Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле

М. В. Шамолин

Статья продолжает исследование по поиску новых интегрируемых случаев в динамике четырехмерного твердого тела на $\mathbb{R}^4 \times \mathrm{so}(4)$ в неконсервативном поле сил [1]–[3]. Ранее автором был предъявлен случай полной интегрируемости уравнений движения динамически симметричного тела при выполнении равенства $I_1 \neq I_2 = I_3 = I_4$ [1]. В данной же работе полностью разобран случай другой логически возможной динамической симметрии.

Пусть четырехмерное твердое тело Ξ с гладкой границей $\partial\Xi$ является динамически симметричным (в некоторой системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет вид $\mathrm{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\}$). Таким образом, двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 – плоскости динамической симметрии тела.

Неконсервативная сила (сопротивления) $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, 0, 0\}$ и координаты точки ее приложения $N = (0, 0, x_{3N}, x_{4N})$ в системе $Dx_1x_2x_3x_4$ вместе с соотношениями $S_1 = \sigma \sin\gamma$, $S_1 = -S\cos\gamma$, $\gamma = \mathrm{const}$, $x_{3N} = R\cos\beta_1$, $x_{4N} = R\sin\beta_1$ (γ – угол в плоскости Dx_1x_2 и β_1 – угол в плоскости Dx_3x_4) позволяют получить динамическую часть уравнений движения на $\mathbb{R}^4 \times so(4)$.

Если прямая CD (C – центр масс) лежит в плоскости Dx_1x_2 и вектор $\mathbf{DC}$ определяет положение центра масс: $\mathbf{DC} = \{\sigma\sin\gamma, -\sigma\cos\gamma, 0, 0\}$, то вектор скорости $\mathbf{v}_D$ точки D можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{v}_D = \{v\cos\alpha\sin\beta_2,\ v\cos\alpha\cos\beta_2,\ v\sin\alpha\cos\beta_1,\ v\sin\alpha\sin\beta_1\}, \qquad |\mathbf{v}_D| = v$$

(β_2 – угол в плоскости Dx_1x_2).

Пусть Ω – тензор угловой скорости тела, $\Omega \in \mathrm{so}(4)$. Та часть уравнений движения, которая отвечает алгебре $\mathrm{so}(4)$, имеет вид [4]–[6]: $\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M$, где $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, $\lambda_1 = (-I_1+I_2+I_3+I_4)/2$, $\dots$, $\lambda_4 = (I_1+I_2+I_3-I_4)/2$, а M – момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbb{R}^4$, спроектированный на $\mathrm{so}(4)$, $[\,\cdot\,]$ – коммутатор в $\mathrm{so}(4)$. Кососимметрическую матрицу $\Omega \in \mathrm{so}(4)$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ – компоненты угловой скорости в проекциях на алгебру $\mathrm{so}(4)$.

При вычислении момента внешней силы необходимо построить отображение $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathrm{so}(4)$, переводящее пару векторов из $\mathbb{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры $\mathrm{so}(4)$.

Очевидно, что имеются два циклических интеграла: $\omega_1 = \omega_1^0 = \mathrm{const}$, $\omega_6 = \omega_6^0 = \mathrm{const}$. Будем рассматривать динамику системы на нулевых их уровнях: $\omega_1^0 = \omega_6^0 = 0$.

Для получения явного вида динамических уравнений определим две функции воздействия среды R и S (используя при этом аналогичную информацию о свойствах движения трехмерных тел [3], [7]): $R = R(\alpha) = A\sin\alpha$, $S = S_v(\alpha) = Bv^2\cos\alpha$; $A, B > 0$. Тогда редуцированные уравнения перепишутся как $\dot\omega_2 = -n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha \times \sin\beta_1\cos\gamma$, $\dot\omega_3 = -n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\gamma$, $\dot\omega_4 = n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1\cos\gamma$, $\dot\omega_5 = n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1\sin\gamma$ ($n_0^2 = AB/(I_1+I_3)$).

Несколько расширим задачу. Предположим, что в плоскости Dx_1x_2 действует следящая сила $\mathbf{T}$, линия действия которой проходит через центр масс C. При этом рассмотрим класс движений, при котором во все моменты времени выполнены условия (неинтегрируемые связи): $v = \mathrm{const}$, $\beta_2 = \mathrm{const}$ [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00231-а).

В результате замены угловых скоростей по формулам $z_1 = \omega_3\cos\beta_1 + \omega_5\sin\beta_1$, $z_2 = \omega_3\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_1$, $z_3 = \omega_2\cos\beta_1 + \omega_4\sin\beta_1$, $z_4 = \omega_2\sin\beta_1 - \omega_4\cos\beta_1$, $w_1 = -z_1\sin\beta_2 + z_3\cos\beta_2$, $w_2 = z_3\sin\beta_2 + z_1\cos\beta_2$, $w_3 = z_2\sin\beta_2 - z_4\cos\beta_2$, $w_4 = z_4\sin\beta_2 + z_2\cos\beta_2$ у редуцированной системы шестого порядка появляется независимая подсистема третьего порядка

$$\begin{gathered}\dot\alpha = -w_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha,\\ \dot w_3 = n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos(\gamma+\beta_2) - w_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,,\\ \dot w_1 = w_3 w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,,\end{gathered}\tag{1}$$

а также может быть выделена система второго порядка

$$\dot w_4 = -n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin(\gamma+\beta_2) + w_1 w_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,,\qquad \dot w_2 = -w_4 w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\tag{2}$$

и уравнение

$$\dot\beta_1 = w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.\tag{3}$$

Как было доказано ранее [3], [7], система (1), (3) обладает тремя, вообще говоря, независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\begin{aligned}&\Phi_1(w_1, w_3, \sin\alpha) = (w_1\sin\alpha)^{-1}\\ &\qquad\times\bigl(w_1^2 + w_3^2 - \sigma n_0^2 v w_3\sin\alpha + n_0^2 v^2\cos(\gamma+\beta_2)\sin^2\alpha\bigr) = C_1 = \mathrm{const},\end{aligned}\tag{4}$$

$$\Phi_2(w_1, w_3, \sin\alpha) = C_2 = \mathrm{const},\tag{5}$$

$$\Phi_3(w_1, w_3, \sin\alpha, \beta_1) = C_3 = \mathrm{const}.\tag{6}$$

Все три указанных первых интеграла являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных, выражающимися через элементарные функции [3], [8].

В силу указанных редукций в рассматриваемой системе шестого порядка для полного ее интегрирования достаточно указать еще один первый интеграл, независимый с интегралами (4)–(6).

После замены переменных

$$w_* = w_3\sin(\gamma+\beta_2) + w_4\cos(\gamma+\beta_2),\qquad w_{**} = w_1\sin(\gamma+\beta_2) - w_2\cos(\gamma+\beta_2)\tag{7}$$

система (2) может быть приведена к виду $dw_*/d\beta_1 = -w_{**}$, $dw_{**}/d\beta_1 = w_*$, который предполагает наличие аналитического первого интеграла: $w_*^2 + w_{**}^2 = C_4 = \mathrm{const}$.

Итак, исследуемая динамическая система вполне интегрируема в классе, вообще говоря, трансцендентных функций (имеющих существенно особые точки).

Список литературы

[**1**] М. В. Шамолин, *Докл. РАН*, **375**:3 (2000), 343–346. [**2**] Д. В. Георгиевский, М. В. Шамолин, *Докл. РАН*, **380**:1 (2001), 47–50. [**3**] М. В. Шамолин, *Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела*, Изд-во “Экзамен”, М., 2007. [**4**] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1979. [**5**] В. В. Трофимов, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 1984, № 6, 31–33. [**6**] О. И. Богоявленский, *Докл. АН СССР*, **287**:5 (1986), 1105–1108. [**7**] М. В. Шамолин, *Докл. РАН*, **364**:5 (1999), 627–629. [**8**] М. В. Шамолин, *УМН*, **53**:3 (1998), 209–210.

М. В. Шамолин (M. V. Shamolin)
Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin@imec.msu.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
09.08.2009