Современная математика и ее приложения. Том xx (2011). С. 84–97

УДК 517.9; 531.01

СОПОСТАВЛЕНИЕ СЛУЧАЕВ ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ ДВУМЕРНОГО, ТРЕХМЕРНОГО И ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ

© 2011 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе сообщается о имеющихся на данный момент законченных результатах по исследованию уравнений движения динамически симметричного четырехмерного ($4D$) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных двумерных ($2D$) и трехмерных ($3D$) твердых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная пара сил, заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (см. также [1, 14, 15, 18, 23, 28–30, 38–41, 43]).

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Исследованию случаев полной интегрируемости уравнений движения четырехмерного твердого тела посвящено огромное количество работ. Автор не претендует в данном вопросе на первенство, хотя при исследовании «маломерных» уравнений движения вполне конкретных (двумерных и трехмерных) твердых тел в неконсервативном поле сил пришла идея обобщить уравнения на случай движения четырехмерного твердого тела в аналогично построенном поле.

В результате такого обобщения получились несколько случаев интегрируемости в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерное пространство, при наличии некоторой следящей силы, позволяющей методическим образом понизить порядок общей системы динамических уравнений движения.

Более того, на взгляд автора, полученные результаты оригинальны с той точки зрения, что в системе присутствует пара неконсервативных сил.

Ранее в [18, 38] автором была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [38–40] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00231-а).

интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В предлагаемой работе обобщаются некоторые известные ранее результаты по интегрированию двумерного и трехмерного твердых тел, находящихся под действием неконсервативного момента сил, а также исследуются уравнения движения динамически симметричного четырехмерного твердого тела в одном из двух логически возможных случаях — в зависимости от расстановки главных моментов инерции. Структура таких уравнений движения в некотором смысле сохраняется при переносе на случаи большей размерности.

2. Движение на двумерной плоскости

2.1. Более общая задача о движении со следящей силой. Рассмотрим плоскопараллельное движение твердого тела с передним плоским торцом в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [38–40]. Если (v, α) — полярные координаты некоторой характерной точки твердого тела, Ω — его угловая скорость, I, m — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения (в том числе, см. далее, и в случае аналитических функций Чаплыгина [38]) воздействия среды примет вид:

$$\begin{gathered}\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha - \Omega v\sin\alpha + \sigma\Omega^2 = F_x,\\ \dot{v}\sin\alpha + \dot{\alpha}v\cos\alpha + \Omega v\cos\alpha - \sigma\dot{\Omega} = 0,\\ I\dot{\Omega} = y_N(\alpha, \Omega, v)s(\alpha),\end{gathered} \tag{2.1}$$

где

$$F_x = -\frac{s(\alpha)v^2}{m}, \quad \sigma > 0.$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const} \tag{2.2}$$

($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [38]), то в системе (2.1) вместо F_x будет стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело действует неконсервативная пара сил.

В случае же аналитических функций Чаплыгина динамические функции s и y_N примем в виде

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad y_N(\alpha, \Omega, v) = A\sin\alpha - h_1\frac{\Omega}{v}, \quad h_1 > 0, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0,$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и опрокидывающий) момент неконсервативной силы.

Благодаря связи (2.2), при некоторых условиях система (2.1) приведется к следующей системе на трехмерном цилиндре:

$$W_1 = \mathbf{R}^1_+\{v\} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\};$$

при этом

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \tag{2.3}$$

$$\begin{cases}\dot{\alpha} = -\omega + \sigma n_0^2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha - \dfrac{\sigma h_1 B}{I}\cos^2\alpha,\\ \dot{\omega} = n_0^2\sin\alpha\cos\alpha - \sigma n_0^2\omega\sin^2\alpha\cos\alpha + \sigma\omega^3\cos\alpha + \dfrac{\sigma h_1 B}{I}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha - \dfrac{h_1 B}{I}\omega\cos\alpha,\end{cases} \tag{2.4}$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma\omega^2\cos\alpha + \sigma n_0^2\sin^2\alpha\cos\alpha - \frac{\sigma h_1 B}{I}\omega\sin\alpha\cos\alpha,$$

где $\Omega = \omega v$, $n_0^2 = AB/I$, $\langle\cdot\rangle = v\langle'\rangle$.

2.2. Полный список первых интегралов. От системы (2.3), (2.4) отделилась независимая система второго порядка (2.4).

Теорема 1. *Система* (2.3), (2.4) *обладает полным набором первых интегралов, один из которых является аналитической функцией, а второй — трансцендентной функцией фазовых переменных, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.*

Здесь необходимо сделать важное замечание. Дело в том, что с точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

Действительно, в силу (2.2) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (2.1) при условии $F_x \equiv 0$, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v,\alpha,\Omega) = v^2 + \sigma^2\Omega^2 - 2\sigma\Omega v\sin\alpha = V_C^2 \tag{2.5}$$

постоянна на фазовых траекториях.

В силу невырожденной замены независимого переменного у системы (2.3), (2.4) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v,\alpha,\omega) = v^2(1 + \sigma^2\omega^2 - 2\sigma\omega\sin\alpha) = V_C^2 \tag{2.6}$$

постоянна на фазовых траекториях.

Равенство (2.6) позволяет не решая системы (2.3), (2.4) найти зависимость скорости характерной точки твердого тела от других фазовых переменных, а именно, при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + \sigma^2\omega^2 - 2\sigma\omega\sin\alpha}.$$

Поскольку фазовое пространство W_1 системы (2.3), (2.4) трехмерно и в нем существуют асимптотические предельные множества, то равенство (2.6) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (2.3), (2.4) во всем фазовом пространстве.

Разберем подробнее вопрос существования второго (дополнительного) первого интеграла системы (2.3), (2.4). Ее фазовое пространство расслаивается на поверхности

$$\{(v,\alpha,\omega) \in W_1 : V_C = \mathrm{const}\}.$$

Для обоснования последнего введем безразмерное дифференцирование $\langle'\rangle \mapsto n_0\langle'\rangle$ и дополнительный безразмерный параметр

$$H_1 = \frac{h_1 B}{I n_0}, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad \beta = \sigma n_0, \quad \tau = \sin\alpha$$

и поставим в соответствие отделившейся системе второго порядка (2.4) дифференциальное уравнение

$$v' = v\Psi(\alpha,\omega), \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} \dot\alpha = -\omega + \beta\sin\alpha\cos^2\alpha + \beta\omega^2\sin\alpha - \beta H_1\omega\cos^2\alpha, \\ \dot\omega = \sin\alpha\cos\alpha - \beta\omega\sin^2\alpha\cos\alpha + \beta\omega^3\cos\alpha + \beta H_1\omega^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1\omega\cos\alpha, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\Psi(\alpha,\omega) = -\beta\omega^2\cos\alpha + \beta\sin^2\alpha\cos\alpha - \beta H_1\omega\sin\alpha\cos\alpha.$$

Полученный выше аналитический первый интеграл (2.6) привязывает уравнение (2.3) (или (2.7)). Для поиска дополнительного трансцендентного первого интеграла поставим в соответствие отделившейся системе (2.8) дифференциальное уравнение

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau - \beta\omega[\omega^2 - \tau^2] + H_1\omega[\beta\omega\tau - 1]}{-\omega + \beta\tau + \beta\tau[\omega^2 - \tau^2] - \beta H_1\omega[1 - \tau^2]}.$$

После введения однородной замены переменных

$$\omega = t\tau, \quad d\omega = td\tau + \tau dt$$

интегрирование последнего уравнения сведется к интегрированию следующего уравнения Бернулли:

$$a_1(t)\frac{d\tau}{dt} = a_2(t)\tau + a_3(t)\tau^3,$$

где

$$a_1(t) = -(1+\beta H_1)t^2 + (\beta + H_1)t - 1, \quad a_2(t) = (1+\beta H_1)t - \beta, \quad a_3(t) = \beta - \beta H_1 t - \beta t^2.$$

Применяя классическую замену переменных $p = 1/\tau^2$, сведем исследуемое уравнение к линейному однородному уравнению

$$\frac{dp}{dt} = c_1(t)p + c_2(t),$$

где

$$c_1(t) = \frac{2t(1+\beta H_1) - 2\beta}{(1+\beta H_1)t^2 - (\beta + H_1)t + 1}, \quad c_2(t) = \frac{2\beta - 2\beta H_1 t - 2\beta t^2}{(1+\beta H_1)t^2 - (\beta + H_1)t + 1}.$$

Решение p_1 однородной части исследуемого уравнения представится в следующем виде (возможны три случая):

1) при $D = (\beta - H_1)^2 - 4 > 0$:

$$p_1 = k[(1+\beta H_1)t^2 - (\beta + H_1)t + 1] \cdot \left|\frac{2(1+\beta H_1)t - (\beta - H_1) - \sqrt{D}}{2(1+\beta H_1)t - (\beta - H_1) + \sqrt{D}}\right|^{\frac{H_1-\beta}{\sqrt{D}}};$$

2) при $D = (\beta - H_1)^2 - 4 < 0$:

$$p_1 = k[(1+\beta H_1)t^2 - (\beta + H_1)t + 1] \cdot \exp\left\{\operatorname{arctg}\frac{2(1+\beta H_1)t - (\beta + H_1)}{\sqrt{-D}}\right\};$$

3) при $D = (\beta - H_1)^2 - 4 = 0$:

$$p_1 = k\big[(1+\beta H_1)t^2 - (\beta + H_1)t + 1\big] \cdot \exp\left\{\frac{2L_1}{\sqrt{1+\beta H_1} \pm 1}\right\}, \quad L_1 = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta H_1}} \pm 1.$$

Понятно, что для поиска частного решения исследуемого уравнения нужно, применяя метод вариации постоянных, считать величину k функцией t, что непременно разрешимо в классе элементарных функций. В данной работе соответствующие выкладки не приводятся.

3. Движение в трехмерном пространстве

3.1. Общая задача о движении со следящей силой. Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела массы m с передним круглым торцом в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности. Если (v, α, β) — сферические координаты некоторой характерной точки твердого тела, $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$ — компоненты его угловой скорости, I_1, I_2, I_2 — главные моменты инерции в некоторой системе координат, связанной с телом, то динамическая часть уравнений движения в случае функций Чаплыгина (см. также [38]) воздействия среды имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
\dot v\cos\alpha - \dot\alpha v\sin\alpha + \Omega_y v\sin\alpha\sin\beta - \Omega_z v\sin\alpha\cos\beta + \sigma(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) = F_x,\\
\dot v\sin\alpha\cos\beta + \dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta - \dot\beta v\sin\alpha\sin\beta + \Omega_z v\cos\alpha - \Omega_x v\sin\alpha\sin\beta - \sigma\Omega_x\Omega_y - \sigma\dot\Omega_z = 0,\\
\dot v\sin\alpha\sin\beta + \dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta + \dot\beta v\sin\alpha\cos\beta + \Omega_x v\sin\alpha\cos\beta - \Omega_y v\cos\alpha - \sigma\Omega_x\Omega_z + \sigma\dot\Omega_y = 0,\\
\dot\Omega_x = 0, \quad I_2\dot\Omega_y + (I_1 - I_2)\Omega_x\Omega_z = -ABv^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta - \frac{h\Omega_y}{v},\\
I_2\dot\Omega_z + (I_2 - I_1)\Omega_x\Omega_y = ABv^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta - \frac{h\Omega_z}{v},
\end{gathered} \tag{3.1}$$

где

$$F_x = -\frac{Bv^2}{m}\cos\alpha, \quad A, B, \sigma, h > 0.$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии некоторой следящей силы **T**, проходящей через ось симметрии, и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (2.2), то в системе (3.1) вместо F_x будет стоять величина $(T - B\cos\alpha)v^2/m$; при этом, благодаря условию (2.2), при некоторых условиях система (3.1) приведется к системе более низкого порядка.

Видно, что выбор фазовых переменных позволяет рассматривать систему (3.1) динамических уравнений шестого порядка в качестве независимой. Более того, как видно из уравнений движения, сохраняется компонента продольной составляющей угловой скорости:

$$\Omega_x = \Omega_{x0} = \mathrm{const}\,. \tag{3.2}$$

Ограничимся далее движением тела без собственного вращения, т.е. случаем, когда $\Omega_{x0} = 0$; при этом пусть для простоты $h = 0$.

Введем следующие обозначения:

$$z_1 = \Omega_y\cos\beta + \Omega_z\sin\beta, \quad z_2 = -\Omega_y\sin\beta + \Omega_z\cos\beta,$$

$$z_i = Z_i v, \quad i = 1, 2, \quad \dot\alpha = v\alpha', \quad \dot\beta = v\beta', \quad \dot v = vv'.$$

Тогда систему (3.1) в случае (2.2) при $\Omega_{x0} = 0$ можно преобразовать к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_2 + \sigma n_0^2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha, \\ Z_2' = n_0^2\sin\alpha\cos\alpha - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ Z_1' = -Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1Z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\beta' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{3.5}$$

где

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + \sigma n_0^2\sin^2\alpha\cos\alpha, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}.$$

3.2. Полный список первых интегралов. Рассмотрим (как и выше) вопросы полной интегрируемости (в элементарных функциях) динамической системы (3.3)–(3.5) с аналитическими правыми частями.

Поскольку мы рассматриваем такой класс движений тела, при котором выполнено свойство (2.2), то система (3.3)–(3.5) пятого порядка имеет (наряду с (3.2)) аналитический первый интеграл.

Действительно, скорость центра масс в рассматриваемой системе координат можно представить в виде

$$\mathbf{V}_C = \Big\{v\cos\alpha,\ v\sin\alpha\cos\beta - \sigma\Omega_z,\ v\sin\alpha\sin\beta + \sigma\Omega_y\Big\}.$$

Тогда следующее соотношение является инвариантным для системы (3.1) при условиях (3.2) ($\Omega_{x0} = 0$) и (2.2):

$$v^2 - 2\sigma v z_2\sin\alpha + \sigma^2(z_1^2 + z_2^2) = V_{C0}^2. \tag{3.6}$$

Более того, соотношение (3.6), в котором линейная и угловые скорости образуют однородную форму степени 2, позволяет выписать полиномиальный интеграл по указанным скоростям для системы (3.3)–(3.5):

$$v^2(1 - 2\sigma Z_2\sin\alpha + \sigma^2(Z_1^2 + Z_2^2)) = V_{C0}^2, \tag{3.7}$$

и соотношение (3.7) позволяет явно найти зависимость v от других квазискоростей:

$$v^2 = \frac{V_{C0}^2}{1 - 2\sigma Z_2\sin\alpha + \sigma^2(Z_1^2 + Z_2^2)}. \tag{3.8}$$

Видно, что соотношение (3.8) позволяет рассматривать вопросы интегрируемости в элементарных функциях системы (3.3))–(3.5) уже более низкого порядка — четвертого.

Систему третьего порядка (3.4) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_2 + b\sin\alpha\cos^2\alpha + b(Z_1^2+Z_2^2)\sin\alpha, \\ Z_2' &= \sin\alpha\cos\alpha + bZ_2(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ Z_1' &= bZ_1(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $b = \sigma n_0$, а также введено новое безразмерное дифференцирование: $\langle ' \rangle \mapsto n_0\langle ' \rangle$.

Далее, применяя часто используемую подстановку $\tau = \sin\alpha$, приведем систему (3.9)) к следующей форме с алгебраическими правыми частями:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_2}{d\tau} &= \frac{\tau + bZ_2(Z_1^2+Z_2^2) - bZ_2\tau^2 - Z_1^2/\tau}{-Z_2 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(Z_1^2+Z_2^2)}, \\ \frac{dZ_1}{d\tau} &= \frac{bZ_1(Z_1^2+Z_2^2) - bZ_1\tau^2 + Z_1Z_2/\tau}{-Z_2 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(Z_1^2+Z_2^2)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Произведем переход к однородным координатам u_k, $k = 1, 2,$, по формулам $u_k = Z_k\tau$. Тогда система (3.10) приведется к виду

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Системе (3.11) можно поставить в соответствие следующее уравнение первого порядка:

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}. \tag{3.12}$$

Данное уравнение интегрируется в элементарных функциях, поскольку интегрируется тождество, полученное из уравнения (3.12):

$$d\left(\frac{1 - bu_2 + u_2^2}{u_1}\right) + du_1 = 0,$$

и соответствует в координатах (τ, Z_1, Z_2) трансцендентному первому интегралу следующего вида:

$$\frac{Z_1^2 + Z_2^2 - bZ_2\tau + \tau^2}{Z_1\tau} = \mathrm{const}\,. \tag{3.13}$$

Используя равенство (3.13), заключаем, что система (3.4) обладает следующим трансцендентным первым интегралом, выражающимся через конечную комбинацию элементарных функций:

$$\frac{Z_1^2 + Z_2^2 - bZ_2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{Z_1\sin\alpha} = \mathrm{const}\,. \tag{3.14}$$

Теперь, пользуясь найденным первым интегралом (3.14), перепишем первое уравнение системы (3.11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{2 - 2bu_2 + 2u_2^2 - C_1U_1(C_1,u_2)}{-u_2 + b - 2b\tau^2 + b\tau^2(C_1U_1(C_1,u_2) + bu_2)}, \\ U_1(C_1,u_2) &= \frac{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}}{2}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

или в виде уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b-u_2)\tau + b\tau^3(C_1U_1(C_1,u_2) + bu_2 - 2)}{2 - 2bu_2 + 2u_2^2 - C_1U_1(C_1,u_2)}. \tag{3.16}$$

Уравнение (3.16) (при помощи (3.15)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2-b)p - 2b(C_1U_1(C_1,u_2)+bu_2-2)}{2-2bu_2+2u_2^2-C_1U_1(C_1,u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{3.17}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (3.17) зависит от произвольной постоянной C_2; полные выкладки мы не приводим.

Для поиска последнего дополнительного первого интеграла системы (3.3)–(3.5) (т.е. интеграла, привязывающего уравнение на угол β) заметим, что, поскольку

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{Z_1/\tau}{-Z_2+b\tau(Z_1^2+Z_2^2)+b\tau(1-\tau^2)},$$

то к равенству

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{u_1}{-u_2\tau+b\tau^3(u_1^2+u_2^2)+b\tau(1-\tau^2)} \tag{3.18}$$

добавим также равенство

$$\tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2u_1u_2-bu_1}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)}, \tag{3.19}$$

взятое из системы (3.11).

Полученная система (3.18), (3.19) позволяет выписать уравнение для получения искомого интеграла:

$$\frac{du_1}{d\beta} = 2u_1 - \beta. \tag{3.20}$$

Используя теперь первый интеграл уравнения (3.12) (C_1 — его постоянная интегрирования) и уравнение (3.20), можно получить, что

$$\frac{du_1}{d\beta} = \pm\sqrt{b^2-4(u_1^2-C_1u_1+1)}; \tag{3.21}$$

следовательно, искомая квадратура, в силу (3.21), принимает вид

$$\pm\int\frac{du_1}{\sqrt{b^2-4(u_1^2-C_1u_1+1)}} = \beta + C_3, \quad C_3 = \mathrm{const}\,. \tag{3.22}$$

Левая часть (3.22) (без знака) имеет вид

$$\frac{1}{2}\arcsin\frac{\left(u_1-\frac{b}{2}\right)^2}{\sqrt{C_1^2+(b^2-4)}}. \tag{3.23}$$

После подстановок из величины (3.23) получим искомое инвариантное соотношение:

$$\cos^2[2(\beta+C_3)] = \frac{\left(u_2-\frac{b}{2}\right)^2u_1^2}{G_1}, \tag{3.24}$$

где

$$G_1 = [u_2^2-bu_2]^2+2[u_2^2-bu_2][u_1^2+1]+[u_1^2+1]^2+b^2u_1^2.$$

В частности, если $b=2$, то равенство (3.24) примет вид

$$\cos^2[2(\beta+C_3)] = \frac{(Z_2-\sin\alpha)Z_1}{(Z_2-\sin\alpha)^2+Z_1^2}.$$

Правая часть как нечетная функция от

$$\zeta = \frac{Z_2-\sin\alpha}{Z_1}$$

имеет при $\zeta=1$ глобальный максимум, равный $1/2$.

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2. *Система* (3.3)–(3.5) *обладает полным набором первых интегралов, один из которых является аналитической функцией, а два других являются элементарными трансцендентными функциями своих фазовых переменных.*

В заключение отметим, что для поиска первых интегралов рассматриваемых систем нужно их привести к соответствующим системам с полиномиальными правыми частями, от вида которых зависит возможность интегрирования в элементарных функциях исходной системы.

4. Движение в четырехмерном пространстве

4.1. Два случая динамической симметрии четырехмерного тела. Пусть четырехмерное твердое тело Θ массы m с гладкой трехмерной границей $\partial\Theta$ движется в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерную область евклидового пространства. Предположим, что оно является динамически симметричным; при этом имеются две логические возможности представления его тензора инерции: либо в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}, \tag{4.1}$$

либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\}. \tag{4.2}$$

Во втором случае двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 — плоскости динамической симметрии тела.

4.2. Физические предположения и уравнения на $\mathrm{so}(4)$**.** Предположим, что расстояние от точки N приложения неконсервативной силы $\mathbf{S}$ до точки D является функцией лишь одного параметра — угла α: $DN = R(\alpha)$ (в случае движения в трехмерном пространстве это угол атаки [18, 38–40]). В случае (4.1) этот угол измеряется между скоростью $\mathbf{v}_D$ точки D и осью Dx_1. В случае (4.2) смысл угла будет понятен из уравнений.

Неконсервативная сила (сопротивления) $\mathbf{S}$ имеет величину

$$S = s(\alpha)\,\mathrm{sgn}\cos\alpha \cdot v^2, \quad |\mathbf{v}_D| = v,$$

где s — некоторая функция, характеризующая в системе как рассеяние, так и подкачку энергии (см. [18, 42]).

Для получения явного вида динамической части уравнений движения определим функции R и S, используя при этом информацию о свойствах движения трехмерных тел, следующим образом [18] (при этом используется также известный аналитический результат С. А. Чаплыгина):

$$R = R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad S = S_v(\alpha) = Bv^2\cos\alpha; \quad A, B > 0.$$

Если Ω — тензор угловой скорости четырехмерного твердого тела, $\Omega \in \mathrm{so}(4)$, то та часть уравнений движения, которая отвечает алгебре $\mathrm{so}(4)$, имеет следующий вид (см. [3, 6–9, 11–17, 19, 20, 25]):

$$\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{4.3}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}, \quad \lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2,\ \ldots,\ \lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2,$$

M — момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbf{R}^4$, спроектированный на естественные координаты в алгебре $\mathrm{so}(4)$, $[\cdot,\cdot]$ — коммутатор в $\mathrm{so}(4)$. Кососимметрическую матрицу $\Omega \in \mathrm{so}(4)$ будем представлять в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где ω_i, $i = 1, \ldots, 6$, — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре so(4). При этом, очевидно, для любых $i, j = 1, \ldots, 4$ выполнены равенства

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i.$$

При вычислении момента внешней силы необходимо построить отображение

$$\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathrm{so}(4),$$

переводящее пару векторов из $\mathbf{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры so(4).

4.3. Динамика в $\mathbf{R}^4$. Что касается уравнения движения центра масс C четырехмерного твердого тела, то оно представится в виде

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{4.4}$$

где по многомерной формуле Ривальса

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}, \quad \mathbf{w}_D = \mathbf{v}_D + \Omega\mathbf{v}_D, \quad E = \dot{\Omega},$$

$\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$), E — тензор углового ускорения.

4.4. Обобщенная задача о движении тела под действием следящей силы. В данной работе будет рассмотрен лишь случай распределения главных моментов инерции (4.1).

Несколько расширим задачу. Предположим, что по прямой Dx_1 (в случае (4.1)) действует некоторая следящая сила $\mathbf{T}$, линия действия которой проходит через центр масс C. Введение данной силы используется для рассмотрения интересующих нас классов движений, в результате чего порядок динамической системы может быть понижен.

Как и в предыдущих разделах рассмотрим класс движения четырехмерного тела в случае (2.2)), т.е. его центр масс движется прямолинейно и равномерно.

4.5. Случай (4.1)**.** Вполне определенным выбором величины следящей силы выполнение условия (2.2) может быть достигнуто.

Если $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ — координаты точки N в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, $\{-S, 0, 0, 0\}$ — координаты вектора силы сопротивления в той же системе, то для поиска момента силы строится вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ -S & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая позволяет получить в проекциях на координаты в алгебре so(4) момент силы сопротивления:

$$\{0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S\} \in \mathbf{R}^6 \cong M \in \mathrm{so}(4).$$

Здесь необходимо учесть, что если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — сферические координаты в $\mathbf{R}^4$, то

$$x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1, \quad x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2, \quad x_{4N} = R(\alpha)\sin\beta_1\sin\beta_2.$$

С учетом всего сказанного можно записать уравнение (4.3) в виде

$$\begin{gathered}
(\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0, \\
(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = 0, \\
(\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = x_{4N}S, \\
(\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = 0, \\
(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = -x_{3N}S, \\
(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = x_{2N}S.
\end{gathered} \tag{4.5}$$

Очевидно, что в случае (4.1) у уравнений (4.5) существуют три циклических первых интеграла:

$$\omega_1 = \omega_1^0, \quad \omega_2 = \omega_2^0, \quad \omega_4 = \omega_4^0. \tag{4.6}$$

Рассмотрим для простоты движения на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0.$$

Оставшиеся уравнения на алгебре so(4) примут следующий вид (здесь $n_0^2 = AB/2I_2$):

$$\dot\omega_3 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2,$$
$$\dot\omega_5 = -n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2,$$
$$\dot\omega_6 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1.$$

Если ввести замену угловых скоростей по формулам

$$z_1 = \omega_3\cos\beta_2 + \omega_5\sin\beta_2,$$
$$z_2 = -\omega_3\sin\beta_2\cos\beta_1 + \omega_5\cos\beta_2\cos\beta_1 + \omega_6\sin\beta_1,$$
$$z_3 = \omega_3\sin\beta_2\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_2\sin\beta_1 + \omega_6\cos\beta_1,$$

то «совместные» уравнения движения на касательном расслоении $T\mathbb{S}^3$ трехмерной сферы (после учета четырех условий (2.2) и (4.6), которые помогают снизить порядок общей системы динамических уравнений движения десятого порядка до порядка шестого) примут симметричный вид ($\sigma = DC$):

$$\dot v = \sigma\cos\alpha\Big[n_0^2 v^2\sin^2\alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^3)\Big], \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha\cos^2\alpha + \sigma\sin\alpha(z_1^2+z_2^2+z_3^3)/v, \\ \dot z_3 = n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2+z_2^2)\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot z_2 = z_2 z_3\operatorname{ctg}\alpha + z_1^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta_1, \\ \dot z_1 = z_1 z_3\operatorname{ctg}\alpha - z_1 z_2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta_1, \\ \dot\beta_1 = z_2\operatorname{ctg}\alpha, \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\dot\beta_2 = -z_1\operatorname{ctg}\alpha\csc\beta_1. \tag{4.9}$$

От полной системы седьмого порядка (4.7)–(4.9) отделилась независимая подсистема шестого порядка (4.8), (4.9), в которой, в свою очередь, существует независимая подсистема пятого порядка (4.8). Для полного интегрирования данной системы необходимо, вообще говоря, знать шесть независимых первых интегралов. Однако после замен переменных и введения нового дифференцирования

$$z = \sqrt{z_1^2+z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1}, \quad z = n_0 v Z, \quad z_k = n_0 v Z_k, \quad k=1,2,3, \quad z_* = Z_*, \quad n_0 v\ ' \mapsto\ ',$$

система (4.7)–(4.9) приводится к следующему виду ($b = \sigma n_0$, $[b]=1$):

$$v' = v\Psi(\alpha, Z, Z_3), \quad \Psi(\alpha,Z,Z_3) = b\cos\alpha[\sin^2\alpha - (Z^2+Z_3^2)], \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_3 + b\sin\alpha\cos^2\alpha + b\sin\alpha(Z^2+Z_3^2), \\ Z_3' = \sin\alpha\cos\alpha - Z^2\operatorname{ctg}\alpha - Z_3\Psi(\alpha,Z,Z_3), \\ Z' = ZZ_3\operatorname{ctg}\alpha - Z\Psi(\alpha,Z,Z_3), \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\begin{cases} Z_*' = Z\sqrt{1+Z_*^2}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta_1, \\ \beta_1' = \dfrac{ZZ_*}{\sqrt{1+Z_*^2}}\operatorname{ctg}\alpha, \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\beta_2' = -\frac{Z_1}{\sqrt{1+Z_*^2}}\operatorname{ctg}\alpha\csc\beta_1. \tag{4.13}$$

Видно, что система пятого порядка (4.8) распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (4.11) — третьего, а система (4.12) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости исследуемой системы достаточно указать два независимых интеграла системы (4.11), один — системы (4.12) и дополнительные интегралы, «привязывающие» уравнения (4.10) и (4.13).

При этом заметим, что систему (4.11) можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbb{S}^2$ двумерной сферы.

4.6. Полный список первых интегралов. Полная система (4.10)–(4.13) обладает аналитическим первым интегралом вида

$$v^2(1 - 2bZ_3\sin\alpha + (Z^2 + Z_3^2)) = V_C^2, \tag{4.14}$$

поскольку выполнено свойство (2.2). Последнее инвариантное соотношение позволяет определить величину v.

Система (4.11) принадлежит к классу систем, возникающих в трехмерной динамике твердого тела, и обладает двумя независимыми первыми интегралами, являющимися трансцендентными функциями своих фазовых переменных (в смысле определений комплексного анализа) и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций (ср. [18, 21–43]):

$$\frac{Z^2 + Z_3^2 - bZ_3\sin\alpha + \sin^2\alpha}{Z\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{4.15}$$

$$G(Z, Z_3, \sin\alpha) = C_2 = \mathrm{const}\,. \tag{4.16}$$

Система (4.12) имеет первый интеграл в виде

$$\frac{\sqrt{1 + Z_*^2}}{\sin\beta_1} = C_3 = \mathrm{const} \tag{4.17}$$

и, в свою очередь, дополнительный первый интеграл, позволяющий определить величину β_2, имеет вид

$$\pm\frac{\cos\beta_1}{\sqrt{C_3^2 - 1}} = \sin\{C_3(\beta_2 + C_4)\}, \quad C_4 = \mathrm{const}\,. \tag{4.18}$$

Необходимо также заметить тот факт, что в приведенных системах в знаменателях содержатся функции $\sin\alpha$ и $\sin\beta_1$, несущих информацию лишь о том, что координаты $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ являются сферическими, и при $\sin\alpha = 0$ и $\sin\beta_1 = 0$ они (кинематически) вырождаются.

Теорема 3. *Динамическая система* (4.7)–(4.13) *обладает полным списком первых интегралов* (4.14)–(4.18)*, один из которых является аналитической функцией, а остальные — трансцендентные функции своих переменных* (*после их формального продолжения в комплексную область*).

4.7. Заключение. В предыдущих работах автора [18,21–43] уже рассматривались задачи о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил, а также при наличии дополнительной следящей силы. Данная работа дополняет предыдущие исследования и также открывает очередной новый цикл работ, поскольку ранее рассматривались лишь такие движения четырехмерного тела, когда момент внешних сил был тождественно равен нулю ($M \equiv 0$) или поле внешних сил было потенциальным (см., например, работы О. И. Богоявленского [2,3], А. П. Веселова [4,5], С. В. Манакова [16] и многих других; к сожалению, мы не в состоянии упомянуть всех авторов). В представляемой же работе продолжается направление, развиваемое автором, в исследовании уравнений движения твердого тела на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$ при наличии момента неконсервативной внешней силы.

Перечисленные результаты, а также исследования смежных областей уже неоднократно докладывались на семинаре «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени проф. В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова (см. [10]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агафонов С. А., Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Некоторые актуальные задачи геометрии и механики // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23, 2007. — С. 34.
2. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН СССР, **287**(5), 1986, 1105–1108.
3. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // ДАН СССР, **272**(6), 1983, 1364–1367.
4. *Веселов А. П.* Уравнение Ландау–Лифшица и интегрируемые системы классической механики // ДАН СССР, **270**(5), 1983, 1094–1097.
5. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $\mathrm{so}(4)$ // ДАН СССР, **270**(6), 1983, 1298–1300.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* О кинематике твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Тез. засед. сем. "Актуальные проблемы геометрии и механики". — Фунд. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 315.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Доклады РАН. — 2001. — Т. 380. — № 1. — С. 47–50.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Доклады РАН. — 2002. — Т. 383. — № 5. — С. 635–637.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbf{R}^n$ // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Валерий Владимирович Трофимов // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23, 2007. — С. 5–6.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* О кинематике твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23, 2007. — С. 24–25.
12. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23, 2007. — С. 30.
13. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в n–мерном пространстве // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23, 2007. — С. 31.
14. *Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрия и механика: задачи, подходы, методы // Тез. засед. сем. "Актуальные проблемы геометрии и механики". — Фунд. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 301.
15. *Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрия и механика: задачи, подходы, и методы // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23, 2007. — С. 16.
16. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела // Функцион. анализ и его прил., **10**(4), 1976, 93–94.
17. *Новиков С. П., Шмельцер И.* Периодические решения уравнения Кирхгофа свободного движения твердого тела и идеальной жидкости и расширенная теория Люстерника–Шнирельмана–Морса (ЛМШ) I // Функцион. анализ и его прил., **15**(3), 1981, 54–66.
18. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика, 1989, 3, 51–54.
19. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во "Факториал 1995. – 448 с.
20. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Геометрия скобок Пуассона и методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, **29**. М.: ВИНИТИ, 1986. 3–80.
21. *Шамолин М. В.* Задача о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде и один случай интегрируемости // Book of Abs. Third Int. Conf. "Differential Equations and Applications Saint-Petersburg, Russia, June 12–17, 2000; Изд–во СПбГТУ, 2000, с. 198.

22. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и дин. системам (Суздаль, 21–26.08.2000). — Владимир: Влад. гос. унив., 2000. С. 196–197.
23. *Шамолин М. В.* Сопоставление некоторых интегрируемых случаев из двумерной, трехмерной и четырехмерной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. V Крымской Межд. Мат. школы "Метод функции Ляпунова и его приложения"(МФЛ—2000) (Крым, Алушта, 05–13.09.2000). — Симферополь, 2000, с. 169.
24. *Шамолин М. В.* Об одном случае интегрируемости по Якоби в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Межд. конф. по дифферен. и интегр. уравнениям (Одесса, 12–14.09.2000). — Одесса: Изд–во "АстроПринт 2000. — С. 294–295.
25. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. — 2000. — Т. 375. — № 3. — С. 343–346.
26. *Шамолин М. В.* Интегрируемость задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Тез. засед. сем. "Актуальные проблемы геометрии и механики". — Фунд. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 309.
27. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. (22–25.5.2001): Thes. of Conf. Rep. — Kyiv, 2001. — С. 344.
28. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой // Анн. докл. VIII Всеросс. съезда по теорет. и прикл. механ. (Пермь, 23–29.08.2001). — Екатеринбург: УрО РАН, 2001. — С. 599–600.
29. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике двухмерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и дин. системам (Суздаль, 01–06.07.2002). — Владимир: Влад. гос. унив., 2002. С. 142–144.
30. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае в динамике на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$ // Тез. докл. Всеросс. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения» (СамДиф–2005), Самара, 27 июня—2 июля 2005 г. Самара: Изд–во «Универс-групп», 2005. – С. 97–98.
31. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$ // Успехи мат. наук. –– Т. 60. —- Вып. 6, 2005. –– С. 233–234.
32. *Шамолин М. В.* О случае полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела // Тез. докл. межд. конф. по дифф. уравн. и дин. сист. Владимир, 10–15.07.2006. — Владимир: Влад. гос. ун–т, 2006. — С. 226–228.
33. *Шамолин М. В.* Интегрируемость задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23, 2007. — С. 21.
34. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23, 2007. — С. 27.
35. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости движения четырехмерного твердого тела—маятника, находящегося в потоке набегающей среды // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23, 2007. — С. 37.
36. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил // "Нелинейный динамический анализ–2007": Тез. докл. междун. конгр., Санкт-Петербург, 4–8 июня 2007 г. — СПб.: Санкт-Пет. гос. ун–т, 2007. — С. 178.
37. *Шамолин М. В.* Случаи полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Тез. докл. Междун. конф. "Анализ и особенности посвящ. 70–летию В. И. Арнольда, 20–24 авг. 2007 г., Москва. — М.: МИАН, 2007, с. 110–112.
38. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Экзамен, 2007.
39. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН, **364**(5), 1999, 627–629.
40. *Шамолин М. В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ, 1997, 2, 65–68.

41. *Shamolin M. V.* Methods of Analysis of Dynamics of a 2D– 3D– or 4D–rigid Body With a Medium, In: Abst. Short Commun. Post. Sess. Of ICM'2002, Beijing, 2002, August 20–28; Higher Education Press, Beijing, China, p. 268.
42. *Shamolin M. V.* 4D rigid body and some cases of integrability, In: Abstracts of ICIAM07, Zurich, Switzerland, June 16–20, 2007; ETH Zurich, 2007, p. 311.
43. *Shamolin M. V.* The cases of integrability in 2D–, 3D– and 4D–rigid body, In: Abstr. of Short Commun. and Post. of Int. Conf. "Dynamical Methods and Mathematical Modelling Valladolid, Spane (Sept. 18–22, 2007); ETSII, Valladolid, 2007, p. 31.

М. В. Шамолин
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Институт механики
E-mail: `shamolin@imec.msu.ru`