ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2010, том 431, № 3, с. 339–343

МЕХАНИКА

УДК 531.01+531.552

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2010 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком В.В. Козловым 09.11.2009 г.

Поступило 12.11.2009 г.

Результаты предлагаемой работы появились благодаря исследованию некоторой задачи о движении твердого тела в среде с сопротивлением [1, 2], где пришлось иметь дело с первыми интегралами динамических систем с нестандартными свойствами. А именно, интегралы не являлись ни аналитическими, ни гладкими, а на некоторых множествах они были даже разрывными. При этом они выражались через конечную комбинацию элементарных функций. Последние обстоятельства позволили провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, которые обладали "грубостью" и сохранялись для систем более общего вида с некоторыми нетривиальными симметриями скрытого типа. Поэтому представляет интерес исследование достаточно широких классов систем с аналогичными свойствами, в частности, взятыми из динамики твердого тела, взаимодействующего со средой. Будут предъявлены новые случаи интегрируемости в задаче о пространственном движении твердого тела в сопротивляющейся среде.

СИСТЕМЫ С СИММЕТРИЯМИ И ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ

Изучаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих, по крайней мере, одну периодическую фазовую координату. Исследуемые системы обладают такими свойствами симметрии, при которых в среднем за период по периодической координате сохраняется их фазовый объем. Так, например, маятниковая система с гладкой и периодической правой частью

$$\alpha^{\cdot} = -\omega + f(\alpha), \quad \omega^{\cdot} = g(\alpha),$$
$$f, g(\alpha + T) = f, g(\alpha)$$

в некоторой части фазового цилиндра сохраняет площадь с переменной плотностью за период T и эквивалентна уравнению маятника $\alpha^{\cdot\cdot} - f'(\alpha)\alpha^{\cdot} + g(\alpha) = 0$, для которого интеграл от коэффициента $f'(\alpha)$ при диссипативном члене $\alpha^{\cdot}$ в среднем за период равен нулю. Данная система имеет такие симметрии, при которых она становится системой с переменной диссипацией с нулевым средним в смысле следующего определения.

Определение 1. Рассмотрим гладкую автономную систему $n + 1$ порядка нормального вида, заданную на многомерном цилиндре $R^n\{x\} \times S^1\{\alpha \bmod T\}$, где α – периодическая координата периода $T > 0$. Дивергенция правой части (которая, вообще говоря, является функцией всех фазовых переменных и не равна тождественно нулю) данной системы обозначим $\operatorname{div}(x, \alpha)$. Назовем такую систему системой с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним, если функция $\int_0^T \operatorname{div}(x, \alpha) d\alpha$ равна (не равна) тождественно нулю. При этом в некоторых случаях (например, когда в отдельных точках окружности $S^1\{\alpha \bmod T\}$ возникают особенности) интеграл понимается в смысле главного значения.

Рассмотрим далее системы следующего вида:

$$\alpha^{\cdot} = f_\alpha(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha),$$
$$\omega_k^{\cdot} = f_k(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

заданные на множестве $S^1(\alpha \bmod T\}\backslash K \times R^n\{\omega\}$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu)$, где функции $f_\lambda(u_1, u_2, u_3)$, $\lambda = \alpha, 1, 2, \ldots, n$, трех переменных u_1, u_2, u_3 таковы:

$$f_\lambda(-u_1, -u_2, u_3) = -f_\lambda(u_1, u_2, u_3),$$
$$f_\alpha(u_1, u_2, -u_3) = f_\alpha(u_1, u_2, u_3),$$
$$f_k(u_1, u_2, -u_3) = -f_k(u_1, u_2, u_3).$$

Множество K или пусто, или состоит из конечного числа точек окружности $S^1\{\alpha \bmod T\}$.

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Последние две переменные $u_2 u_3$ в функциях $f_\lambda(u_1, u_2, u_3)$ зависят от одного параметра α, но они выделены в разные группы по следующим причинам. Во-первых, не во всей области определения они однозначно выражаются одна относительно другой, во-вторых, первая из них нечетная, а вторая – четная функции α, что по-разному влияет на симметрии рассматриваемой системы (1). Ей поставим в соответствие неавтономную систему $\dfrac{d\omega_k}{d\alpha} = \dfrac{f_k(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha)}{f_\alpha(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha)}$, подстановкой $\tau = \sin\alpha$ приводимую к виду

$$\frac{d\omega_k}{d\tau} = \frac{f_k(\omega, \tau, \varphi_k(\tau))}{f_\alpha(\omega, \tau, \varphi_\alpha(\tau))}, \quad \varphi_\lambda(-\tau) = \varphi_\lambda(\tau), \qquad (2)$$
$$\lambda = \alpha, 1, 2, \ldots, n.$$

Система (2) может иметь, в частности, алгебраическую правую часть, что поможет искать ее первые интегралы в явном виде.

Следующее предложение позволяет рассматривать только что введенный класс систем как подкласс систем с переменной диссипацией.

Предложение 1. Системы вида (1) являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним.

Обратное, конечно же, наверно.

Далее в работе будет затронут случай, когда функции $f_\lambda(\omega, \tau, \varphi_k(\tau))$, $\lambda = \alpha, 1, 2, \ldots, n$, суть полиномы по ω, τ.

СИСТЕМЫ ИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СРЕДОЙ

Движение твердого тела в сопротивляющейся среде под действием следящей силы и линейного демпфирования со стороны среды. Ранее автором было рассмотрено пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела массы m с передним круглым торцом в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [1, 2]. Пусть (v, α, β) – сферические координаты некоторой характерной точки твердого тела, $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_\xi\}$ – компоненты его угловой скорости, I_1, I_2, I_2 – главные моменты инерции в некоторой системе координат, связанной с телом. Если же рассматривается более общая задача о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии некоторой следящей силы, проходящей через ось симметрии, и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства $v = \text{const}$, то при $\Omega_x \equiv 0$ динамическая часть уравнений движения приведется к системе четвертого порядка. Действительно, если принять

$$z_1 = \Omega_y \cos\beta + \Omega_z \sin\beta, \quad z_2 = -\Omega_y \sin\beta + \Omega_z \cos\beta$$

и ввести безразмерные переменные w_k, $k = 1, 2$, и параметры по формулам

$$h_1 = hB, \quad \frac{\sigma h_1}{I_2} = H_1, \quad b = \frac{\sigma^2 AB}{I_2}, \quad \delta z_k = v w_k$$

(при этом $\alpha^\cdot = \dfrac{v\alpha'}{\sigma}$ и т.д.), получаем следующую динамическую систему четвертого порядка:

$$\alpha' = -(1 + H_1)w_2 + b\sin\alpha,$$
$$w_2' = b\sin\alpha\cos\alpha - (1 + H_1)w_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_2\cos\alpha, \qquad (3)$$
$$w_1' = (1 + H_1)w_1 w_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_1\cos\alpha,$$

$$\beta' = (1 + H_1)w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (4)$$

в которой имеется независимая подсистема третьего порядка (3).

При $b = H_1$ дивергенция правой части системы (3) ((3), (4)) после замены переменных $w_1^* = \ln|w_1|$ тождественно равна нулю, что позволяет считать данную систему (системы) консервативной (консервативными).

Теорема 1. *Система* (3), (4) *обладает полным набором первых интегралов, являющихся элементарными трансцендентными функциями своих фазовых переменных. Два из них образуют полный набор первых интегралов системы* (4).

Замечание. Вообще говоря, проинтегрированная система (3) рассматривается в трехмерной области $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\}\backslash\{\alpha = 0, \alpha = \pi\} \times R^2\{w_1, w_2\}$ (такая система приводится к эквивалентной себе системе на касательном расслоении T_*S^2 к двумерной сфере S^2 [3, 4]). С точки зрения теории элементарных функций полученные первые интегралы являются трансцендентными (т.е. не алгебраическими). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции после ее формального продолжения в комплексную область имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

Таким образом, система (3), (4) является системой с переменной диссипацией с нулевым средним. Она обладает тремя первыми интегралами (т.е. полным списком), являющимися трансцендентными функциями и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций. Последние свойства и стали для нее возможными после сопоставления ей (вообще говоря, неавтономной) системы уравнений с алгебраической (полиномиальной) правой частью (подобно (2)).

Движение твердого тела с постоянной скоростью центра масс в сопротивляющейся среде. Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела массы m с передним круглым торцом в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [1, 2]. Пусть (v, α, β) – сферические координаты характерной точки твердого тела, $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_x\}$ – компоненты его угловой скорости, I_1, I_2, I_2 – главные моменты инерции в некоторой системе координат, связанной с телом. Если же рассматривается более общая задача о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии некоторой следящей силы, проходящей через ось симметрии и обеспечивающей во все время движения постоянство величины скорости центра масс, то при некоторых условиях в случае функций Чаплыгина воздействия среды [5, 6] динамическая часть уравнений движения приведется к системе, в которой произойдет отделение системы более низкого порядка.

Действительно, выбор фазовых переменных позволяет рассматривать систему динамических уравнений шестого порядка в качестве независимой. Более того, сохраняется компонента продольной составляющей угловой скорости: $\Omega_x = \Omega_{x0} = \text{const}$. Ограничимся далее движением тела без собственного вращения, т.е. когда $\Omega_{x0} = 0$.

Введем следующие обозначения: $z_1 = \Omega_y\cos\beta + \Omega_z\sin\beta$, $z_2 = -\Omega_y\sin\beta + \Omega_z\cos\beta$, $z_i = Z_i v$, $i = 1, 2$, $\alpha^\bullet = \alpha' v$, $\beta^\bullet = \beta' v$, $v^\bullet = v'v$, $n_0^2 = \dfrac{AB}{I_2}$, $b = \sigma n_0$ (также введем новое дифференцирование "$'$" $\to n_0$"$'$"). Тогда система преобразовывается к виду

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha,\\ Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - \\ - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\end{gathered} \tag{6}$$

$$Z_1' = bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\beta' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{7}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

$$n_0^2 = \frac{AB}{I_2}.$$

Поскольку мы рассматриваем такой класс движений тела, при котором постоянна величина скорости центра масс, то система (5)–(7) пятого порядка имеет аналитический первый интеграл

$$v^2(1 - 2bZ_2\sin\alpha + b^2(Z_1^2 + Z_2^2)) = V_{C0}^2. \tag{8}$$

Видно, что соотношение (8) позволяет рассматривать вопросы интегрируемости в элементарных функциях системы (6), (7) уже четвертого порядка, в котором выделилась система третьего порядка (6).

Применяя часто используемую подстановку $\tau = \sin\alpha$, систему (6) можно привести к следующей системе с алгебраическими правыми частями (подобно (2)):

$$\begin{aligned}\frac{dZ_2}{d\tau} &= \frac{\tau + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_2\tau^2 - \dfrac{Z_1^2}{\tau}}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) + b\tau(1 - \tau^2)},\\ \frac{dZ_2}{d\tau} &= \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_1\tau^2 - \dfrac{Z_1Z_2}{\tau}}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) + b\tau(1 - \tau^2)}.\end{aligned} \tag{9}$$

Произведем переход к однородным координатам u_k, $k = 1, 2$, по формулам $Z_k = u_k\tau$. Тогда система (9) приведется к виду

$$\begin{aligned}\tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}.\end{aligned} \tag{10}$$

Системе (10) можно сопоставить автономное уравнение первого порядка, которое интегрируется в элементарных функциях и позволяет получить явный вид трансцендентного первого интеграла исследуемой системы

$$\frac{Z_1^2 + Z_2^2 - bZ_2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{Z_1\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \tag{11}$$

Теперь, пользуясь найденным первым интегралом (11), перепишем первое уравнение системы (10) в виде

$$\begin{gathered}\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{2 - 2bu_2 + 2u_2^2 - C_1U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b - 2b\tau^2 + b\tau^2(C_1U_1(C_1, u_2) + bu_2)},\\ U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\right\},\end{gathered} \tag{12}$$

или в виде уравнения Бернулли

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - u_2)\tau + b\tau^3(C_1U_1(C_1, u_2) + bu_2 - 2)}{2 - 2bu_2 + 2u_2^2 - C_1U_1(C_1, u_2)}. \tag{13}$$

Уравнение (13) (при помощи (12)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p - 2b(C_1U_1(C_1, u_2) + bu_2 - 2)}{2 - 2bu_2 + 2u_2^2 - C_1U_1(C_1, u_2)}, \tag{14}$$

$$p = \frac{1}{\tau^2}.$$

Последнее означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (14) зависит от произвольной постоянной C_2.

Для поиска последнего дополнительного первого интеграла системы (6), (7) (т.е. интеграла, привязывающего уравнение (7) на угол β), поскольку

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{Z_1/\tau}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) + b\tau(1-\tau^2)},$$

к равенству

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{u_1}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2 + u_2^2) + b\tau(1-\tau^2)} \tag{15}$$

добавим также равенство

$$\tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \tag{16}$$

взятое из системы (10). Полученная система (15), (16) позволяет выписать уравнение для получения искомого интеграла $\dfrac{du_1}{d\beta} = 2u_2 - b$, которое легко интегрируется:

$$\cos^2[2(\beta + C_3)] = \frac{\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 u_1^2}{G}, \tag{17}$$

где $G = [u_2^2 - bu_2]^2 + 2[u_2^2 - bu_2]\cdot[u_1^2 + 1] + [u_1^2 + 1]^2 + b^2u_1^2$. В частности, если $b = 2$, то равенство (17) примет вид

$$\cos^2[2(\beta + C_3)] = \frac{(Z_2 - \sin\alpha)Z_1}{(Z_2 - \sin\alpha)^2 + Z_1^2}.$$

Доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Система* (5)–(7) *обладает полным набором первых интегралов, один из которых является аналитической функцией, а три других — элементарными трансцендентными функциями своих фазовых переменных.*

В заключение отметим, что для поиска первых интегралов рассматриваемых систем хорошо бы привести системы вида (1) к системам (2) с полиномиальными правыми частями, от вида которых зависит возможность интегрирования в элементарных функциях исходной системы. Поэтому далее пойдем следующим путем: будем искать достаточные условия интегрируемости в элементарных функциях систем уравнений с полиномиальными правыми частями, исследуя при этом системы наиболее общего вида.

СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ

Каковые возможности интегрирования в элементарных функциях следующей системы более общего вида, включающей в себя рассмотренные выше системы, в трехмерных фазовых областях:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{ax + by + cz + \frac{c_1z^2}{x} + \frac{c_2zy}{x} + \frac{c_3y^2}{x}}{dx + eux + fvx}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{gx + hy + iz + \frac{i_1z^2}{x} + \frac{i_2zy}{x} + \frac{i_3y^2}{x}}{dx + eux + fvx}, \end{aligned} \tag{18}$$

имеющей особенность типа $\dfrac{1}{x}$?

Вводя, как и ранее, подстановки $y = ux$, $z = vx$, получим, что система (18) приводится к виду

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{ax + bux + cvx + c_1v^2x + c_2vux + c_3u^2x}{dx + eux + fvx},$$

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{gx + hux + ivx + i_1v^2x + i_2vux + i_3u^2x}{dx + eux + fvx},$$

которому сопоставим неавтономное уравнение

$$\frac{dv}{du} =$$

$$= \frac{a + bu + cv + c_1v^2 + c_2vu + c_3u^2 - v[d + eu + fv]}{g + hu + iv + i_1v^2 + i_2vu + i_3u^2 - u[d + eu + fv]}.$$

Для интегрирования в элементарных функциях последнего уравнения достаточно наложить семь соотношений:

$$\begin{aligned} &g = 0, \quad i_3 = e, \quad i_1 = 0, \quad i = 0, \\ &c_2 = e, \quad c = h, \quad 2c_1 = i_2 + f. \end{aligned} \tag{19}$$

Введем восемь параметров $\beta_1, \ldots, \beta_8$ и рассмотрим их в качестве независимых:

$$g = 0, \quad h = \beta_1, \quad i = 0, \quad i_1 = 0,$$

$$i_2 = \beta_2, \quad i_3 = \beta_3, \quad d = \beta_4, \quad e = \beta_3,$$

$$f = \beta_5, \quad a = \beta_6, \quad b = \beta_7, \quad c = \beta_1,$$

$$c_1 = \frac{\beta_2 + \beta_5}{2}, \quad c_2 = \beta_3, \quad c_3 = \beta_8.$$

Далее, интегрируя наше уравнение при условиях (19), в координатах (x, y, z) получаем первый интеграл системы:

$$\frac{\frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_5)z^2 - \beta_8y^2 + (\beta_1 - \beta_4)zx + \beta_6x^2}{yx} -$$

$$-\beta_7\ln\left|\frac{x}{y}\right| = \text{const}.$$

Таким образом, можно сделать вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы, зависящей от восьми параметров:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\beta_6 x + \beta_7 y + \beta_1 z + \dfrac{(\beta_2 - \beta_5)z^2}{2x} + \dfrac{\beta_3 zy}{x} + \dfrac{\beta_8 y^2}{x}}{\beta_4 x + \beta_3 y + \beta_5 z},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta_1 y + \dfrac{\beta_2 zy}{x} + \dfrac{\beta_3 y^2}{x}}{\beta_4 x + \beta_3 y + \beta_5 z}.$$

Теорема 3. *Следующая система, зависящая от восьми параметров, заданная на множестве*

$$S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \backslash \{\alpha = 0, \alpha = \pi\} \times R^2\{w_1, w_2\},$$

обладает, вообще говоря, трансцендентным первым интегралом, выражающимся через элементарные функции:

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet} &= \beta_4 \sin\alpha + \beta_3 z_1 + \beta_5 z_2, \\ z_2^{\bullet} &= \beta_6 \sin\alpha\cos\alpha + \beta_7 z_1 \cos\alpha + \beta_1 z_2 \cos\alpha + \\ &+ \frac{\beta_2 + \beta_5}{2} z_2^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_3 z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_8 z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (20) \\ z_1^{\bullet} &= \beta_1 z_1 \cos\alpha + \beta_2 z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_3 z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \end{aligned}$$

В частности, система (20) при $\beta_1 = -H_1$, $\beta_2 = 1 + H_1$, $\beta_3 = \beta_7 = 0$, $\beta_4 = b$, $\beta_6 = b$, $\beta_5 = \beta_8 = -(1 + H_1)$ приводится к системе (3).

Поиск случаев полной интегрируемости, а тем более в элементарных функциях, — всегда сложная задача. Но в работе показано, что существует тесная связь трех независимых свойств, при этом достаточно гармонично сочетающихся на системах из динамики твердого тела:

рассмотрение класса систем (1) с отмеченными симметриями;

обладание данным классом систем переменной диссипацией с нулевым средним (по имеющейся периодической фазовой переменной), что позволяет такие системы рассматривать как "почти" консервативные системы;

в некоторых случаях обладание ими полным набором трансцендентных первых интегралов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08–01–00231-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.
2. *Шамолин М.В.* // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14. В. 3. С. 3–237.
3. *Шамолин М.В.* // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.
4. *Шамолин М.В.* // УМН. 2007. Т. 62. В. 5. С. 169–170.
5. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. М.: Наука, 1976. 495 с.
6. *Чаплыгин С.А.* В кн.: Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133–135.