

Итак, в данном разделе исследуются уравнения движения динамически симметричного твердого тела в двух логически возможных случаях — в зависимости от расстановки главных моментов инерции. Структура таких уравнений движения в некотором смысле сохраняется при переносе на случаи большей размерности.

6.1. Два случая динамической симметрии четырехмерного тела. Пусть четырехмерное твердое тело Θ массы m с гладкой трехмерной границей $\partial\Theta$ движется в сопротивляющейся среде, которая заполняет четырехмерную область евклидова пространства. Предположим, что тело является динамически симметричным, при этом имеются две логические возможности представления его тензора инерции: либо в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}, \tag{6.1}$$

либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\}. \tag{6.2}$$

Во втором случае двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 являются плоскостями динамической симметрии тела.

6.2. Физические предположения и уравнения на $\mathfrak{so}(4)$. Предположим, что расстояние от точки N приложения неконсервативной силы $\mathbf{S}$ до точки D является функцией лишь одного параметра — угла α: $DN = R(\alpha)$ (в случае движения в трехмерном пространстве это — угол атаки [20–22]). В случае (6.1) этот угол измеряется между скоростью $\mathbf{v}_D$ точки D и осью Dx_1. В случае (6.2) смысл угла будет понятен из уравнений.

Неконсервативная сила (сопротивления) $\mathbf{S}$ имеет величину

$$S = s(\alpha)\mathrm{sgn}\cos\alpha \cdot v^2, \quad |\mathbf{v}_D| = v$$

где s — некоторая функция, характеризующая в системе как рассеяние, так и подкачку энергии [21, 22].

Для получения явного вида динамической части уравнений движения определим функции R и S, используя при этом информацию о свойствах движения трехмерных тел, следующим образом

[22] (при этом используется также известный аналитический результат С.А.Чаплыгина):

$$R = R(\alpha) = A \sin\alpha, \quad S = S_v(\alpha) = Bv^2 \cos\alpha; \quad A, B > 0$$

Если в данном случае Ω — матрица угловой скорости четырехмерного твердого тела, $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$, то та часть уравнений движения, которая отвечает алгебре $\mathfrak{so}(4)$, имеет следующий вид [25, 26]:

$$\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{6.3}$$

где

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\},$$

$$\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2,\ \ldots,\ \lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2,$$

$[\cdot,\cdot]$ — коммутатор в $\mathfrak{so}(4)$; M — момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbb{R}^4$, спроектированный на естественные координаты в алгебре $\mathfrak{so}(4)$. Антисимметричную матрицу $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$ будем представлять в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

где $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре $\mathfrak{so}(4)$.

При этом, очевидно, выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i$$

для любых $i, j = 1, \ldots, 4$.

При вычислении момента M внешней силы необходимо построить отображение

$$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathfrak{so}(4),$$

переводящее пару векторов из $\mathbb{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры $\mathfrak{so}(4)$.

6.3. Динамика в $\mathbb{R}^4$. Что касается уравнения движения центра масс C четырехмерного твердого тела, то оно представится в виде:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F} \tag{6.4}$$

где по многомерной формуле Ривальса

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}, \quad \mathbf{w}_D = \mathbf{v}_D + \Omega\mathbf{v}_D, \quad E = \dot\Omega.$$

Здесь $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$); E — матрица углового ускорения.

6.4. Обобщенная задача о движении тела под действием следящей силы. Несколько расширим задачу. Предположим, что по прямой Dx_1 (в случае (6.1) или в плоскости Dx_1x_2 (в случае (6.2)) действует некоторая следящая сила $\mathbf{T}$, линия действия которой проходит через центр масс C. Введение данной силы используется для рассмотрения интересующих нас классов движений, в результате чего порядок динамической системы может быть понижен.

6.5. Случай (6.1)**.** Подразумевая, что на тело действует следящая сила $\mathbf{T}$, рассмотрим такой класс движений тела, при котором во все время выполнено условие

$$v = \text{const}. \tag{6.5}$$

Вполне определенным выбором величины следящей силы выполнение условия (6.5) может быть достигнуто [22].

Если $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ — координаты точки N в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, а $\{-S, 0, 0, 0\}$ — координаты вектора силы сопротивления в той же системе, то для поиска момента силы строится вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ -S & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

которая позволяет получить в проекциях на координаты в алгебре $\mathfrak{so}(4)$ момент силы сопротивления:

$$\{0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S\} \in \mathbb{R}^6 \cong M \in \mathfrak{so}(4)$$

Здесь необходимо учесть, что если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — сферические координаты в $\mathbb{R}^4$, то

$$x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1, \quad x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2, \quad x_{4N} = R(\alpha)\sin\beta_1\sin\beta_2.$$

С учетом всего можно расписать уравнение (6.3) в виде

$$\begin{gathered}
(\lambda_4+\lambda_3)\dot\omega_1 + (\lambda_3-\lambda_4)(\omega_3\omega_5+\omega_2\omega_4) = 0,\\
(\lambda_2+\lambda_4)\dot\omega_2 + (\lambda_2-\lambda_4)(\omega_3\omega_6-\omega_1\omega_4) = 0,\\
(\lambda_4+\lambda_1)\dot\omega_3 + (\lambda_4-\lambda_1)(\omega_2\omega_6+\omega_1\omega_5) = x_{4N}S,\\
(\lambda_3+\lambda_2)\dot\omega_4 + (\lambda_2-\lambda_3)(\omega_5\omega_6+\omega_1\omega_2) = 0,\\
(\lambda_1+\lambda_3)\dot\omega_5 + (\lambda_3-\lambda_1)(\omega_4\omega_6-\omega_1\omega_3) = -x_{3N}S,\\
(\lambda_1+\lambda_2)\dot\omega_6 + (\lambda_1-\lambda_2)(\omega_4\omega_5+\omega_2\omega_3) = x_{2N}S.
\end{gathered} \tag{6.6}$$

Очевидно, что в случае (6.1) существуют три циклических первых интеграла у уравнений (6.6):

$$\omega_1 = \omega_1^0, \quad \omega_2 = \omega_2^0, \quad \omega_4 = \omega_4^0. \tag{6.7}$$

Для простоты рассмотрим движения на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0.$$

В результате оставшиеся уравнения на алгебре $\mathfrak{so}(4)$ примут следующий вид ($n_0^2 = AB/(2I_2)$):

$$\begin{gathered}
\dot\omega_3 = n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2,\\
\dot\omega_5 = -n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2,\\
\dot\omega_6 = n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1.
\end{gathered}$$

Если ввести замену угловых скоростей по формулам

$$\begin{gathered}
z_1 = \omega_3\cos\beta_2 + \omega_5\sin\beta_2,\\
z_2 = -\omega_3\sin\beta_2\cos\beta_1 + \omega_5\cos\beta_2\cos\beta_1 + \omega_6\sin\beta_1,\\
z_3 = \omega_3\sin\beta_2\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_2\sin\beta_1 + \omega_6\cos\beta_1,
\end{gathered}$$

то «совместные» уравнения движения на касательном расслоении $T\mathbf{S}^3$ трехмерной сферы (после учета четырех условий (6.5) и (6.7), которые помогают снизить порядок общей системы динамических уравнений движения десятого порядка до порядка шестого) примут симметричный вид

$(\sigma = DC)$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + \sigma n_0^2 v \sin\alpha, \\ \dot{z}_3 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + z_2^2)\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_3 \operatorname{ctg}\alpha + z_1^2 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta_1, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_3 \operatorname{ctg}\alpha - z_1 z_2 \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta_1, \\ \dot{\beta}_1 = z_2 \operatorname{ctg}\alpha, \end{cases} \tag{6.8}$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_1 \operatorname{ctg}\alpha \csc\beta_1. \tag{6.9}$$

У системы (6.8), (6.9) шестого порядка существует независимая подсистема пятого порядка (6.8). Для полного интегрирования данной системы необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$z_1, z_2 \to z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = z_2/z_1$$

система (6.8), (6.9) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + \sigma n_0^2 v \sin\alpha, \\ \dot{z}_3 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha - z^2 \operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot{z} = z z_3 \operatorname{ctg}\alpha, \end{cases} \tag{6.10}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_* = \sqrt{1 + z_*^2}\, z \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta_1, \\ \dot{\beta}_1 = \dfrac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} \cos\alpha \csc\beta_1, \end{cases} \tag{6.11}$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_1(z, z_*) \operatorname{ctg}\alpha \csc\beta_1. \tag{6.12}$$

Видно, что система (6.8) распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (6.10) — третьего, а система (6.11) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.10)–(6.12) достаточно указать два независимых интеграла системы (6.10), один — системы (6.11) и дополнительный интеграл, «привязывающий» уравнение (6.12).

При этом заметим, что систему (6.10) можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2$ двумерной сферы.

Система (6.10) появляется в динамике трехмерного твердого тела [22, 23]. Она обладает двумя трансцендентными интегралами:

$$\frac{z^2 + z_3^2 - \sigma n_0^2 v z_3 \sin\alpha + n_0^2 v^2 \sin^2\alpha}{z \sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const},$$

$$G\left(\frac{z}{\sin\alpha}, \frac{z_3}{\sin\alpha}, \sin\alpha\right) = C_2 = \mathrm{const}.$$

Система (6.11) имеет первый интеграл в виде

$$\frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\sin\beta_1} = C_3 = \mathrm{const}$$

и, в свою очередь, дополнительный первый интеграл имеет вид

$$\pm\frac{\cos\beta_1}{\sqrt{C_3^2 - 1}} = \sin\{C_3(\beta_2 + C_4)\}, \quad C_4 = \mathrm{const}.$$

Заметим, что в приведенных системах в знаменателях содержатся функции $\sin\alpha$ и $\sin\beta_1$, несущие информацию *лишь о том*, что координаты $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ являются сферическими, и при $\sin\alpha = 0$ и $\sin\beta_1 = 0$ они (кинематически) вырождаются.

6.6. Случай (6.2)**.** Неконсервативная сила (сопротивления) $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, 0, 0\}$ и координаты точки ее приложения $N = (0, 0, x_{3N}, x_{4N})$ в системе $Dx_1x_2x_3x_4$ определяются следующим образом:

$$S_1 = S\sin\gamma, \quad S_2 = -S\cos\gamma, \quad \gamma = \mathrm{const},$$

$$x_{3N} = R\cos\beta_1, \quad x_{4N} = R\sin\beta_1,$$

где γ — угол, измеряемый в плоскости Dx_1x_2, и β_1 — угол, измеряемый в плоскости Dx_3x_4.

Таким образом, для нахождения момента силы строится вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{3N} & x_{4N} \\ S_1 & S_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если прямая CD лежит в плоскости Dx_1x_2, и вектор $\mathbf{DC}$ определяет положение центра масс:

$$\mathbf{DC} = \{\sigma\sin\gamma, -\sigma\cos\gamma, 0, 0\},$$

то вектор скорости $\mathbf{v}_D$ точки D можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{v}_D = \{v\cos\alpha\sin\beta_2,\ v\cos\alpha\cos\beta_2, v\sin\alpha\cos\beta_1, v\sin\alpha\sin\beta_1\}, |\mathbf{v}_D| = v,$$

где β_2 — угол, измеряемый в плоскости Dx_1x_2.

С учетом всего этого можно получить уравнения движения в рассмотренном поле внешней силы, переписав соответствующим образом уравнение (6.3):

$$\begin{gathered}
(\lambda_4 + \lambda_3)\dot\omega_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0, \\
(\lambda_2 + \lambda_4)\dot\omega_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = x_{4N}S_2, \\
(\lambda_4 + \lambda_1)\dot\omega_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = -x_{4N}S_1, \\
(\lambda_3 + \lambda_2)\dot\omega_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = -x_{3N}S_2, \\
(\lambda_1 + \lambda_3)\dot\omega_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = x_{3N}S_1, \\
(\lambda_1 + \lambda_2)\dot\omega_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = 0,
\end{gathered} \tag{6.13}$$

где

$$\{0, x_{4N}S_2, -x_{4N}S_1, -x_{3N}S_2, x_{3N}S_1, 0\} \in \mathbb{R}^6 \cong M \in \mathfrak{so}(4)$$

есть момент силы сопротивления.

Очевидно, что система (6.13) допускает наличие двух циклических интегралов:

$$\omega_1 = \omega_1^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_6 = \omega_6^0 = \mathrm{const}. \tag{6.14}$$

Будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях интегралов (6.14):

$$\omega_1^0 = \omega_6^0 = 0.$$

Тогда оставшиеся уравнения на алгебре $\mathfrak{so}(4)$ перепишутся как

$$\begin{gathered}
\dot\omega_2 = -n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\gamma, \\
\dot\omega_3 = -n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\gamma, \\
\dot\omega_4 = n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1\cos\gamma, \\
\dot\omega_5 = n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1\sin\gamma,
\end{gathered}$$

где $n_0^2 = AB/(I_1 + I_3)$.

По-прежнему подразумеваем, что на тело действует следящая сила $\mathbf{T}$, и рассмотрим такой класс движений тела, при котором во все время выполнены условия (неинтегрируемые связи):

$$v = \mathrm{const}, \quad \beta_2 = \mathrm{const}. \tag{6.15}$$

Для этого следящую силу достаточно выбрать из тех соображений, при которых первые два уравнения векторного уравнения (6.4) выполнялись бы тождественно.

Это соответствует тому, что результирующая внешняя сила $\mathbf{S}+\mathbf{T}$, действующая на тело, будет обеспечивать выполнение равенств (6.15), которые становятся инвариантными соотношениями. Тем самым порядок независимой системы восьмого порядка вновь снижается до шести.

Итак, выбирая соответствующим образом величину следящей силы, первые два уравнения векторного уравнения (6.4) можно удовлетворить тождественно, при этом, в принципе, могут выполняться инвариантные соотношения (6.15).

Поскольку выполнены следующие равенства:

$$\Omega\mathbf{v}_D = v\begin{pmatrix} \omega_5\sin\alpha\cos\beta_1 - \omega_3\sin\alpha\sin\beta_1 \\ -\omega_4\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_2\sin\alpha\sin\beta_1 \\ -\omega_5\cos\alpha\sin\beta_2 + \omega_4\cos\alpha\cos\beta_2 \\ \omega_3\cos\alpha\sin\beta_2 - \omega_2\cos\alpha\cos\beta_2 \end{pmatrix},$$

$$E\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma\dot\omega_5\sin\gamma - \sigma\dot\omega_4\cos\gamma \\ \sigma\dot\omega_3\sin\gamma + \sigma\dot\omega_2\cos\gamma \end{pmatrix},$$

$$\Omega^2\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} -\sigma\omega_5^2\sin\gamma - \sigma\omega_4\omega_5\cos\gamma - \sigma\omega_3^2\sin\gamma - \sigma\omega_2\omega_3\cos\gamma \\ \sigma\omega_4\omega_5\sin\gamma + \sigma\omega_4^2\cos\gamma + \sigma\omega_2\omega_3\sin\gamma + \sigma\omega_2^2\cos\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то два последних скалярных уравнения векторного уравнения (6.4) примут вид:

$$\begin{gathered} v\dot\alpha\cos\alpha\cos\beta_1 - v\dot\beta_1\sin\alpha\sin\beta_1 - \omega_5 v\cos\alpha\sin\beta_2 + \\ + \omega_4 v\cos\alpha\cos\beta_2 - \sigma\dot\omega_5\sin\gamma - \sigma\dot\omega_4\cos\gamma = 0, \end{gathered} \tag{6.16}$$

$$\begin{gathered} v\dot\alpha\cos\alpha\sin\beta_1 + v\dot\beta_1\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_3 v\cos\alpha\sin\beta_2 - \\ - \omega_2 v\cos\alpha\cos\beta_2 + \sigma\dot\omega_3\sin\gamma + \sigma\dot\omega_2\cos\gamma = 0. \end{gathered} \tag{6.17}$$

Уравнения (6.16), (6.17) дополняют оставшиеся четыре уравнения на $\mathfrak{so}(4)$ до замкнутой динамической системы шестого порядка.

В результате замены угловых скоростей по формулам

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3\cos\beta_1 + \omega_5\sin\beta_1, & z_2 &= \omega_3\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_1, \\ z_3 &= \omega_2\cos\beta_1 + \omega_4\sin\beta_1, & z_4 &= \omega_2\sin\beta_1 - \omega_4\cos\beta_1, \\ w_1 &= -z_1\sin\beta_2 + z_3\cos\beta_2, & w_2 &= z_3\sin\beta_2 + z_1\cos\beta_2, \\ w_3 &= z_2\sin\beta_2 - z_4\cos\beta_2, & w_4 &= z_4\sin\beta_2 + z_2\cos\beta_2, \end{aligned}$$

исследуемая система шестого порядка приводится к виду:

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= -w_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha, \\ \dot\beta_1 &= w_1\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot w_1 &= w_3 w_1\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot w_2 &= -w_4 w_1\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot w_3 &= -n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos(\gamma+\beta_2) - w_1^2\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot w_4 &= -n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin(\gamma+\beta_2) + w_1 w_2\operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Иными словами, у системы шестого порядка (6.16) появляется независимая подсистема третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= -w_3 + \sigma n_0^2 v \sin\alpha, \\ \dot w_3 &= n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos(\gamma+\beta_2) - w_1^2 \operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot w_1 &= w_3 w_1 \operatorname{ctg}\alpha \end{aligned} \tag{6.19}$$

а также может быть выделена система второго порядка

$$\begin{aligned} \dot w_4 &= -n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin(\gamma+\beta_2) + w_1 w_2 \operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot w_2 &= -w_4 w_1 \operatorname{ctg}\alpha \end{aligned} \tag{6.20}$$

и уравнение

$$\dot\beta_1 = w_1 \operatorname{ctg}\alpha. \tag{6.21}$$

Как было получено ранее, система (6.19), (6.21) обладает тремя, вообще говоря, независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Phi_1(w_1, w_3, \sin\alpha) = \frac{w_1^2 + w_3^2 - \sigma n_0^2 v w_3 \sin\alpha + n_0^2 v^2 \cos(\gamma+\beta_2)\sin^2\alpha}{w_1 \sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{6.22}$$

$$\Phi_2(w_1, w_3, \sin\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{6.23}$$

$$\Phi_3(w_1, w_3, \sin\alpha, \beta_1) = C_3 = \mathrm{const}. \tag{6.24}$$

Все три указанных первых интеграла являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных (с точки зрения комплексного анализа имеющими после формального их продолжения в комплексную область существенно особые точки), выражающимися через элементарные функции.

В силу указанных редукций в рассматриваемой системе шестого порядка для полного ее интегрирования достаточно указать еще один первый интеграл, независимый с интегралами (6.22)–(6.24).

После замены переменных

$$w_* = w_3 \sin(\gamma+\beta_2) + w_4 \cos(\gamma+\beta_2), \quad w_{**} = w_1 \sin(\gamma+\beta_2) - w_2 \cos(\gamma+\beta_2)$$

система (6.20) может быть приведена к виду

$$\frac{dw_*}{d\beta_1} = -w_{**}, \quad \frac{dw_{**}}{d\beta_1} = w_*,$$

который предполагает наличие аналитического первого интеграла:

$$w_*^2 + w_{**}^2 = C_4 = \mathrm{const}.$$

Итак, исследуемая динамическая система вполне интегрируема в классе, вообще говоря, трансцендентных функций.

7. Заключение

Ранее авторами в основном рассматривались лишь такие движения четырехмерного тела, когда $M \equiv 0$ или имеется ненулевой момент консервативной силы (также см., например, работы О. И. Богоявленского [27, 28], А. П. Веселова [29, 30], С. В. Манакова [12] и многих других авторов). Данная работа открывает направление в исследовании уравнений движения твердого тела на $\mathfrak{so}(4) \times \mathbb{R}^4$ при наличии момента неконсервативной внешней силы.

Методика же интегрирования рассматриваемых динамических систем часто может быть распространена и на пространство $\mathfrak{so}(n) \times \mathbb{R}^n$ произвольного динамически симметричного n-мерного твердого тела (при данных модельных предположениях).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вейль Г.* Пространство, время, материя. М.: Янус, 1996.
2. *Георгиевский Д.В., Шамолин М.В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 1. С. 47–50.
3. *Frahm W. von.* Über gewisse Differentialgleichungen //Math. annalen. 1874. B. 8. S. 35–44.
4. *Blaschke W.* Nicht-Euklidische geometrie und mechanik // Math. Einrelshriften. Hamburg. 1942. B. 34. S. 39.
5. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.
6. *Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П.* Интегрируемые системы. I // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 179–285.
7. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995.
8. *Богоявленский О.И.* Опрокидывающиеся солитоны. М.: Наука, 1991.
9. *Bottema O., Beth H.J.E.* Euler' equations for the motion of a rigid body in n-dimensional space // Koninklijke Nederlandse akademie va Wetenschappen. Indagationes Mathematicae Proc. 1951. V. 13. № 1. P. 106–108.
10. *Георгиевский Д.В., Шамолин М.В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 5. С. 635–637.
11. *Мищенко А.С.* Интегралы геодезических потоков на группах Ли // Функц. анализ и его приложения. 1970. Т. 4. № 3. С. 73–78.
12. *Манаков С.В.* Замечание об интегрировании уравнений динамики n-мерного твердого тела // Функц. анализ и его приложения. 1976. Т. 10. № 4. С. 93–94.
13. *Георгиевский Д.В., Шамолин М.В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2003. № 5. С. 37–41.
14. *Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.* Основы механики сплошной среды. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
15. *Kröner E.* Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin: Springer, 1958.
16. *Георгиевский Д.В., Победря Б.Е.* О числе независимых уравнений совместности в механике деформируемого твердого тела // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 1043–1048.
17. *Pobedrya B.E., Georgievskii D.V.* Equivalence of Formulations for Problems in Elasticity Theory in Terms of Stresses // Russian J. Math. Physics. 2006. V. 13. No. 2. P. 203–209.
18. *Георгиевский Д.В.* Структура полиномиальных решений системы уравнений теории упругости в напряжениях // Изв. РАН. Сер. Механика твердого тела. 2008. № 5. С. 44–51.
19. *Кунин И.А.* Теория дислокаций // В *Схоутен Я.А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. С. 373–443.
20. *Горбачев В.И., Михайлов А.Л.* Тензор концентрации напряжений для случая N-мерного упругого пространства со сферическим включением // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1993. № 2. С. 78–83.
21. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 3. С. 51–54.
22. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: “Экзамен”, 2007. 256 с.
23. *Шамолин М.В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.
24. *Шамолин М.В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 65–68.
25. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Геометрия скобок Пуассона и методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 29. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 3–80.

26. *Новиков С.П., Шмельцер И.* Периодические решения уравнения Кирхгофа свободного движения твердого тела и идеальной жидкости и расширенная теория Люстерника – Шнирельмана – Морса (ЛМШ) // Функцион. анализ и его прил. 1981. Т. 15. № 3. С. 54–66.
27. *Богоявленский О.И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 5. С. 1105 – 1108.
28. *Богоявленский О.И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 6. С. 1364–1367.
29. *Веселов А.П.* Уравнение Ландау – Лифшица и интегрируемые системы классической механики // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 5. С. 1094–1097.
30. *Веселов А.П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $\mathfrak{so}(4)$ // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 6. С. 1298–1300.

Д. В. Георгиевский
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

М. В. Шамолин
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Институт механики
E-mail: shamolin@imec.msu.ru