ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2011, том 437, № 2, с. 190–193

МЕХАНИКА

УДК 531.01+531.552

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ

© 2011 г. **М. В. Шамолин**

Представлено академиком В.В. Козловым 10.10.2010 г.

Поступило 13.10.2010 г.

Поиску случаев интегрируемости уравнений движения многомерного твердого тела посвящено огромное количество работ. Здесь многое зависит от структуры силового поля. Так, при исследовании уравнений движения двумерных и трехмерных твердых тел в неконсервативном поле сил сопротивления стало возможным обобщение динамических уравнений на случай движения четырехмерного тела в аналогично построенном поле сил. Были найдены несколько случаев интегрируемости в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерное пространство, при наличии некоторой следящей силы, позволяющей понизить порядок общей системы динамических уравнений движения. Полученные результаты важны, поскольку в системе присутствует неконсервативная сила, в то время как в работах других авторов в основном использовалось потенциальное поле сил.

Ранее в [1, 2] автором была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (согласно теории функций комплексного переменного с существенно особыми точками) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины. Позднее [2, 3] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

В данной работе исследуется динамическая часть уравнений движения динамически симметричного четырехмерного твердого тела, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму трехмерного шара. При этом вектор угловой скорости движения такого тела шестимерен, а скорость центра масс четырехмерна. Структура таких уравнений движения в некотором смысле сохраняется при переносе на случаи большей размерности (ср. с [4]).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ НА АЛГЕБРЕ $so(4)$

Пусть четырехмерное твердое тело движется в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерную область евклидового пространства, и все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска D^3. Расстояние от точки N приложения силы сопротивления до центра D диска является функцией лишь одного параметра — угла α, который измеряется между скоростью $\mathbf{v}$ точки D и срединным перпендикуляром к диску, опущенным из центра C масс тела, в четырехмерном пространстве (ср. с [2, 5, 6]).

Сила сопротивления ортогональна в четырехмерном пространстве к диску D^3, и ее величина имеет вид $S = s_1(\alpha)v^2$, где $s_1 \geq 0$ — коэффициент сопротивления.

Свяжем с телом систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$, ось Dx_1 которой совпадает с осью CD, а оси Dx_2, Dx_3, Dx_4 лежат в гиперплоскости диска.

Если оператор инерции в системе $Dx_1x_2x_3x_4$ имеет диагональный вид $\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$, Ω — матрица угловой скорости твердого тела, $\Omega \in so(4)$, то та часть уравнений движения четырехмерного твердого тела, которая отвечает алгебре $so(4)$, имеет вид [2, 4]:

$$\Omega^\bullet\Lambda + \Lambda\Omega^\bullet + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M,$$

где

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\},$$
$$\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2, \ldots$$
$$\ldots, \lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2,$$

M – момент внешних сил, действующих на тело в R^4, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $so(4)$, $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор в $so(4)$. Элемент (матрицу) $\Omega \in so(4)$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ – компоненты угловой скорости в проекциях на естественные координаты в алгебре $so(4)$.

Коэффициент сопротивления s_1 удобно представлять в виде $s_1(\alpha) = s(\alpha)\operatorname{sign}\cos\alpha$ [2]. Если $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ – координаты точки N в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, $\{-S, 0, 0, 0\}$ – координаты вектора силы сопротивления в той же системе, то при вычислении момента силы сопротивления необходимо построить отображение

$$R^4 \times R^4 \to so(4),$$

переводящее пару векторов из R^4 в некоторый элемент из алгебры Ли $so(4)$. В проекциях на координаты в алгебре $so(4)$ момент силы сопротивления имеет следующий вид (ср. с [2, 5, 6]):

$$(0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S) \in R^6 \simeq M \in so(4).$$

Здесь необходимо учесть, что если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ – сферические координаты в R^4, то

$$x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1, \quad x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2,$$
$$x_{4N} = R(\alpha)\sin\beta_1\sin\beta_2.$$

Учитывая сказанное, можно получить уравнения движения в рассмотренном поле силы сопротивления:

$$(\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0, \quad (1)$$
$$(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = 0, \quad (2)$$
$$(\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = x_{4N}S, \quad (3)$$
$$(\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = 0, \quad (4)$$
$$(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = -x_{3N}S, \quad (5)$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = x_{2N}S. \quad (6)$$

ДИНАМИКА В R^4

По аналогии с трехмерным случаем можно вывести формулы, аналогичные формулам Эйлера и Ривальса, т.е. скорости и ускорения любых двух точек A и B четырехмерного твердого тела в любой аффинной системе координат связаны соотношениями (ср. с [2]):

$$v_B = v_A + \Omega AB, \quad w_B = w_A + \Omega^2 AB + EAB, \quad (7)$$

где $\Omega \in so(4)$, $E = \dot{\Omega} \in so(4)$. Матрица E называется матрицей ускорения.

С помощью формул (1)–(7) можно получить полную динамическую часть системы уравнений движения четырехмерного твердого тела на $so(4) \times R^4$.

ДВИЖЕНИЕ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Рассмотрим такой класс движений тела, при котором во все время центр масс тела V_C движется прямолинейно и равномерно, т.е. выполнено условие (см. также [1, 2])

$$V_C = \text{const}. \quad (8)$$

Для достижения этого предположим, что на тело действует некоторая (следящая) сила, обеспечивающая выполнение условия (8) (ср. с двумерным и трехмерным случаями [1–3]). Определенным выбором величины следящей силы вдоль прямой CD может быть достигнуто [2] выполнение условия (8).

СЛУЧАЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Пусть по аналогии с маломерными случаями выполнены равенства

$$I_2 = I_3 = I_4.$$

При этом существуют три циклических первых интеграла у уравнений (1)–(6): $\omega_1 = \omega_1^0$, $\omega_2 = \omega_2^0$, $\omega_4 = \omega_4^0$, которые рассмотрим на нулевых уровнях,

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \quad (9)$$

Для построения силового поля используется пара функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. По аналогии с “маломерными” случаями без ограничения общности [2] можно считать, что $R(\alpha) = A\sin\alpha$, $A > 0$, $s(\alpha) = B\cos\alpha$, $B > 0$ (так называемые функции Чаплыгина [7]).

В результате уравнения на “части” $so(4)$ примут следующий вид $\left(\text{здесь } n_0^2 = \dfrac{AB}{2I_2}\right)$:

$$\dot{\omega}_3 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2,$$
$$\dot{\omega}_5 = -n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2,$$
$$\dot{\omega}_6 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1.$$

Если ввести естественную замену угловых скоростей по формулам

$$z_1 = \omega_3 \cos\beta_2 + \omega_5 \sin\beta_2,$$

$$z_2 = -\omega_3 \sin\beta_2 \cos\beta_1 + \omega_5 \cos\beta_2 \cos\beta_1 + \omega_6 \sin\beta_1,$$

$$z_3 = \omega_3 \sin\beta_2 \sin\beta_1 - \omega_5 \cos\beta_2 \sin\beta_1 + \omega_6 \cos\beta_1,$$

то совместные уравнения движения на прямом произведении $so(4) \times R^4$ (после учета условий (8) и (9)) примут симметричный вид ($CD = \sigma$):

$$v^{\bullet} = \sigma\cos\alpha[n_0^2 v^2 \sin^2\alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)]; \tag{10}$$

$$\alpha^{\bullet} = -z_3 + \sigma n_0^2 v \sin\alpha\cos^2\alpha + \frac{\sigma\sin\alpha(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)}{v},$$

$$\begin{gathered} z_3^{\bullet} = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ z_2^{\bullet} = z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ z_1^{\bullet} = z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1^{\bullet} = z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \end{gathered} \tag{11}$$

$$\beta_2^{\bullet} = -z_1 \frac{t \quad \cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}. \tag{12}$$

От полной системы седьмого порядка (10)–(12) отделилась независимая подсистема (11), (12) шестого порядка, в которой, в свою очередь, существует независимая подсистема пятого порядка (11). Для полного интегрирования данной системы необходимо, вообще говоря, знать шесть независимых первых интегралов. Однако после замен

$$z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1}, \quad z = n_0 v Z,$$

$$z_k = n_0 v Z_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad z_* = Z_*, \quad n_0 v\,' = \bullet$$

исследуемая система приводится к следующему виду ($b = \sigma n_0$, $[b] = 1$):

$$\begin{gathered} v\,' = v\Psi(\alpha, Z, Z_3), \\ \Psi(\alpha, Z, Z_3) = b\cos\alpha[\sin^2\alpha - (Z^2 + Z_3^2)]; \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = -Z_3 + b\sin\alpha\cos^2\alpha + b\sin\alpha(Z^2 + Z_3^2), \\ Z_3' = \sin\alpha\cos\alpha - Z^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_3\Psi(\alpha, Z, Z_3), \\ Z' = ZZ_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z\Psi(\alpha, Z, Z_3); \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} Z_*' = Z\sqrt{1 + Z_*^2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = \frac{ZZ_*}{\sqrt{1 + Z_*^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\beta_2^{\bullet} = -\frac{Z}{\sqrt{1 + Z_*^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}. \tag{16}$$

Видно, что система пятого порядка (11) распалась на независимые подсистемы более низкого порядка: система (14) – третьего, а система (15) (после замены независимого переменного) – второго. Таким образом, для полной интегрируемости исследуемой системы достаточно указать два независимых интеграла системы (14), один системы (15) и два дополнительных интеграла, “привязывающих” уравнения (13) и (16).

ПОЛНЫЙ СПИСОК ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Полная система (13)–(16) обладает аналитическим первым интегралом вида

$$v^2(1 - 2bZ_3\sin\alpha + (Z^2 + Z_3^2)) = V_C^2, \tag{17}$$

поскольку выполнено свойство (8). Последнее инвариантное соотношение позволяет определить величину v.

Система (14) принадлежит к классу систем, возникающих в трехмерной динамике твердого тела, и обладает двумя независимыми первыми интегралами, являющимися трансцендентными функциями своих фазовых переменных (в смысле определений комплексного анализа) и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций (ср. с [8]):

$$\frac{Z^2 + Z_3^2 - bZ_3\sin\alpha + \sin^2\alpha}{Z\sin\alpha} = C_1 = \text{const}, \tag{18}$$

$$G(Z, Z_3, \sin\alpha) = C_2 = \text{const}. \tag{19}$$

Система (15) имеет первый интеграл в виде

$$\frac{\sqrt{1 + Z_*^2}}{\sin\beta_1} = C_3 = \text{const}. \tag{20}$$

В свою очередь, дополнительный первый интеграл, позволяющий определить величину $_2$, имеет вид

$$\pm\frac{\cos\beta_1}{\sqrt{C_3^2 - 1}} = \sin\{C_3(\beta_2 + C_4)\}, \quad C_4 = \text{const}. \tag{21}$$

Основная теорема. *Динамическая система* (13)–(16) *обладает полным списком первых интегралов* (17)–(21), *один из которых является аналитической функцией*, *а остальные – трансцендентные функции своих переменных* (*после их формального продолжения в комплексную область*).

Данная работа дополняет предыдущие исследования [2, 5, 6] и открывает новый цикл работ, поскольку ранее (см., например, [9, 10]) рассматривались лишь такие движения четырехмерного тела, когда момент внешних сил был тождественно равен нулю ($M \equiv 0$) или поле внешних сил было потенциальным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08–01–00231-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1992. № 1. С. 52–58.
2. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.
3. *Шамолин М.В.* // ДАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.
4. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 448 с.
5. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.
6. *Шамолин М.В.* // ДАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.
7. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости. В кн.: Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133–135.
8. *Шамолин М.В.* // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.
9. *Богоявленский О.И.* // ДАН. 1986. Т. 287. № 5. С. 1105–1108.
10. *Богоявленский О.И.* // ДАН. 1983. Т. 272. № 6. С. 1364–1367.