

**ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
МГУ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА
«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ»
ИМ. ПРОФ. В. В. ТРОФИМОВА
ПОД РУКОВОДСТВОМ ПРОФ. Д. В. ГЕОРГИЕВСКОГО,
Д.Ф.-М.Н. М. В. ШАМОЛИНА, ПРОФ. С. А. АГАФОНОВА**

© 2011 г. **Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, М. В. ШАМОЛИН**

ЗАСЕДАНИЕ 204 ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА В. В. ТРОФИМОВА (30 января 2009 г.)

М. Р. Богданов.

Адиабатические инварианты в слабо диссипативной теории Колмогорова—Арнольда—Мозера.

В докладе излагаются результаты численного исследования адиабатических инвариантов для отображения плоскости на себя, называемого в литературе «Bogdanov map». Это наиболее изученный на сегодня пример в слабо-диссипативной теории Колмогорова—Арнольда—Мозера.

В частности, приведены данные о распределении чисел Рейнольдса, температуры, коэффициентов теплопроводности и теплоёмкости для двух случаев: струйные течения жидкости или газа; транспорт либо мелкодисперсных частиц в сплошной среде, либо электронных пучков и т. п.

ЗАСЕДАНИЕ 205 (27 февраля 2009 г.)

В. Ю. Саламатова.

Контактное взаимодействие накладок с упругими телами, нагруженными на бесконечности.

Исследуются задачи о равновесии упругих тел, содержащих абсолютно гибкие накладки. Накладки скреплены с граничной поверхностью тела. Задачи о контактном взаимодействии жестких на растяжение, но абсолютно гибких накладок различных геометрических в плане форм с упругим полупространством, нагруженным на бесконечности равномерным растягивающим усилием, сведены к изучению соответствующего интегрального уравнения первого рода относительно неизвестного контактного касательного напряжения. Приводятся решения данных уравнений. В плоской и осесимметричной постановках рассмотрена задача о растяжении упругого слоя усилиями, приложенным на бесконечности, при наличии на одной из его граней тонкой упругой накладкой, не сопротивляющейся изгибной деформации. Решение задачи сводится к совместному исследованию дифференциального уравнения, описывающего деформацию накладки, и интегрального уравнения относительно неизвестного контактного касательного напряжения. Предлагается подход, для решения данной системы. Исследуется вопрос о применении полученных результатов для учета погрешности при тензометрировании низко модульных материалов.

ЗАСЕДАНИЕ 206 (6 марта 2009 г.)

С. А. Агафонов, Д. В. Георгиевский, М. В. Шамолин.

О роли женщин в развитии современной механики.

Проблемы общественного (в том числе научного и образовательного) положения женщин давно занимали людей. Они всегда освещались в трудах естествоиспытателей, философов, юристов,

историков, психологов различных эпох. В периоды революций, наиболее сильно показывавших противоречивость разных отношений, возростал уровень творческих идей и разного рода взглядов.

Последняя четверть XX столетия в мировом сообществе стали периодом существенной трансформации представлений о роли женщины в развитии общества. Например, произошел поворот общественной психологии к благоприятной оценке участия женщин в общественном производстве. Значительно возрос экономический, социальный, политический и научный интерес к вопросу участия женщин во всех сферах жизнедеятельности общества.

На заседании семинара обсуждалось значение роли женщин в научных исследованиях по математике и механике.

ЗАСЕДАНИЕ 207 (20 марта 2009 г.)

В. Е. Палощ.

Стабилизация динамически симметричного спутника с помощью внешних моментов.

Решается задача стабилизации движения динамически симметричного спутника с помощью внешних моментов. Центр масс спутника движется по круговой орбите с постоянной угловой скоростью. В линейном случае исследована возможность стабилизации спутника относительно центра масс с помощью постоянных моментов. В нелинейном случае рассмотрен критический случай устойчивости двух пар чисто мнимых корней, найдены условия асимптотической устойчивости.

ЗАСЕДАНИЕ 208 в рамках КОНФЕРЕНЦИИ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА и МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ и МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ «Ломоносов–2009» (10 апреля 2009 г.).

1. *Н. А. Гасратова.*

О решении осесимметричных задач в напряжениях.

2. *А. В. Михеев.*

Локальная устойчивость ортотропных оболочек на упругом основании с учётом предварительных напряжений основания.

ЗАСЕДАНИЕ 209 (17 апреля 2009 г.)

М. У. Никабадзе.

Об условиях совместности деформации и уравнениях в тензорах напряжений и моментных напряжений в микрополярной трехмерной теории упругости.

В отличие от распространенных в научной литературе условий совместности деформации в линейной микрополярной трехмерной теории, в докладе предлагаются различные представления условий совместности деформации с помощью тензора несовместности и обобщенного тензора несовместности Б. Е. Победри. Получены уравнения в тензорах напряжений и моментных напряжений в случае изотропного материала, а также даны обобщенные условия совместности. Сформулированы классическая и новая постановки задач в тензорах напряжений и моментных напряжений.

ЗАСЕДАНИЕ 210 (24 апреля 2009 г.)

Д. В. Георгиевский.

Критические числа Рейнольдса в задачах на собственные значения для уравнения Орра—Зоммерфельда.

Как известно, уравнение Орра—Зоммерфельда в линеаризованной теории гидродинамической устойчивости описывает развитие возмущений в одномерном стационарном сдвиговом течении ньютоновской вязкой жидкости в плоском слое. Поставить задачу на собственные значения, или спектральную проблему устойчивости, означает добавить к уравнению Орра—Зоммерфельда четвертого порядка четыре однородных граничных условия на возмущение функции тока. Традиционно такими условиями выбираются условия прилипания, не меняющиеся при переходе из основного течения к возмущённому. Полученная таким образом задача Орра—Зоммерфельда довольно

широко исследована в плане классификации устойчивых профилей скорости как математиками-специалистами по спектральной теории, так и механиками. Поскольку точного общего фундаментального решения (за исключением тривиального невозмущённого состояния — покоя) аналитически выписать не удаётся, используются приближённые и численные методы. Одним из таких приближённых методов является метод интегральных соотношений, позволяющий на основе вариационных неравенств давать нижние оценки критических чисел Рейнольдса. В 1960-х гг. Д. Джозеф и Йи Чиа-Шун получили соответствующие оценки для течений Куэтта и Пуазейля в плоском слое.

В более ранних работах автора данный метод был развит применительно к неодномерным и нестационарным течениям со сложной реологией (нелинейным вязким жидкостям, идеально- и вязкопластическим телам). К новым результатам представленной работы следует отнести:

- (i) улучшение оценок Джозефа—Йи в классической задаче Орра—Зоммерфельда за счёт оптимизации процесса минимизации квадратичных функционалов;
- (ii) получение достаточных оценок устойчивости в задачах на собственные значения Орра—Зоммерфельда, где в качестве условий на одной границе слоя берётся условие прилипания, а на другой:
 - (a) задаются касательная компонента вектора напряжений и нормальная компонента вектора скорости, либо
 - (b) требуется, чтобы поверхность (в возмущённом движении, вообще говоря, криволинейная) была свободна от напряжений;
- (iii) получение верхних оценок параметра роста возмущений для уравнения Рэлея, являющегося сингулярным пределом уравнения Орра—Зоммерфельда, также с тремя типами (на этот раз не четвёрками, а парами) граничных условий.

Отметим, что упомянутый выше случай (b) отличается вхождением спектрального параметра в граничное условие на свободной поверхности и представляет значительно большие математические трудности, чем классическая задача Орра—Зоммерфельда.

ЗАСЕДАНИЕ 211 В РАМКАХ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ *Modelling of Dynamical Systems and Investigation of Stability* (22 мая 2009 г.).

1. С. А. Агафонов, И. А. Костюшко.

Динамика солнечного паруса: эволюция собственных частот при переменном давлении солнечных лучей.

Исследуется эволюция собственных частот солнечного паруса при переменном давлении солнечных лучей на парус. Рассматриваемая система представляет собой два шарнирно связанных стержня, на одном из которых перпендикулярно стержню расположен парус; на конце и в шарнире расположены одинаковые массы.

2. В. И. Ванько.

Продольный изгиб в условиях ползучести.

В рамках квазистатического подхода и геометрически линейной постановки изучается процесс продольного изгиба упруго-пластического стержня в условиях ползучести материала. Решение уравнений равновесия строится методом последовательных нагружений.

3. Д. В. Георгиевский.

Спектральные задачи устойчивости в механике сплошной среды.

Проведен анализ краевых задач устойчивости трехмерного нестационарного деформирования тел с определяющими соотношениями, описываемыми линейными и нелинейными тензорными функциями, относительно малых начальных возмущений, а также возмущений материальных функций, входящих в эти соотношения.

В качестве аппарата выбран метод интегральных соотношений, восходящий к работам Дж. Сайнджа и Д. Джозефа и известный ранее применительно к задачам устойчивости течений идеальной и ньютоновской вязкой жидкостей.

4. *М. В. Шамолин.*

Системы с переменной диссипацией: методы, подходы приложения.

Предлагаемая работа посвящена развитию качественных методов в теории неконсервативных систем, возникающих, например, в таких областях науки, как динамика твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой, теория колебаний и др. Обнаружен целый спектр случаев полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Получены новые семейства фазовых портретов систем с переменной диссипацией на маломерных и многомерных многообразиях. Обсуждаются вопросы их абсолютной или относительной грубости. Обнаружены новые интегрируемые случаи движения твердого тела, в том числе в классической задаче о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды.

ЗАСЕДАНИЕ 212 (2 октября 2009 г.)

С. А. Агафонов.

Устойчивость ротора с гистерезисом.

ЗАСЕДАНИЕ 213 (9 октября 2009 г.)

А. Р. Улуханян.

Моделирование деформирования тонких призматических тел с применением системы полиномов Лежандра.

Рассмотрены некоторые вопросы о параметризации области тонкого тела с одним малым размером, когда в качестве базовой поверхности рассматривается произвольная поверхность.

Дано определение момента k -го порядка некоторой величины относительно системы полиномов Лежандра. Получены уравнения движения микрополярной теории тонких призматических тел для компонент векторов перемещения и вращения в моментах относительно систем полиномов Лежандра с учетом граничных условий как кинематического, так и физического содержания на лицевых поверхностях. Выведена система уравнений микрополярной теории тонких призматических тел для компонент этих векторов в моментах относительно системы полиномов Лежандра в случае неоднородной относительно координат базовой поверхности среды переменной толщины.

Рассмотрена пластина бесконечной длины в направлении одной оси (Ox_2), защемленная по параллельным (продольным) этой оси краям и нагруженная постоянной в направлении этой оси поперечной нагрузкой. Вдоль другой оси (Ox_1) нагрузка может меняться произвольно. Построены графики зависимости компонент вектора перемещения и компонент тензора напряжений от x_1 при различных значениях поперечной координаты x_3 и нагрузках. С помощью корректирующего слагаемого удовлетворены граничные условия на лицевых поверхностях. В случае моментной теории пластин получены системы уравнений нулевого, первого и второго приближений, которые приведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, каждая из которых расщепляется на две независимые системы, и получены общие решения этих систем.

Получено общее дисперсионное уравнение для определения скоростей распространения волн бесконечной в анизотропной среде. Выведены дисперсионные уравнения в главных направлениях трансверсально-изотропных и ортотропных микрополярных сред. Получены скорости распространения упругих волн по главным направлениям в трансверсально-изотропной и ортотропной микрополярных средах.

Выписано данное И. Н. Векуа общее решение эллиптических уравнений порядка $2n$ с помощью n аналитических функций, а также, как частный случай, представление решения эллиптического уравнения четвертого порядка. В работе методом разделения переменных Фурье гиперболические уравнения четвертого и шестого порядков приведены к уравнениям эллиптического типа тех же порядков. С помощью метода И. Н. Векуа получены общие представления решения этих уравнений.

ЗАСЕДАНИЕ 214 (16 октября 2009 г.)

И. Х. Сабитов, А. В. Словеснов.

Приближения кривых круговыми дугами.

Известны многие алгоритмы приближений кривых с разными требованиями на свойства приближений. Доклад посвящен приближениям C^3 -гладких плоских кривых C^1 -гладкими объединениями круговых дуг с сохранением длин кривых (т.е. при условии, что приближающие кривые имеют ту же длину, что и приближаемые).

ЗАСЕДАНИЕ 215 (23 октября 2009 г.)

М. В. Шамолин.

Случаи полной интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой.

Введен в рассмотрение новый класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Благодаря наличию в таких системах нетривиальных групп симметрий, показано, что рассматриваемые системы обладают так называемой переменной диссипацией, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координаты диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства системы может присутствовать как подкачка энергии извне, так и ее рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в плоской и пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой. В результате обнаружен целый спектр случаев полной интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В заключительной части работы получены некоторые обобщения на условия интегрируемости более общих классов неконсервативных динамических систем.

Результаты предлагаемой работы появились благодаря исследованию некоторой задачи о движении твердого тела в среде с сопротивлением, где пришлось иметь дело с первыми интегралами, обладающими нестандартными свойствами. А именно, они не были ни аналитическими, ни гладкими, а на некоторых множествах они были даже разрывными. При этом они выражались через конечную комбинацию элементарных функций. Последние обстоятельства, тем не менее, все же позволили провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, который обладали «грубостью» и сохранялись для систем более общего вида, которые обладали некоторыми нетривиальными симметриями скрытого типа. Поэтому представляет интерес исследование достаточно широких классов динамических систем, обладающих аналогичными свойствами, и при этом взятыми из динамики твердого тела, взаимодействующего со средой.

ЗАСЕДАНИЕ 216 (6 ноября 2009 г.)

М. У. Никабадзе.

Некоторые виды напряженно-деформированных состояний микрополярной среды.

Даны представления тензоров деформаций и изгиба-кручения, а также тензоров напряжений и моментных напряжений для различных видов двумерных напряженно-деформированных состояний микрополярной среды (плоское деформированное состояние, плоское напряженное состояние, обобщенное плоское напряженное состояние, антиплоское деформированное состояние), с учетом которых, исходя из трехмерных соотношений (уравнений, ОС, граничных условий), получены соответствующие соотношения для рассматриваемых видов напряженно-деформированных состояний. При этом ОС получены как для изотропных, так и трансверсально-изотропных и ортотропных материалов. Кроме того, прямые и обратные ОС в случае изотропного материала представлены в различных удобных для пользования формах. Получены условия совместности в тензорах деформаций и изгиба-кручения, а также в тензорах напряжений и моментных напряжений. При всех указанных выше напряженно-деформированных состояниях получены уравнения одинаковой структуры. Даны постановки задач. Относительно компонент тензора напряжений получено неоднородное бигармоническое уравнение с учетом объемных сил и моментов. Дано общее комплексное представление действительного решения этого уравнения с помощью шести аналитических функций одного комплексного переменного. Относительно компонент тензора моментных напряжений

получено уравнение, аналогичное уравнению в перемещениях при плоском деформированном состоянии классической теории. Кроме того, получено комплексное представление перемещений и вращений и компонент тензоров напряжений и моментных напряжений при плоском деформированном состоянии микрополярной среды при учете объемных сил и температуры, но без учета массовых моментов.

ЗАСЕДАНИЕ 217 (13 ноября 2009 г.)

Д. В. Георгиевский, М. В. Шамолин.

Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела.

Первые формальные обобщения соотношений динамики абсолютно твёрдого тела, гидромеханики и теории упругости на n -мерный случай можно найти ещё в работах Л. Эйлера и А. Ж.-К. Сен-Венана. Им не придавалось большого физического смысла и долгое время они воспринимались как упражнения по тензорной алгебре и анализу. Именно с таких позиций, например, ранее были получены динамические уравнения Эйлера n -мерного тела. Тензорная природа многих физических соотношений в трехмерном пространстве, практическая значимость которых не подвергается сомнению, и такие важные особенности, как их число, виды симметрии и ранг входящих в них величин, становятся понятными и очевидными лишь с выходом в большее число измерений. Это относится, например, к числу уравнений совместности деформаций или напряжений на плоскости или в трехмерном пространстве. Необходимо отметить, что при обобщении на n -мерный случай, как, пожалуй, и при изложении всей классической механики, имеются два подхода, условно называемые тензорным и матричным. Первый из них удобен для понимания инвариантности механических величин и законов, в которых они участвуют. Второй чаще используется на вычислительном этапе решения задач, где важно найти подходящий способ дискретизации. О преимуществах обоих подходов в данной работе речь пойдёт ниже. С точки зрения тензорного подхода все инвариантные физические величины можно разбить на две группы. В одну из них входят те тензорные объекты, ранг которых не зависит от размерности n пространства, а зависит лишь диапазон изменения индексов в некоторой выбранной системе координат. Сюда относятся все скаляры, радиус-вектор, векторы скорости и ускорения, тензоры второго ранга деформаций и напряжений, тензор четвёртого ранга модулей упругости и многие другие объекты. Если в формулу входят только такие величины, то вид её при любом n один и тот же. К другой группе физических величин относятся тензорные объекты, ранг которых зависит от n . Это прежде всего угловая скорость, моменты, векторные потенциалы и другие величины, в выражения для которых входят векторные произведения, в частности, дифференциальный оператор ротор. Индексная запись соотношений, включающих такие величины, содержит n -мерный символ Леви-Чивиты, антисимметричный по любой паре своих n индексов. В работе даются определение обобщенного векторного произведения, обсуждаются его особенности, определение двойного векторного произведения в n -мерном пространстве, выводятся многомерные формулы Громеки—Лэмба, уравнения Ламе, а также другие важные соотношения многомерного анализа. Особое значение имеет изучение движения многомерного твердого тела с неподвижной точкой. Получены обобщенные формулы Эйлера и Ривальса, изучается гиперплоское движение многомерного тела, делаются замечания об описании инерционно-массовых характеристиках таких тел, в результате чего выводятся уравнения из многомерной динамики сплошной среды — уравнения совместности деформаций. В динамике четырехмерного твердого тела, находящегося в неконсервативном силовом поле, получены новые случаи интегрируемости уравнений движения. При этом в некоторых случаях исследуемая система динамических уравнений редуцируется на касательное расслоение к трехмерной сфере.

ЗАСЕДАНИЕ 218, СОВМЕСТНОЕ ЗАСЕДАНИЕ С УЧЕБНО-НАУЧНЫМ СЕМИНАРОМ КАФЕДРЫ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА» МГТУ им. Н. Э. БАУМАНА (20 ноября 2009 г.)

Д. В. Георгиевский.

Асимптотические разложения по малому геометрическому параметру в теории тонких деформируемых тел.

В последние годы в механике деформируемого твёрдого тела возобновился интерес к теории тонких тел, объектами изучения которой являются трёхмерные тела, один из характерных размеров которых много меньше двух других, либо два размера много меньше третьего. Строго говоря, такие тела нельзя называть оболочками, пластинами, дисками, стержнями, поскольку никаких гипотез (кинематических, статических, силовых), по определению вкладываемых в эти названия, за исключением ранее оговоренной геометрической, теория тонких тел не предполагает. При наличии высокоэффективных методов современной вычислительной механики именно в отсутствии дополнительных гипотез состоит её основное преимущество перед многими классическими оболочечными и стержневыми теориями.

К числу объектов исследования теории тонких тел относятся и тела, у которых минимальный характерный размер много меньше максимального, а третий размер имеет любой промежуточный, включая концы, порядок. Например, это происходит, когда у области тела одновременно существуют характерные макро-, микро- и наноразмеры. У таких тел, как известно, могут наблюдаться аномалии механических характеристик и иметься особенности в экспериментальном определении материальных функций.

Эффективным математическим аппаратом в механике деформируемого тонкого тела являются асимптотические методы (в частности, метод сращиваемых разложений), хорошо развитые в линейной теории упругости и вязкоупругости, теории контактных задач, теории концентрации напряжений.

ЗАСЕДАНИЕ 219 (4 декабря 2009 г.)

В. И. Горбачев, О. Б. Москаленко.

Устойчивость прямого стержня с переменной жесткостью.

Рассматривается продольное сжатие прямого стержня, у которого жесткость является периодической, интегрируемой функцией продольной координаты. Для шарнирно опертого стержня и стержня с одним защемлённым концом получены приближенные аналитические формулы, позволяющие найти критические сжимающие нагрузки, при которых возможна смежная, искривлённая форма равновесия.

В случае стержня со ступенчато изменяющейся жесткостью и состоящего всего лишь из одного периода (предельный случай) проведено сравнение расчётов по найденным формулам с ранее известными точными решениями уравнения устойчивости. Показано хорошее совпадение приближенных результатов с точными.

ЗАСЕДАНИЕ 220 (11 декабря 2009 г.)

А. А. Шевчук.

Колебания одиночных газовых пузырьков и аналогии с другими механическими приложениями.

Проведено аналитико-численное исследование эволюции радиуса газового пузырька под действием давления на бесконечности в среде со сложными физико-механическими свойствами (нелинейная вязкость, нелинейная вязкопластичность). Отмечены аналогии кривых зависимости радиуса пузырька от времени с известными кривыми в задаче о движении абсолютно твёрдого тела с неподвижной точкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В., Агафонов С. А. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова. Заседания 1–145// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 16–45.

2. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В., Агафонов С. А.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова. Заседания 146–178// Совр. мат. прилож. — 2009. — 62. — С. 3–13.
3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В., Агафонов С. А.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова. Заседания 179–203// Совр. мат. прилож. — 2009. — 65. — С. 3–10.

Д. В. Георгиевский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

М. В. Шамолин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия,

Институт механики, Москва, Россия

E-mail: shamolin@imes.msu.ru