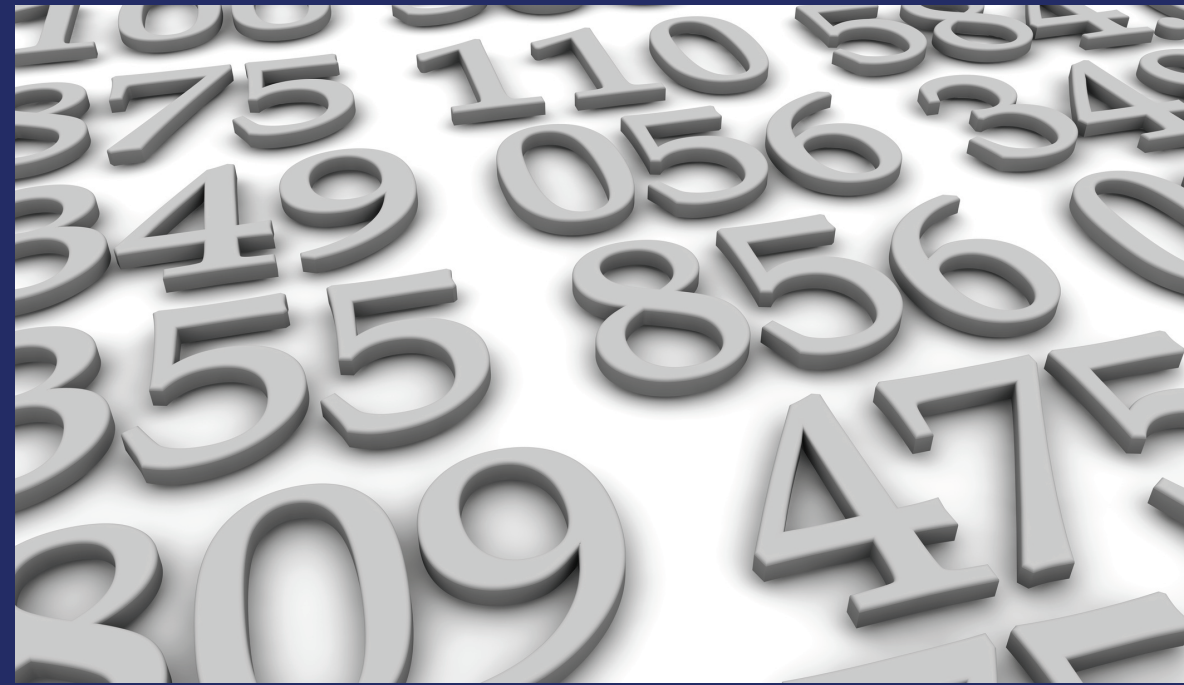


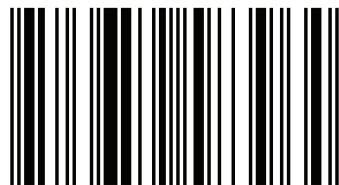
Книга представляет собой первую часть второго издания собственного изложения автора прослушанных им лекций на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова по различным разделам современной математики. Эти лекционные курсы читались многими выдающимися профессорами, за что автор выражает безмерную благодарность. Данный учебник содержит введение в такие разделы, как аналитическая геометрия, линейная алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, теория функций комплексного переменного, операционное исчисление, теория вероятностей, математическая статистика, оптимальное управление. Книга рассчитана на студентов, аспирантов ВУЗов, а также для всех интересующихся математикой.



Максим Владимирович Шамолин

Современные разделы математики в доступном изложении Часть I

Максим Владимирович Шамолин - профессор, академик РАЕ,
МОСКВА.



978-3-659-58396-4

Максим Владимирович Шамолин

Современные разделы математики в доступном изложении
Часть I

Максим Владимирович Шамолин

**Современные разделы математики
в доступном изложении Часть I**

LAP LAMBERT Academic Publishing

Imprint

Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: www.ingimage.com

Publisher:

LAP LAMBERT Academic Publishing

is a trademark of

International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group

17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius

Printed at: see last page

ISBN: 978-3-659-58396-4

Copyright © Максим Владимирович Шамолин

Copyright © 2018 International Book Market Service Ltd., member of
OmniScriptum Publishing Group

All rights reserved. Beau Bassin 2018

М.В. Шамолин

СОВРЕМЕННЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ

в доступном изложении

Часть I

*Рекомендовано Учебно-методическим советом по математике
и механике Учебно-методического объединения по классическо-
му университетскому образованию РФ в качестве учебника
по высшей математике для студентов университетов,
обучающихся по направлениям подготовки 010900 «Механика»,
011000 «Механика. Прикладная математика»*

2018

Книга представляет собой первую часть второго издания собственного изложения автора прослушанных им лекций на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова по различным разделам современной математики. Эти лекционные курсы читались многими выдающимися профессорами, за что автор выражает безмерную благодарность.

Данный учебник содержит введение в такие разделы, как аналитическая геометрия, линейная алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, теория функций комплексного переменного, операционное исчисление, теория вероятностей, математическая статистика, оптимальное управление.

Книга рассчитана на студентов, аспирантов ВУЗов, а также для всех интересующихся математикой.

Содержание

Введение	7
I. Линейная алгебра и аналитическая геометрия	11
1. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение	11
2. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл. Определители второго и третьего порядка. Координатное выражение векторного и смешанного произведения	21
3. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой	27
4. Прямая и плоскость в пространстве. Уравнение плоскости и прямой в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью	32
5. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Поверхности второго порядка	36
6. Решение системы n линейных алгебраических уравнений методом Гаусса	53
7. Определители n -го порядка и их свойства. Разложение определителя по строке (столбцу). Решение систем n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными по правилу Крамера	56
8. Матрицы и действия с ними. Обратная матрица. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы	64
9. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Размерность и базис линейного пространства. Координаты вектора. Преобразование координат при переходе к новому базису	69

10. Линейные операторы и действия с ними. Матрица линейного оператора. Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах	73
11. Ранг матрицы. Теорема о ранге. Вычисление ранга матрицы.....	77
12. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Однородная и неоднородная системы. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений.....	80
13. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен	84
14. Билинейные и квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Формулировка закона инерции. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы	87
15. Евклидовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Матрица Грама скалярного произведения. Ортогональный и ортонормированный базис. Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение подпространства в евклидовом пространстве	96
16. Сопряженные операторы в евклидовом пространстве и их свойства. Самосопряженные операторы. Построение ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора	101
17. Ортогональные операторы, их свойства. Ортогональные матрицы	109
18. Понятие о тензорах.....	113
II. Введение в математический анализ	117
19. Множества. Операции с множествами. Декартово произведение множеств. Отображения множеств. Мощность множества.....	117
20. Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные	

функции. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики	121
21. Комплексные числа и действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера. Корни из комплексных чисел	139
22. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Критерий Коши. Арифметические свойства пределов. Переход к пределу в неравенствах. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.....	144
23. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства предела функции. Односторонние пределы. Пределы монотонных функций. Замечательные пределы	151
24. Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной и обратной функции. Непрерывность элементарных функций.....	158
25. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва, их классификация	161
26. Сравнение функций. Символы o и O . Эквивалентные функции	163
27. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, промежуточные значения. Теорема об обратной функции.....	165
III. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.....	172
28. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл	172

29. Производная функции, ее смысл в различных задачах. Правило нахождения производной и дифференциала	175
30. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически.....	180
31. Точки экстремума функции. Теорема Ферма...	186
32. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, их применение	188
33. Правило Лопиталя	192
34. Производные и дифференциалы высших порядков	197
35. Формула Тейлора с остаточным членом общего вида в формах Пеано, Лагранжа и Коши. Разложение некоторых основных элементарных функций по формуле Маклорена. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений	200
36. Условия монотонности функции. Экстремумы функции, необходимое условие. Достаточные условия экстремума	206
37. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба	213
38. Асимптоты функции	220
39. Общая схема исследования функции и построения ее графика.....	222
40. Вектор-функция скалярного аргумента. Понятие кривой, гладкая кривая. Касательная к кривой, кривизна кривой. Радиус кривизны. Главная нормаль. Бинормаль	225
IV. Интегральное исчисление функций одной переменной.....	229
41. Первообразная. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства	229
42. Табличные интегралы. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле	232
43. Многочлены. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными	

коэффициентами на линейные и квадратичные множители	234
44. Разложение рациональных дробей на простейшие	238
45. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций	243
46. Определенный интеграл, его свойства	245
47. Формула Ньютона–Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов	251
48. Геометрические и механические приложения определенного интеграла	254
49. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства. Признаки сходимости несобственных интегралов. Понятие сингулярных интегралов	257
V. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	269
50. Пространство R^n . Множества в R^n : открытые, замкнутые, ограниченные, линейно связные, выпуклые. Компактность. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции. Промежуточные значения непрерывных функций на линейно связных множествах	269
51. Частные производные. Дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы дифференциала. Геометрический смысл частных производных и дифференциала. Производная по направлению. Градиент	273
52. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора (с остаточным членом в форме Лагранжа)	283
53. Отображение множеств из пространства R^n в пространство R^m . Непрерывные и дифференцируемые отображения	289
54. Неявные функции. Теоремы существования. Дифференцирование неявных функций	291
55. Функциональные определители. Условия независимости системы функций	298

56. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума.....	305
57. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.....	309
VI. Числовые и функциональные ряды	313
58. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Критерий Коши. Действия с рядами	313
59. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости. Неравенства Гельдера и Минковского	316
60. Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов	325
61. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса	330
62. Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность суммы ряда, почленное дифференцирование и интегрирование	334
63. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложение рядов	338
Литература.....	348

Введение

Книга состоит из трех частей, рассчитана на студентов вузов и имеет весьма доступный характер. Так в *первой главе*, посвященной вопросам аналитической геометрии и линейной алгебры, вводятся понятия векторов, линейные операции над ними и основные их характеристики. Делается главное замечание — о разности понятий координат вектора и координат точки. Определяются три важных вида произведений — скалярное, векторное и их композиция — смешанное произведение.

В этой связи в достаточно наглядной форме даются понятия определителей второго и третьего порядков, которые помогают вывести координатные выражения векторного и смешанного произведения.

Представлены различные определения прямой на плоскости, в пространстве, собственно плоскости, и выводятся различные геометрические характеристики, описывающие взаимное их расположение друг относительно друга.

Хотелось бы отметить, что в изложении кривых и поверхностей второго порядка (соответственно, на плоскости и в пространстве), несмотря на обилие материала, автор старался не загромождать излишней сложностью.

Особое место занимают методы решений систем линейных уравнений n -го порядка методом Гаусса и по правилу Крамера. Они позволяют подойти к понятию определителя n -го порядка более естественным образом.

Вводится фундаментальное понятие линейного пространства, которое естественным образом обобщает понятие пространства векторного. В данном пространстве становится привычным иметь дело с линейно зависимыми или независимыми системами векторов. Следующим шагом является введение линейного оператора в линейном пространстве. Такие операторы теперь могут осуществлять преобразования линейного пространства. Обсуждаются различные свойства построенных линейных операторов.

В дальнейшем изложение приводит к понятию билинейной формы (функции), которая действует на теоретико-множественном произведении линейного пространства на себя.

Введение понятия евклидова пространства позволяет вывести основное неравенство Коши–Буняковского, которое широко применяется не только в геометрии, но и в анализе и других разделах естественных наук.

В конце первой главы дается лишь понятие о тензорах и приводятся элементарные примеры тензоров как объектов, в определенном смысле не меняющихся при переходе к другим координатам.

Вторая глава является достаточно кратким введением в математический анализ. Приведенные там понятия мы еще помним хотя бы умозрительно из курса средней школы — непрерывность, дифференцируемость, точки максимума и минимума и т. д. Главное же состоит в том, что в данной главе приводятся элементы теории множеств, без знания которых дальнейшее изучение математических разделов становится невозможным. Все это приводит к необходимому осознанию понятия отображения множеств, а оно, в свою очередь, — к понятию функции.

В школьном курсе, как правило, не вводится понятие комплексного числа, что происходит в дальнейшем во второй главе. Обсуждаются элементарные свойства комплексных чисел. Более подробно анализ комплексных отображений будет построен в двенадцатой главе.

И вот затем после введения понятия последовательности чисел, становятся естественными и непрерывность, и дифференцируемость функции в точке и на каком-либо множестве.

Третья глава посвящена дифференциальному исчислению функции одной переменной: вводится строгое определение дифференцируемой функции в точке. И главное, на что сделан упор — геометрический смысл производной. Уже здесь о дифференциале говорится, как о линейном отображении. Доказываются классические теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, Лопиталья.

Венцом дифференциального исчисления функций одной переменной является формула Тейлора, которая, на взгляд автора, изложена достаточно подробно и просто.

Интегральному исчислению функций одной переменной посвящена *глава четвертая*. Вводится понятие неопределенного интеграла, обсуждаются его свойства. В целях дальнейшего конструктивного использования неопределенного интеграла приводится таблица первообразных основных элементарных функций.

Для вычисления первообразных от многочленов или рациональных функций последние необходимо уметь раскладывать на простейшие дроби, чему и посвящена часть материала четвертой главы.

Основной формулой интегрального исчисления функций одной переменной является формула Ньютона–Лейбница, которой посвящено достаточно места в данной главе. Становится естественным после этого объяснить, как вычислять площади и объемы различных фигур.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами или от неограниченных функций, их основные свойства изучаются в заключении главы. Обсуждаются признаки сходимости таких несобственных интегралов. Дается определение сингулярного интеграла.

Дифференциальному исчислению функций нескольких переменных посвящена *глава пятая*. Для этого сначала необходимо изучить многие геометрические и топологические понятия многомерного пространства R^n . После всего этого становится нетрудной задачей определить функции многих переменных, их непрерывность, дифференцируемость, доказать аналоги классических теорем.

Как показано, ключевым отличием функций одной переменной от функций многих переменных с точки зрения дифферен-

цируемости является неэквивалентность их дифференцируемости наличию у них частных производных.

Опять же, важнейшей формулой в данном разделе является формула Тейлора для функций многих переменных, для вывода которой приходится сталкиваться с производными высших порядков.

Некоторые элементы теории дифференцируемых отображений многомерных пространств также обсуждаются в пятой главе.

Теорема о неявной функции, которая хоть и доказывается для простейшего случая, на взгляд автора, излагается достаточно подробно. Метод множителей Лагранжа для определения условного экстремума является одним из важных приложений теории о неявной функции, поскольку такой экстремум приходится находить во многих задачах естествознания.

Шестая глава посвящена одному из самых важных разделов анализа — теории числовых, или более общо, функциональных рядов. Дается определение числового ряда, изучаются различные его свойства. Приводятся необходимые и достаточные условия сходимости рядов различных типов.

Числовые ряды в дальнейшем естественным образом обобщаются на ряды функциональные, теория которых является базовой для построения, например, гармонического анализа, а свойство равномерной сходимости — ключевое свойство в теории функциональных рядов.

1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение

Ограничимся следующим определением вектора, в данном случае пока как наглядного объекта.

Направленным отрезком называется упорядоченная пара точек P и Q пространства. Первая из двух точек называется *началом* направленного отрезка, а вторая — его *концом*.

Определение 1.1. *Вектором* называется направленный отрезок. Вектор обозначается либо $\vec{AB}$, где A и B , соответственно, — начало (*точка приложения*) и конец данного направленного отрезка, либо (иногда жирной) латинской буквой, например $\mathbf{a}$.

Длина вектора помечается вертикальными линиями: $a = |\mathbf{a}|$ или $|\vec{AB}|$.

Определение 1.2. Если начало и конец вектора совпадают, то вектор называется *нулевым* (т.е. когда $A = B$).

Несмотря на простоту, нулевой вектор играет важную роль в теории векторных пространств (см. далее).

Определение 1.3. Два вектора $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ называются *равными*, если выполнено одно из следующих условий:

1) $A = B$ и $C = D$.
2) $A \neq B$; точки C и D принадлежат прямой AB , причем $|\vec{CD}| = |\vec{AB}|$ и лучи AB и CD одинаково направлены (т.е. один из них содержится в другом).

3) A, B, C, D — четыре различные точки, никакие три из которых не принадлежат одной прямой; прямые AB и CD параллель-

ны, и прямая AC параллельна прямой BD . Равенство векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ записывается так: $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Отметим следующие свойства отношения равенства « $=$ » между векторами.

- 1) $\vec{AB} = \vec{AB}$ (*рефлексивность* отношения « $=$ »).
- 2) Если $\vec{AB} = \vec{CD}$, то $\vec{CD} = \vec{AB}$ (*симметричность* отношения « $=$ »).
- 3) Если $\vec{AB} = \vec{CD}$ и $\vec{CD} = \vec{EF}$, то $\vec{EF} = \vec{AB}$ (*транзитивность* отношения « $=$ »).

Совокупность свойств 1)–3) (в частности, для отношения « $=$ ») формулируется как «отношение « $=$ » есть *отношение эквивалентности*».

- 4) Если $\vec{AB} = \vec{CD}$, то $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$.

- 5) Для любых трех точек A , B и C существует единственная точка D такая, что $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Рассмотрим теперь вектор $\vec{AB}$ и обозначим через $\mathbf{a}$ его класс эквивалентности — множество всех векторов, равных вектору $\vec{AB}$. Если вектор $\vec{CD}$ принадлежит $\mathbf{a}$, т.е. если $\vec{CD} = \vec{AB}$, то каждый вектор из $\mathbf{a}$ равен вектору $\vec{CD}$, и все векторы, равные вектору $\vec{CD}$, принадлежат $\mathbf{a}$. Видно, что $\mathbf{a}$ будет также классом эквивалентности, порожденным вектором $\vec{CD}$.

Данный класс эквивалентности $\mathbf{a}$ представляет собой некоторый новый математический объект, который мы назовем *свободным вектором*, порожденным каждым из равных между собой векторов $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ и т.д., составляющих данный класс.

Определение 1.4. Несколько векторов называются *коллинеарными* (соответственно, *компланарными*) между собой, если все они, будучи приложенными к одной и той же точке, оказываются лежащими на одной прямой (соответственно, в одной плоскости).

При этом говорят, что рассматриваемые векторы коллинеарны данной прямой (компланарны данной плоскости).

Коллинеарность (компланарность) нужна для того, чтобы в дальнейшем попытаться определить декартову систему координат на плоскости (в пространстве).

С векторами можно производить следующие *линейные операции*, а именно:

1) *сложение* векторов;

для этого рассмотрим свободные векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Приложим вектор $\mathbf{a}_1$ к какой-нибудь точке O и получим $\mathbf{a}_1 = \vec{OA}$. Затем приложим вектор $\mathbf{a}_2$ к точке A и получим $\mathbf{a}_2 = \vec{AB}$. По определению, вектор $\vec{OB} = \mathbf{a}_3$ называется *суммой* векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, т.е. $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$;

2) *вычитание* векторов;

если дан вектор $\mathbf{a} = \vec{OA}$, обозначим через $-\mathbf{a}$ свободный вектор, порожденный вектором $\vec{AO}$ (он называется вектором, *противоположным* вектору $\mathbf{a}$). Тогда свободный вектор $\mathbf{a} + (-\mathbf{a})$ представляется вектором $\vec{OO}$ и, значит, равен нулевому вектору $\mathbf{0}$. *Разностью* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$;

3) *умножение* векторов на действительное число λ ;

результат умножения (произведение) является вектором и обозначается через $\lambda\mathbf{a}$. Если $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\lambda > 0$, то выберем точку A , вектор $\mathbf{a} = \vec{AB}$, приложенный к точке A , и такую точку C , которая лежит на луче AB , при этом $|\vec{AC}| = \lambda |\vec{AB}|$. Тогда $\lambda\mathbf{a}$ — свободный вектор, порожденный вектором $\vec{AC}$. Если же $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\lambda < 0$, то положим $\lambda\mathbf{a} = -((-\lambda)\mathbf{a})$.

Наконец, положим *по определению* для любого вектора $\mathbf{a}$ и для любого числа λ :

$$0 \mathbf{a} = \mathbf{0}, \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad (1.1)$$

Следует сразу же заметить, что не все упомянутые операции над векторами не независимы. Например, вторая операция следует из первой и третьей, поскольку вычесть из вектора другой вектор означает прибавить к первому второй вектор, умноженный на -1 .

Подытожим сказанное.

Определение 1.5. Суммой двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$, который идет из начала вектора $\mathbf{a}$ в конец вектора $\mathbf{b}$, при условии, что вектор $\mathbf{b}$ приложен к концу вектора $\mathbf{a}$.

Определение 1.6. Разностью двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется такой вектор $\mathbf{c}$, который в сумме с вектором $\mathbf{b}$ дает вектор $\mathbf{a}$.

Определение 1.7. Произведением вектора $\mathbf{a}$ на вещественное число λ называется такой вектор $\mathbf{b}$, что он:

- 1) коллинеарен вектору $\mathbf{a}$;
- 2) имеет длину, равную $|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$;
- 3) в случае $\lambda = 0$ является нулевым вектором;
- 4) в случае $\lambda > 0$ направлен одинаково с вектором $\mathbf{a}$;
- 5) в случае $\lambda < 0$ направлен противоположно вектору $\mathbf{a}$.

После введения операции умножения на действительное число возможно *деформировать* векторы *вдоль* их направления (растягивать и сжимать).

Замечание 1. Сложение векторов обладает следующими свойствами:

1) Для любых двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ существует единственный вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, называемый суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

2) Для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выполнено равенство: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (*коммутативность сложения*).

3) Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выполнено равенство: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (*ассоциативность сложения*).

4) Существует единственный нулевой вектор $\mathbf{0}$ такой, что $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ для всех векторов $\mathbf{a}$.

5) Для любого вектора $\mathbf{a}$ существует единственный противоположный вектор $-\mathbf{a}$ такой, что $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Замечание 2. Умножение вектора на число обладает следующими свойствами:

1) Для любого вектора $\mathbf{a}$ и любого числа λ существует и единственен вектор $\lambda\mathbf{a}$.

2) $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a}$ для любых чисел λ_1 и λ_2 и всех векторов $\mathbf{a}$.

3) $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{a})$ для любых чисел λ_1 и λ_2 и всех векторов $\mathbf{a}$.

4) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и любого числа λ .

5) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ для любого вектора $\mathbf{a}$.

Выражение

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — векторы, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — какие-нибудь (вещественные) числа, называется *линейной комбинацией векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Пусть на прямой дан вектор единичной длины (*единичный вектор*), а его направление объявлено за положительное на всей данной прямой, тогда говорят, что данная прямая превращена в *ось* (т.е. ось есть прямая, на которой выбрана единица измерения длин, и одно из двух направлений названо *положительным*).

Отношение длины любого вектора $\vec{AB}$ на данной оси к длине единичного вектора (взятого со знаком, в зависимости от положительности или отрицательности направления данного вектора) на этой оси называется *алгебраическим значением*, или *координатой вектора* $\vec{AB}$ на данной оси.

Обозначение: (AB) .

Замечания. 1) Два вектора на данной прямой равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

2) Если два вектора имеют одну и ту же длину, но противоположны по направлению, то их алгебраические значения имеют один и тот же модуль, но противоположны по знаку: $(AB) + (BA) = 0$.

3) Координата единичного вектора равна 1.

4) При любом расположении точек A, B и C на оси имеет место следующее числовое равенство: $(AB) + (BC) = (AC)$.

Свойство 4) носит название *леммы Шаля*. Для ее доказательства достаточно перебрать все возможные варианты (что предоставляется читателю для закрепления материала).

Следующее определение использует понятие *проектирования вдоль некоторой прямой* на плоскости на некоторую ось, лежащей в этой же плоскости и пересекающей данную прямую. Для простоты прямая, вдоль которой осуществляется проектирование, взята перпендикулярной к оси.

Определение 1.8.1. Пусть у нас есть вектор $\vec{AB}$ и некоторая ось $\vec{x}$, лежащие в одной плоскости. Опускаем из точек A и B

перпендикуляры на эту ось. Обозначим их основания A_1 и B_1 соответственно. (Перпендикулярной, или ортогональной) *проекцией вектора $\vec{AB}$ на ось $\vec{x}$* называется вектор $\vec{A_1B_1}$. При этом, в частности, если вектор $\vec{AB}$ перпендикулярен к оси $\vec{x}$, то проекция является нулевой.

Главный вывод, который теперь можно сделать, это то, что любые проекции векторов по-прежнему являются векторами.

Замечания. 1) Проекция любого вектора на две параллельные прямые (плоскости) равны между собой.

2) Проекция любых двух равных векторов равны.

3) Проекция суммы любых двух (или более) векторов есть сумма проекций этих векторов.

Для доказательства свойства 3) достаточно перебрать все случаи (сонаправленность проекций единичному вектору оси или противоположная их направленность этому вектору).

В пространственном случае столь же естественным образом возникает понятие перпендикулярной проекции вектора $\vec{AB}$ на ось $\vec{x}$ (хотя аналогичным образом можно дать определение и проекции вектора на ось вдоль любой плоскости, пересекающей ось $\vec{x}$).

Определение 1.8.2. Пусть у нас есть вектор $\vec{AB}$ и некоторая ось $\vec{x}$, лежащие в пространстве. Опускаем из точки A перпендикуляр l на эту ось и обозначим полученную проекцию через A_1 . Переносим вдоль прямой l параллельным образом вектор $\vec{AB}$ в вектор $\vec{A_1B_2}$. Теперь (перпендикулярной) *проекцией вектора $\vec{AB}$ на ось $\vec{x}$* называется (перпендикулярная) проекция перенесенного вектора $\vec{A_1B_2}$ на ось $\vec{x}$. При этом, в частности, если перенесенный вектор перпендикулярен к оси $\vec{x}$, то проекция является нулевой.

Заметим, что определить проекцию вектора в пространстве на ось можно, дословно повторив определение 1.8.1 (разница в том, что ось и перпендикуляры к ней уже не лежат, вообще говоря, в одной плоскости). Доказательство эквивалентности определений 1.8.1 и 1.8.2 оставляем читателю в качестве упражнения.

Следующее определение введено Р. Декартом в средние века. Оно касается однозначного описания местоположения конца вектора в пространстве.

Определение 1.9. *Декартовой прямоугольной системой координат* в (трехмерном) пространстве называются три взаимно перпендикулярные оси с общим началом O . Эти оси обычно обозначают через Ox (ось абсцисс), Oy (ось ординат) и Oz (ось аппликат).

Проекциями точки M на систему декартовых координат $Oxyz$ называется тройка алгебраических значений проекций вектора $\vec{OM}$ на оси Ox , Oy , Oz , соответственно (рис. 1.1).

Пусть M_1 , M_2 , M_3 — проекции точки M (трехмерного) пространства на оси Ox , Oy и Oz соответственно. Тогда проекциями точки M на систему координат $Oxyz$ являются алгебраические значения векторов $\vec{OM}_1$, $\vec{OM}_2$, $\vec{OM}_3$ соответственно на осях Ox , Oy , Oz .

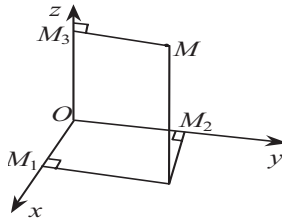


Рис. 1.1

Определение 1.10. *Декартовыми прямоугольными координатами точки M* называются проекции точки M на данную декартову систему координат.

Определение 1.11. *Декартовыми прямоугольными координатами вектора $\vec{AB}$* называются координаты точки M — конца вектора $\vec{OM}$, полученного после приложения вектора $\vec{AB}$ к началу координат.

Таким образом, координаты вектора, приложенного в какой-либо точке трехмерного пространства, измеряются только после перенесения его в начало координат, причем равные векторы имеют одинаковые координаты, так что можно говорить о коор-

динатах свободного вектора. Координаты же точки в данной системе координат — это как раз алгебраические значения проекций вектора, соединяющего начало координат и данную точку.

Заметим, что если (x_1, y_1, z_1) — координаты точки A , а (x_2, y_2, z_2) — координаты точки B , то координаты вектора $\vec{AB}$ суть $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Координаты точки обычно обозначаются в круглых скобках, а координаты вектора — либо в круглых, либо в фигурных скобках.

Важнейшим свойством декартовых координат (свободных) векторов является их линейность: если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют координаты $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\{x_2, y_2, z_2\}$ соответственно, то сумма $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ имеет координаты $\{x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1\}$, а произведение $\lambda \mathbf{a}$ (где λ — любое число) — координаты $\{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$.

В дальнейшем на множествах векторов удобно ввести три ключевых понятия произведений: скалярное, векторное и смешанное, которые, в свою очередь, тесно взаимосвязаны друг с другом.

Определение 1.12. *Скалярным произведением (ненулевых) векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется следующее действительное число:*

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (1.3)$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (т.е. наименьший угол при вращении вектора $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$ после приложения их к одной точке).

Если один из векторов является нулевым, то скалярное произведение считается по определению равным нулю.

Обозначение: или $\mathbf{ab}$, или $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Здесь возникло понятие угла «между» векторами. Существует также понятие угла «от» вектора «до» вектора, которое, в принципе, связано с введенным только что понятием, но нам оно пока не потребуется.

Теорема 1.2. Два ненулевых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Доказательство. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны, то косинус угла φ между ними равен нулю: $\cos \varphi = 0$, а значит, $\mathbf{ab} = 0$.

Пусть $\mathbf{ab} = 0$. Исключив тривиальный случай равенства нулю хотя бы одного из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, получим, что $|\mathbf{a}| > 0$, $|\mathbf{b}| > 0$, а поэтому из того, что $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi = 0$, вытекает, что $\cos \varphi = 0$, т.е. векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны. Теорема доказана.

Скалярное произведение двух векторов обладает следующими четырьмя алгебраическими свойствами:

1. $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ (симметричность);
2. $(\lambda \mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab})$, λ — действительное число;
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$;
4. $\mathbf{aa} \geq 0$, причем $\mathbf{aa} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (невыврожденность).

Замечание (второе доказательство классической теоремы Пифагора). Поскольку справедливо векторное равенство

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}, \quad (1.4)$$

где $\vec{AB}$ — вектор, лежащий на гипотенузе, $\vec{AC}, \vec{CB}$ — векторы, лежащие на катетах, то квадрат гипотенузы c прямоугольного треугольника найдется из следующей формулы:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AB} &= c^2 = (\vec{AC} + \vec{CB}) \cdot (\vec{AC} + \vec{CB}) = \\ &= \vec{AC} \cdot \vec{AC} + \vec{CB} \cdot \vec{CB} + 2 \vec{AC} \cdot \vec{CB}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Последнее слагаемое равно нулю, поскольку катеты $\vec{AC}$ и $\vec{CB}$ перпендикулярны. Таким образом, квадрат гипотенузы равен $a^2 + b^2$, где a и b — длины катетов.

Теорема 1.3. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами в системе $Oxyz$ следующим образом: $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\mathbf{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (1.6)$$

В данной теореме исключительно важен факт декартовости системы координат, у которой оси взаимно перпендикулярны.

Определение 1.13. *Тройкой базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (базисом) в трехмерном пространстве, соответствующей декартовой системе координат $Oxyz$, называется тройка векторов единичной длины, направленных, соответственно, по осям Ox, Oy, Oz .*

Доказательство теоремы 1.3. Запишем разложение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ следующим образом:

$$\mathbf{a} = x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{b} = x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + z_2 \mathbf{e}_3. \quad (1.7)$$

Тогда, пользуясь свойствами скалярного произведения векторов, оно равно

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} = & x_1 x_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + x_1 y_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + x_1 z_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + y_1 x_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \\ & + y_1 y_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + y_1 z_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + z_1 x_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + z_1 y_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + z_1 z_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 &= 1, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 0, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = 0, \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 &= 0, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = 1, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = 0, \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 &= 0, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 = 0, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = 1, \end{aligned} \quad (1.9)$$

получим равенство (1.6). Теорема доказана.

Задача из исторического прошлого (во всех подобных задачах встречаются обороты из старого русского языка).

Капитал, число рублей которого представляется произведением корней системы уравнений

$$\frac{5}{x} + \frac{9}{y} = 0,2$$

$$x + y = 0,03(1)xy,$$

отдан в рост, а по истечении года, присоединив наросшие процентные деньги к капиталу, образовавшуюся сумму опять отдано в рост по той же таксе. По сколько процентов был отдан капитал, если по прошествии второго года выручено всего столько рублей, сколько единиц в выражении:

$$\frac{a^4 b^8 + a^3 b^9 + a^{12} b^{10}}{a^3 - b^3} \div \frac{ac + bc}{a^2 - b^2},$$

где $a=2$, $b=3$, $c=5$.

Ответ. 8%.

**2. Векторное и смешанное произведение векторов,
их основные свойства и геометрический смысл.
Определители второго и третьего порядка. Координатное
выражение векторного и смешанного произведения**

Для начала несколько перефразируем определение 1.4.

Определение 2.1. Векторы находящиеся в трехмерном пространстве, лежащие либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях, называются *компланарными*.

Векторы, лежащие в плоскости и не являющиеся коллинеарными, являются в некотором смысле частным случаем компланарных векторов. Действительно, не коллинеарные векторы плоскости, и только они, не могут быть взяты за пару векторов, по которым раскладывается любой вектор данной плоскости. Аналогичное утверждение (только в трехмерном пространстве) можно сформулировать и для не компланарных векторов.

Определение 2.2. Тройка векторов называется *упорядоченной*, если указано, какой из этих векторов является первым, какой является вторым, а какой — третьим.

Возможная запись упорядоченной тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ такова: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Определение 2.3. Упорядоченная тройка $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ некопланарных векторов, приложенных к одной точке, называется *правой (левой)*, если, находясь на конце вектора $\mathbf{c}$, кратчайший поворот вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ в их плоскости виден против (по) часовой стрелки(е).

Очевидно, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ — правая тройка векторов тогда и только тогда, когда $(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a})$ и $(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ — правые тройки.

Определение 2.4. Если две тройки векторов обе правые или обе левые, то говорят, что эти две тройки *одной ориентации*. Иначе говорят, что эти две тройки *противоположной ориентации*.

В математике при этом часто говорят, что все правые (левые) тройки векторов образуют отдельное множество по отношению к ориентации пространства.

Выше было введено скалярное произведение векторов. Введем далее вторую важную операцию на множестве упорядоченных пар векторов.

Определение 2.5. *Векторным произведением* вектора $\mathbf{a}$ и вектора $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$ такой, что:

- 1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
- 2) вектор $\mathbf{c}$ ортогонален и к вектору $\mathbf{a}$, и к вектору $\mathbf{b}$;
- 3) вектор $\mathbf{c}$ (если он ненулевой) имеет такое направление, что тройка $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ является правой.

Угол между упорядоченной парой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на плоскости (или угол от вектора $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$) определяется так. Перенесем эти векторы в одну точку. Тогда определяемый угол отсчитывается от вектора $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$ *против* часовой стрелки (можно, конечно, отсчитывать данный угол и *по* часовой стрелке, только после этого необходимо его взять со знаком « $\rightarrow$ »).

Обозначается вектор $\mathbf{c}$ как $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Теорема 2.1. Два ненулевых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ равно нулевому вектору: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Доказательство. Необходимость. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то $\sin \varphi = 0$, а значит, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$, по определению векторного произведения.

Пусть векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ равно нулевому вектору. Исключив тривиальный случай, когда хотя бы один из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен нулю, мы получим, что $\sin \varphi = 0$, т.е. векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Длина векторного произведения $|\mathbf{a}, \mathbf{b}|$ равняется площади параллелограмма, построенного (натянутого) на векторах(ы) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, предварительно приведенных к общему началу.

Доказательство следует из определения векторного произведения. Действительно, площадь параллелограмма со сторонами, заданными векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, вычисляется по правилу, записанному в свойстве 1).

Введем, наконец, третью важную операцию на множестве упорядоченных троек векторов.

Определение 2.6. *Смешанным произведением* упорядоченной тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется величина, равная скалярному произведению от векторного произведения $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ на вектор $\mathbf{c}$.

Обозначение: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}$.

Таким образом, все три введенные операции тесно взаимосвязаны между собой.

Теорема 2.3. Смешанное произведение упорядоченной тройки векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, приведенных к общему началу, взятому со знаком «+», если тройка $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ — правая, и со знаком «−», если тройка $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ — левая.

Доказательство. Объем параллелепипеда, построенного на тройке векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ длин a , b , c , соответственно, равен произведению площади параллелограмма (основания), построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, на высоту, опущенную на плоскость векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Площадь основания равна длине векторного произведения $|\mathbf{a}, \mathbf{b}|$. А высота может быть вычислена по формуле $|c|\cos\varphi$, где φ — угол между перпендикуляром к основанию и вектором $\mathbf{c}$. Поскольку вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярен основанию, а тройка $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ — правая, то угол между $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $\mathbf{c}$ острый в случае правой тройки векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ и тупой — в случае левой. Тем самым объем параллелепипеда с указанным знаком равен скалярному произведению $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$. Теорема доказана.

Очевидно, что если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Действительно, вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярен плоскости, в которой лежит тройка рассматриваемых векторов, в том числе и вектору $\mathbf{c}$.

Следствие 1. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\mathbf{c} = \mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

Доказательство. По свойству симметричности скалярного произведения $\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{a}$, а значит, нам достаточно доказать, что $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\mathbf{c} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{a}$.

В силу теоремы 2.3 это равенство очевидно с точностью до знака. Но в силу того, что тройки $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ и $(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a})$ имеют одинаковую ориентацию, то и знаки правой и левой части совпадают. Следствие доказано.

Таким образом, можно переставлять векторы в смешанном произведении, лишь бы тройки векторов были одинаковой ориентации.

Следствие 2. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Необходимо отметить, что следствие 2 аналогично теореме 2.1.

Доказательство следствия 2. Если три вектора компланарны, то, в силу теоремы 2.3, их смешанное произведение равно нулю.

Обратно (приведем наглядные рассуждения): если смешанное произведение трех векторов равно нулю, то они компланарны (если бы они были некомпланарны, то их смешанное произведение, в силу теоремы 2.3, было бы равно отличному от нуля объему параллелепипеда).

Отметим важные алгебраические свойства векторного произведения:

- 1) $[a, b] = -[b, a]$ (кососимметричность);
- 2) $[(\lambda a), b] = \lambda[a, b]$ и
- 3) $[(a + b), c] = [a, c] + [b, c]$ (два свойства линейности);
- 4) $[a, a] = 0$ для любого вектора a (следствие свойства 1).

Все три введенные операции на упорядоченных парах или тройках векторов можно удачно описать через векторные координаты, в результате чего появляется удобный аппарат из алгебры матриц.

Определение 2.7. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел из m строк и n столбцов. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной порядка n* (или m).

Рассмотрим для начала квадратную матрицу порядка 2:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = A. \quad (2.1)$$

Определение 2.8. *Определителем* матрицы A второго порядка называется число $a_1b_2 - a_2b_1$.

Обозначается определитель так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \quad (2.2)$$

Другими словами, определитель второго порядка вычисляется по правилу «крест-накрест».

Рассмотрим теперь квадратную матрицу B порядка 3:

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Определение 2.9. *Определителем* матрицы B третьего порядка называется число $|B| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1$.

Видно, что при вычислении определителя третьего порядка каждое из шести слагаемых берется в зависимости от знака перестановки трех индексов чисел 1, 2, 3: со знаком «+», если перестановка «правильная», и со знаком «-», если она «неправильная». Напомним, что перестановка упорядоченной тройки чисел *правильная*, если, начиная с любого числа из указанной тройки, два других числа следуют друг за другом циклически. Так, в случае упорядоченной тройки чисел 1, 2, 3 имеется три правильные перестановки: (1 2 3), (2 3 1) и (3 1 2).

Теорема 2.4. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами в системе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ следующим образом:

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2). \quad (2.4)$$

Тогда их векторное произведение равно вектору с координатами

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (2.5)$$

Доказательство. Будем выводить формулу (2.5), которую удобно переписать в следующем виде (ср. с определением 2.9):

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Учитывая то, что базисные векторы взаимно ортогональны, имеют единичную длину и образуют правую тройку, мы можем записать следующее:

$$\begin{aligned} [e_1, e_1] &= 0; [e_1, e_2] = e_3; [e_1, e_3] = -e_2; \\ [e_2, e_1] &= -e_3; [e_2, e_2] = 0; [e_2, e_3] = e_1; \quad (2.7) \\ [e_3, e_1] &= e_2; [e_3, e_2] = -e_1; [e_3, e_3] = 0. \end{aligned}$$

Учитывая то, что $a = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3$, $b = x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3$, и используя свойства векторного произведения, мы имеем:

$$\begin{aligned} [a, b] &= x_1x_2[e_1, e_1] + x_1y_2[e_1, e_2] + z_2[e_1, e_3] + y_1x_2[e_2, e_1] + y_1y_2[e_2, e_2] \\ &\quad + y_1z_2[e_2, e_3] + z_1x_2[e_3, e_1] + z_1y_2[e_3, e_2] + z_1z_2[e_3, e_3] = \\ &= (y_1z_2 - y_2z_1)e_1 + (z_1x_2 - z_2x_1)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2.5. Если заданы три вектора в системе координат *Охуз* так, что $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$, $c = (x_3, y_3, z_3)$, то смешанное произведение можно вычислить по следующей формуле:

$$(a, b, c) = [a, b]c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

Доказательство. Если $[a, b] = Ae_1 + Be_2 + Ce_3$, то, в силу теоремы 2.4,

$$\begin{aligned} [a, b]c &= Ax_3 + By_3 + Cz_3 = \\ &= x_3(y_1z_2 - y_2z_1) + y_3(x_2z_1 - x_1z_2) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned}$$

Это выражение совпадает со значением определителя из условия теоремы. Теорема доказана.

Теперь, зная координаты векторов в какой-нибудь системе координат на плоскости или в трехмерном пространстве, мы можем с помощью методов алгебры матриц вычислить любую из трех приведенных выше важных операций над упорядоченными парами и тройками векторов.

Задача из исторического прошлого.

Некто купил полотна на столько рублей, сколько единиц в выражении

$$\sqrt{x^4 - 14x^3 + 73x^2 - 168x + 144},$$

когда в нем на место x подставить корень уравнения:

$$3x - \frac{18x}{x-1} = 0.$$

Оставив себе 14 ариш., остальное продали за 9,1 руб., получив на каждом аришине 5 копеек прибыли. Сколько аришин полотна он купил?

Ответ. 40 ариш.

3. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой

Общим уравнением прямой на плоскости Oxy (т.е. уравнением, определяющим прямую как геометрическое место точек на плоскости) называется уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.1)$$

где хотя бы одна из постоянных A или B отлична от нуля.

Это значит, что любая прямая на плоскости может быть задана таким уравнением. Верно и обратное: любое подобное уравнение задает прямую на плоскости Oxy .

Покажем корректность данного определения. В самом деле, если прямая на плоскости определяется уравнением первой степени в какой-то одной декартовой системе координат, то она будет определяться уравнением первой степени и при любом другом выборе декартовой прямоугольной системы координат на плоскости. Направляющий вектор прямой при преобразовании декартовых координат изменит, вообще говоря, свои координаты, но все равно останется направляющим вектором.

Для закрепления данного материала построим следующую специальную систему координат. Для этого ось Ox направим вдоль прямой, а ось Oy — перпендикулярно к ней. Тогда уравнением прямой будет уравнение первой степени $y = 0$. Обратно, покажем, что если фиксирована произвольная декартова прямо-

угольная система координат Oxy и задано уравнение первой степени $Ax + By + C = 0$, в котором хотя бы одна из постоянных A, B отлична от нуля, то это уравнение определяет в этой системе именно прямую линию.

Уравнение $Ax + By + C = 0$ всегда имеет хотя бы одно решение x_0, y_0 (если, например, $A \neq 0$, то, взяв любое y_0 , имеем: $x_0 = -\frac{B}{A}y_0 - \frac{C}{A}$). Это значит, что выполняется тождество $Ax_0 + By_0 + C = 0$.

Уравнения называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же множество решений (в том числе и пустое множество).

Вычтем уравнение $Ax_0 + By_0 + C = 0$ из нашего общего уравнения (3.1) и получим уравнение, эквивалентное исходному:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (3.2)$$

Видно, что это уравнение эквивалентно «общему виду» уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ при $C = -Ax_0 - By_0$.

Покажем, что уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ на плоскости Oxy определяет прямую, проходящую через точку M_0 с координатами (x_0, y_0) и перпендикулярную вектору $\mathbf{n} = \{A, B\}$.

Отметим, что для координат точек записи $M(x, y)$ и $M = (x, y)$ считаются эквивалентными.

Итак, если точка M с координатами (x, y) лежит на указанной прямой, то векторы $\mathbf{n} = \{A, B\}$ и $\vec{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ ортогональны, поскольку, их скалярное произведение равно нулю:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Если же точка $M(x, y)$ не принадлежит данной прямой, то ее координаты не удовлетворяют последнему уравнению, и тем самым векторы $\mathbf{n}$ и $\vec{M_0M}$ не ортогональны, так как их скалярное произведение $A(x - x_0) + B(y - y_0)$ не равно нулю.

Определение 3.1. Вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$ называется вектором, *нормальным* к прямой, задаваемой уравнением $Ax + By + C = 0$.

Определение 3.2. Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ называется *полным* (*типичным*), если и A , и B , и C одновременно отличны от нуля.

Необходимо отметить, что данная типичность относительна, поскольку в разных системах координат может быть определена «своя типичность».

Рассмотрим полное уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$ и перепишем его в следующем виде:

$$Ax + By = -C; \quad \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1. \quad (3.3)$$

Положив $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, имеем:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3.4)$$

Последнее уравнение называется *уравнением прямой «в отрезках»*. Оно помогает понять, как получить прямую, проходящую через пару точек $(a, 0)$ и $(0, b)$ на осях координат.

Определение 3.3. Любой отличный от нулевого и параллельный данной прямой вектор будем называть *направляющим вектором* этой прямой.

Очевидно, что, например, в последнем случае направляющий вектор прямой перпендикулярен вектору $\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right\}$.

Попробуем найти уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей заданный направляющий вектор $l = \{a, b\}$ в системе координат Oxy . Ясно, что точка $M(x, y)$ принадлежит данной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\vec{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$ и $l = \{a, b\}$ коллинеарны.

Коллинеарность двух векторов означает пропорциональность их координат, что при $a, b \neq 0$, в свою очередь, влечет соотношение

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}. \quad (3.5)$$

Если же один из коэффициентов a или b равен нулю, то вектор l параллелен одной из осей координат, что значительно упрощает решение поставленной задачи. Уравнение (3.5) при $a = 0$ означает $x = x_1$, а при $b = 0$ — $y = y_1$.

Последнее уравнение и есть искомое уравнение прямой. Его обычно называют *каноническим уравнением*.

Если принять за параметр t величину, стоящую в правой и в левой части уравнения

$$t = \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}, \quad (3.6)$$

так как один из знаменателей a, b отличен от нуля, а соответствующий числитель принимает любые значения, то $-\infty < t < \infty$.

Итак,

$$\begin{cases} x - x_1 = at \\ y - y_1 = bt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases}. \quad (3.7)$$

Заметим, что когда параметр t пробегает числовую прямую, «изображающая» точка с координатами (x, y) «заметает» прямую линию как геометрическое место точек.

Уравнения (3.7) называются параметрическими уравнениями прямой.

Основной геометрической характеристикой расположения прямой в декартовой системе координат является ее угловой коэффициент.

Возьмем любую прямую на плоскости Oxy . Угол α от положительного направления оси абсцисс до данной прямой называется *углом наклона данной прямой к оси Ox* (т.е. это угол от оси Ox до направляющего вектора прямой).

Определение 3.4. $k = \operatorname{tg} \alpha$ называется угловым коэффициентом данной прямой.

Угловой коэффициент корректно определен лишь при $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$.

Угол же — при всех наклонах прямой.

Легко проверить, что если прямая не параллельна оси Oy и имеет направляющий вектор $l = \{a, b\}$, то $k = \frac{b}{a}$.

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k .

Для этого умножим обе части канонического уравнения на b . Получим следующее:

$$k(x - x_1) = y - y_1. \quad (3.8)$$

Если обозначить $b = y_1 - kx_1$, то последнее уравнение примет вид

$$y = kx + b. \quad (3.9)$$

Это уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Впрочем, как указывалось выше, понятие углового коэффициента связано лишь с расположением соответствующей системы координат Oxy на плоскости.

Если две прямые заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad (3.10)$$

то модуль косинуса угла φ между этими двумя прямыми определяется как косинус угла между их нормальными векторами: $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2\}$, то есть через формулу

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad (3.11)$$

поскольку квадрат длины вектора с компонентами $\{\alpha, \beta\}$ в декартовой системе координат равен, очевидно, $\alpha^2 + \beta^2$.

Действительно, угол между прямыми в данном случае равен с точностью до смежного углу между векторами нормали к данным прямым.

Расстояние d от точки M с координатами (x_1, y_1) до прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$, вычисляется по следующей формуле:

$$d = \pm \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.12)$$

Действительно, пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ — точка на прямой, т.е. $Ax_0 +$

$+ By_0 + C = 0$. Тогда расстояние от точки M до прямой равно модулю алгебраического значения проекции вектора $\vec{M_0M}$ на нормаль к прямой с единичным вектором

$$\mathbf{e}_n = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}(A, B),$$

т.е. модулю скалярного произведения

$$\begin{aligned} (\vec{M_0M}, \mathbf{e}_n) &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \{A, B\} (A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}(A, B) (Ax_1 + By_1 + C). \end{aligned}$$

Читателю предлагается доказать, что расстояние между двумя параллельными прямыми, заданными уравнениями $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$ равно

$$\frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Задача из исторического прошлого.

Некто купил три ящика товара: во втором ящике двумя фунтами более, чем в первом, и четырьмя менее, чем в третьем, заплатив за каждый ящик поровну, а именно, столько рублей, сколько единиц в выражении:

$$\frac{a-c}{a^2+ac+c^2} \times \frac{a^3-c^3}{6a^2-6c^2} \times \left(1 + \frac{c}{a-c} - \frac{1+c}{c}\right) + \frac{c(c+1)-a}{6c},$$

где $a=4c$; $c = \frac{1}{10\sqrt[3]{6561}}$. Определить, сколько фунтов товара было в каждом ящике, если известно, что 5 фунтов товара в первом ящике стоят столько же, сколько 4 фунта во втором и 4 фунта в третьем вместе.

Ответ. 6 фун., 8 фун., 12 фун.

4. Прямая и плоскость в пространстве.

Уравнение плоскости и прямой в пространстве.

Угол между плоскостями.

Угол между прямыми.

Угол между прямой и плоскостью

По аналогии с общим уравнением прямой на плоскости введем понятие уравнения плоскости в (трехмерном) пространстве.

Общим уравнением плоскости в пространстве является уравнение первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (4.1)$$

причем коэффициенты A, B, C одновременно не равны нулю. Вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ называется *нормальным вектором к плоскости*.

Действительно, возьмем точку M_1 с координатами (x_1, y_1, z_1) , принадлежащую данной плоскости. Это означает, что

$$Ax_I + By_I + Cz_I + D = 0. \quad (4.2)$$

Вычтем из общего уравнения плоскости последнее уравнение. Получим:

$$A(x - x_I) + B(y - y_I) + C(z - z_I) = 0. \quad (4.3)$$

То есть точка $M = (x, y, z)$ принадлежит плоскости в том и только том случае, если вектор $\vec{M_1M} = \{x - x_I, y - y_I, z - z_I\}$ перпендикулярен вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

Общее уравнение плоскости называется *полным (типичным)*, если все его коэффициенты отличны от нуля.

Понятие типичности уравнения плоскости, впрочем, как и соответствующие понятия для прямой, довольно относительно, поскольку для любой плоскости, лежащей в трехмерном пространстве, существует система координат, в которой уравнение данной плоскости является типичным.

Действительно, для любой плоскости существует вектор нормали к ней. При этом декартову систему координат в пространстве всегда можно выбрать таким образом, чтобы все три координаты вектора нормали в ней были ненулевыми. Свободный же коэффициент D всегда можно сделать ненулевым, сместив систему координат так, чтобы ее начало не лежало на рассматриваемой плоскости.

Аналогично уравнениям прямой, любое полное уравнение плоскости может быть приведено к *уравнению плоскости «в отрезках»* (ср. с (3.4)):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (4.4)$$

Если положить $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$, то, разделив общее (типичное) уравнение плоскости на $D \neq 0$, мы и получим уравнение плоскости «в отрезках».

Уравнение плоскости, проходящей через три разные точки M_1, M_2, M_3 с координатами (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , соответственно, не лежащие на одной прямой, имеет следующий вид (определятеля):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.5)$$

Действительно, раскрыв определитель, имеем уравнение линейного вида на x, y, z . Оно, несомненно, задает уравнение плоскости в трехмерном пространстве с декартовой системой координат. Данная плоскость действительно проходит через точку M_1 , поскольку при подстановке ее координат в определитель последний имеет *первую строку в виде нулей*, что означает равенство самого определителя нулю.

Данная плоскость действительно проходит через две другие точки M_2 и M_3 , поскольку при подстановке их координат в определитель последний имеет *две одинаковые строки*, а поэтому он также равен нулю.

Вычислим в дальнейшем важные геометрические характеристики, такие как линейные и двугранные углы между прямыми и плоскостями.

Угол (двугранный) φ между двумя плоскостями определяется с помощью формулы (ср. с (3.11)):

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \quad (4.6)$$

где плоскости заданы общими уравнениями в некоторой декартовой системе координат:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ и } A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \quad (4.7)$$

соответственно.

Действительно, в силу определения скалярного произведения, косинус угла между (ненулевыми) векторами в трехмерном пространстве в декартовой системе координат задается данной формулой (без модуля). Этот угол, очевидно, и равен с точностью до смежного двугранному углу между плоскостями, каждая из которых перпендикулярна своим векторам нормали $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$, соответственно.

Аналогично плоскому случаю *канонические уравнения прямой*, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ пространства с декартовой системой координат и имеющей направляющий вектор $I = \{a, b, c\}$, записываются следующим образом:

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}. \quad (4.8)$$

Действительно, последнее двойное равенство обеспечивает выполнение свойства коллинеарности двух векторов $\mathbf{l}$ и $\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$. При этом точка с координатами (x, y, z) принадлежит данной прямой.

Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеют следующий вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (4.9)$$

Действительно, последнее двойное равенство обеспечивает выполнение свойства коллинеарности двух векторов $\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$ и $\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$. При этом, конечно, точка с координатами (x, y, z) принадлежит данной прямой.

Параметрические уравнения прямой в трехмерном пространстве с декартовой системой координат имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = x_1 + at; \\ y = y_1 + bt; \\ z = z_1 + ct. \end{cases} \quad (4.10)$$

Действительно, последнюю систему достаточно переписать в виде канонического уравнения прямой (см. (4.8)), после чего обозначить коэффициент пропорциональности между векторами $\{a, b, c\}$ и $\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$ через независимый параметр t , который, пробегая всю числовую ось, «заставляет» заметить «изображающую точку» с координатами (x, y, z) все геометрическое место точек — прямую линию.

Если две (вообще говоря, *скрещивающиеся*) прямые в пространстве с декартовой системой координат заданы каноническими уравнениями с (ненулевыми) направляющими векторами $\{a_1, b_1, c_1\}$ и $\{a_2, b_2, c_2\}$, то (*линейный*) угол φ между этими двумя прямыми, которой с точностью до смежного равен углу между направляющими векторами, в силу определения скалярного произведения, может быть определен по следующей формуле:

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \quad (4.11)$$

Если плоскость задана следующим общим уравнением:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (4.12)$$

а прямая — следующими каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}, \quad (4.13)$$

то угол φ между ними определяется из следующей формулы:

$$\sin \varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (4.14)$$

Действительно, в числителе под модулем стоит скалярное произведение вектора, нормального к плоскости, и направляющего вектора прямой. Поэтому, в силу определения скалярного произведения двух векторов в трехмерном пространстве, последняя формула определяет косинус угла между прямой и нормалью к плоскости. Другими словами, последняя формула определяет синус искомого угла между прямой и самой плоскостью.

Задача из исторического прошлого.

На плоскости расположено несколько точек, и затем эти точки соединены по две отдельными прямыми линиями. Всех таких линий получилось столько, сколько единиц в выражении

$$\frac{(a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)}{a^3 - c^3} \times \frac{a + \frac{a^2}{b-a}}{\frac{b(a+2b)}{b-a} + \frac{b^2}{a-b}},$$

в котором $a = \sqrt[4]{121550625}$. Определить число точек на плоскости.

Ответ. 15.

5. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола.

Поверхности второго порядка

Часто в различных областях естествознания встречаются линии и поверхности на плоскости или в пространстве, геометри-

ческое место точек которых задается различными полиномиальными уравнениями. При возрастании степеней этих полиномов сложность рисования данных линий и поверхностей на плоскости (тем более в пространстве) значительно возрастает. Поэтому в основном для простоты уделим большее внимание полиномиальным кривым и поверхностям достаточно малого порядка — второго.

Определение 5.1. *Кривыми n -го порядка* на плоскости Oxy называются линии, геометрическое место точек которых задается уравнениями вида

$$F_n(x, y) = 0, \quad (5.1)$$

где F_n — многочлен степени n относительно переменных x и y .

Рассмотрим *кривые второго порядка*. Их общее уравнение имеет следующий вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0, \quad (5.2)$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля.

Некоторые коэффициенты данного уравнения могут обращаться в нуль, как, например, в некоторых следующих важных случаях.

Далее сделаем важное замечание. Классическим путем введения понятия таких кривых второго порядка, как *эллипс*, *гипербола* и *парабола*, является обладание данных кривых свойствами соответствующих расстояний (см. далее теоремы 5.1, 5.2, 5.3), а уже потом на основании этого эквивалентный вывод их канонических уравнений. В данном учебнике решено поступить обратным способом: сначала постулировать уравнения, а затем вывести эквивалентным образом из уравнений соответствующие свойства для расстояний. Таким образом, в данном учебнике определения и соответствующие теоремы меняются местами.

Определение 5.2. *Эллипсом* на плоскости называется кривая 2-го порядка, задаваемая в некоторых прямоугольных координатах x, y уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.3)$$

$a \geq b > 0$ (рис. 5.1).

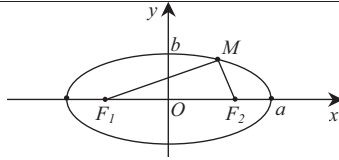


Рис. 5.1

Положительные числа a и b называются *большой и малой полуосьми* эллипса.

Эллипс является результатом равномерной деформации окружности вдоль одного из ее диаметров.

Действительно, если растянуть (сжать) эллипс с полуосьми a и b по оси Ox в $\frac{b}{a}$ раз, то получим из эллипса окружность радиуса b .

Введем важные обозначения:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}; \quad \varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (5.4)$$

Определение 5.3. Точки $F_2(c, 0)$ и $F_1(-c, 0)$ плоскости Oxy называются *фокусами* эллипса, а число ε — *эксцентриситетом* эллипса.

Эксцентриситет характеризует форму эллипса (некоторую меру его сжатия). Эллипс с нулевым эксцентриситетом является окружностью.

Теорема 5.1. Сумма расстояний r_1 и r_2 от любой точки эллипса $M = (x, y)$ до фокусов F_1 и F_2 постоянна:

$$r_1 + r_2 = 2a = \text{const}. \quad (5.5)$$

Отметим, что $r_1 = a - \varepsilon x$, $r_2 = a + \varepsilon x$.

Доказательство. Распишем квадрат расстояния от одного фокуса эллипса до его точки (x, y) :

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x - c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \\ &= x^2 - 2\sqrt{a^2 - b^2}x + (a^2 - b^2) + b^2 - x^2 \frac{b^2}{a^2} = \\ &= a^2 - 2cx + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 = (a - \varepsilon x)^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Квадрат расстояния от другого фокуса до точки может быть вычислен аналогично:

$$r_2^2 = (a + \varepsilon x)^2. \quad (5.7)$$

Теорема вытекает из того факта, что в последних двух равенствах выражения $a + \varepsilon x$ и $a - \varepsilon x$ являются положительными, так как $|x| \leq a$ (в силу (5.3)) и $0 \leq \varepsilon < 1$.

Определение 5.4. Гиперболой на плоскости называется кривая 2-го порядка, задаваемая в некоторых прямоугольных координатах x, y уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.8)$$

$a, b > 0$ (рис. 5.2).

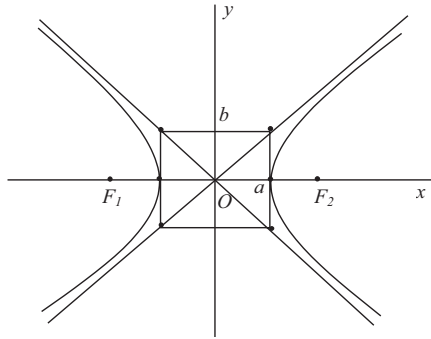


Рис. 5.2

Точки $A(a, 0)$ и $A'(-a, 0)$ плоскости Oxy называются *вершинами* гиперболы. Отрезок $A'A$ называется *действительной осью* гиперболы. Точки $F_2(c', 0)$ и $F_1(-c', 0)$, где $c' = \sqrt{a^2 + b^2}$, называются *фокусами* гиперболы. Отношение

$$\varepsilon = \frac{c'}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \quad (5.9)$$

называется *эксцентриситетом* гиперболы и характеризует форму гиперболы.

Разрешая уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно y , получим:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}. \quad (5.10)$$

При $x \rightarrow \pm\infty$ имеем: $\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \rightarrow 1$, следовательно, при «больших» величинах x величина y ведет себя приблизительно как $y \approx \pm \frac{b}{a} x$.

Определение 5.5. Прямые

$$y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}x \quad (5.11)$$

называются *асимптотами гиперболы*.

Из последних выкладок стало понятно, что при $x \rightarrow \pm\infty$ ветви гиперболы сколь угодно близко приближаются к ее асимптотам.

Теорема 5.2. Модуль разности расстояний r_1 и r_2 от любой точки гиперболы M от фокусов $F_2(c', 0)$ и $F_1(-c', 0)$ постоянен:

$$|r_1 - r_2| = 2a = \text{const}. \quad (5.12)$$

Доказательство. Аналогичным образом распишем квадраты расстояний от одного фокуса гиперболы до ее точки (x, y) (см. теорему 5.1):

$$r_1^2 = (\varepsilon x - a)^2, \quad r_2^2 = (\varepsilon x + a)^2. \quad (5.13)$$

Теорема вытекает из того факта, что в последних двух равенствах выражения $\varepsilon x + a$ и $\varepsilon x - a$ имеют одинаковый знак, совпадающий со знаком x , так как $\varepsilon > 1$ и $|x| \geq a > 0$ в силу (5.8).

Определение 5.6. *Параболой* называется кривая 2-го порядка на плоскости, задаваемая в некоторых прямоугольных координатах x, y уравнением

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \quad (5.14)$$

Точка $O'(x_0, y_0)$, принадлежащая параболе, называется ее *вершиной*, а число $p > 0$ называется *параметром параболы*, определяющим ее *фокус*.

Если вершина параболы находится в начале координат, то мы получаем *каноническое уравнение параболы* (рис. 5.3):

$$y^2 = 2px. \quad (5.15)$$

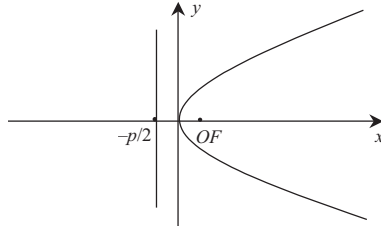


Рис. 5.3

Если поменять местами оси Ox и Oy , то уравнение параболы примет следующий вид:

$$x^2 = 2py, \quad (5.16)$$

который называется *уравнением параболы с вертикальной осью*.

Рассмотрим параболу $y^2 = 2px$, $p > 0$.

Точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ называется *фокусом* гиперболы, а прямая $x = -\frac{p}{2}$ — ее *директрисой*.

Теорема 5.3. Расстояние r от любой точки M параболы до фокуса F равно расстоянию r' от этой точки до директрисы $x = -\frac{p}{2}$.

Доказательство. Квадрат расстояния от директрисы до точки параболы с координатами (x, y) равен

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{2} + x\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 + px + x^2 = \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - px + x^2 + 2px = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2, \end{aligned} \quad (5.17)$$

и, по теореме Пифагора, равен квадрату расстояния от данной точки до фокуса. Теорема доказана.

Выше были разобраны три важнейших типа кривых второго порядка: эллипс, гипербола и парабола. Необходимо заметить, что их уравнения приводились в специальных (канонических)

системах координат, поэтому сами и названы каноническими (за исключением уравнения (5.14)).

В произвольной системе координат такие важные геометрические места точек, как эллипс, гипербола и парабола, могут, вообще говоря, представляться в виде уравнений более сложных видов. Чтобы «распознать», что за геометрическое место точек на плоскости Oxy описывает произвольное уравнение второго порядка, необходимо проводить замену первоначальных координат на новые и приводить уравнение второго порядка в других координатах к трем возможным (описанным выше) каноническим видам.

Такое приведение может быть невозможно, поскольку тремя упомянутыми выше видами кривые второго порядка не исчерпываются.

Перейдем теперь к ознакомлению с некоторыми поверхностями второго порядка.

Для начала, по аналогии с кривыми n -го порядка, рассмотрим трехмерное пространство с декартовой системой координат $Oxyz$.

Определение 5.7. *Поверхностью n -го порядка* называется множество точек в пространстве $Oxyz$, задаваемое уравнением

$$F_n(x, y, z) = 0, \quad (5.18)$$

где F_n — многочлен степени n от переменных x, y, z .

Рассмотрим некоторые важные поверхности 2-го порядка. Сначала ограничимся лишь наглядным определением.

Определение 5.8. *Трехосным эллипсоидом* называется поверхность в трехмерном пространстве $Oxyz$, полученная в результате равномерной деформации (растяжения или сжатия) сферы по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

Рассмотрим сферу радиуса R в трехмерном пространстве $Oxyz$, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (5.19)$$

Пусть данная сфера подвергнута равномерной деформации в направлении координатных осей Ox , Oy и Oz с коэффициентами деформации k_1 , k_2 и k_3 , соответственно, причем $k_1 \geq k_2 \geq k_3 > 0$. В результате этого сфера и превратится в эллипсоид, а точка сферы

M с координатами (X, Y, Z) перейдет в точку эллипсоида M' с координатами (x, y, z) , причем

$$x = k_1 X, y = k_2 Y, z = k_3 Z. \quad (5.20)$$

Отсюда, очевидно,

$$X = \frac{x}{k_1}, Y = \frac{y}{k_2}, Z = \frac{z}{k_3}. \quad (5.21)$$

Подставляя эти формулы в уравнение сферы, для точки $M(X, Y, Z)$ получим:

$$\frac{x^2}{k_1^2} + \frac{y^2}{k_2^2} + \frac{z^2}{k_3^2} = R^2 \text{ или } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (5.22)$$

Это — уравнение трехосного эллипсоида, при этом $a = k_1 R, b = k_2 R, c = k_3 R$ ($a \geq b \geq c > 0$) (рис. 5.4).

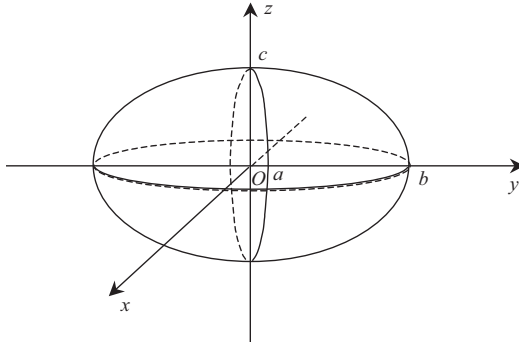


Рис. 5.4

Величины $2a, 2b, 2c$ (a, b, c) называются *осями (полуосями)* эллипсоида. Они дают линейные размеры эллипсоида в направлениях деформации.

Если две оси эллипсоида равны между собой, то эллипсоид называется *эллипсоидом вращения*, или *двухосным эллипсоидом*, так как он остается самим собой в результате его вращения вокруг третьей его оси. Если же равны все три его оси, то он является *сферой*.

Построим сечение плоскостью $z = K, K = \text{const}$, рассмотренного выше эллипсоида. Для этого в уравнение вместо z подста-

вим его значение K . Получим следующее уравнение с двумя переменными x и y :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{K^2}{c^2}. \quad (5.23)$$

При $|K| < c$ (справа в равенстве (5.23) стоит положительное число) уравнение (5.23) определяет эллипс на плоскости Oxy . Нетрудно вычислить полуоси данного эллипса:

$$a\sqrt{1 - \frac{K^2}{c^2}} \text{ и } b\sqrt{1 - \frac{K^2}{c^2}}. \quad (5.24)$$

Таким образом, при $|K| < c$ проекцией на плоскость Oxy сечения эллипсоида плоскостью $z = K$ будет эллипс, задаваемый уравнением (5.23). При $|K| = c$ проекцией искомого сечения будет начало координат плоскости Oxy (а точнее — пара *мнимых пересекающихся прямых*), поскольку справа в равенстве (5.23) при этом стоит 0. Действительно, плоскость $z = K$ при $|K| = c$ касается эллипсоида в точках $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$, которые и проектируются в начало координат плоскости Oxy .

При $|K| > c$ сечение эллипсоида плоскостью $z = K$ — пустое множество, поскольку при этом условии уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{K^2}{c^2}$ не имеет действительных решений (так как его правая часть отрицательна). Говорят, что оно определяет *мнимый эллипс*.

Аналогичным образом можно рассмотреть сечения данного эллипсоида плоскостями $x = K$ или $y = K$, $K = \text{const}$.

Отметим (но доказывать не будем), что сечения эллипсоида произвольными плоскостями относятся к одному из трех уже рассмотренных типов: эллипс, мнимые пересекающиеся прямые (одна действительная точка) или мнимый эллипс (действительных точек нет).

Определение 5.9. Поверхность в трехмерном пространстве $Oxyz$, задаваемая уравнением

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, p \geq q > 0, \quad (5.25)$$

называется *эллиптическим параболоидом*.

Для лучшего представления о том, как устроен эллиптический параболоид, рассмотрим проекции его сечений различными плоскостями.

Для начала изучим проекции на плоскость Oxy его сечений плоскостью $z = K$ при различных K . Для этого в исходное уравнение вместо z подставим значение K . Получим следующее уравнение:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2K. \quad (5.26)$$

Видно, что при $K > 0$ проекциями сечений эллиптического параболоида на плоскость Oxy являются эллипсы с полуосями

$$\sqrt{2Kp} \text{ и } \sqrt{2Kq}. \quad (5.27)$$

При $K \rightarrow +\infty$ полуоси полученных эллипсов стремятся к бесконечности (рис. 5.5).

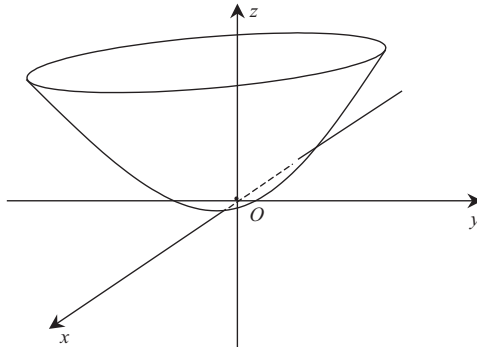


Рис. 5.5

При $K = 0$ искомая проекция совпадает с началом декартовой системы координат (и представляет собой пару мнимых пересекающихся прямых), а при $K < 0$ изучаемое сечение — пустое множество (мнимый эллипс).

Изучим проекции на плоскость Oyz сечений эллиптического параболоида плоскостью $x = K$ (аналогично могут быть изучены проекции его сечений на плоскость $y = K$).

Подставим в исходное уравнение вместо x значение K . Получим следующее уравнение:

$$\frac{y^2}{q} = 2z - \frac{K^2}{p}. \quad (5.28)$$

Видно, что при любом K последнее уравнение задает на плоскости Oyz параболу с вершиной в точке $z = \frac{K^2}{2p}$ на оси Oz и параметром, равным q .

Все сечения эллиптического параболоида, за исключением мнимых, — эллипсы и параболы. Отсюда и название.

Определение 5.10. Поверхность в трехмерном пространстве $Oxyz$, задаваемая уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, p > q \neq 0, \quad (5.29)$$

называется *гиперболическим параболоидом*.

Для начала изучим проекции на плоскость Oxy его сечений плоскостью $z = K$ при различных K . Для этого в исходное уравнение вместо z подставим значение K . Получим следующее уравнение:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2K. \quad (5.30)$$

Видно, что при $K \neq 0$ проекциями его сечений на плоскость Oxy являются гиперболы с полуосями

$$\sqrt{2Kq} \text{ и } \sqrt{2Kp}. \quad (5.31)$$

При $K \rightarrow +\infty$ полуоси полученных гипербол стремятся к бесконечности. При $K > 0$ фокусы гиперболы лежат на оси Ox системы координат, а при $K < 0$ — на оси Oy (рис. 5.6).

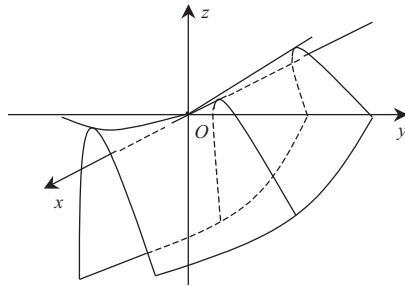


Рис. 5.6

При $K = 0$ искомая проекция совпадает с парой прямых на плоскости, задаваемых уравнениями

$$\sqrt{p}y = \pm\sqrt{q}x. \quad (5.32)$$

Эти же уравнения задают асимптоты гипербол, являющихся сечениями гиперболического параболоида плоскостями $z = K$ при $K \neq 0$.

Изучим проекции на плоскость Oyz сечений гиперболического параболоида плоскостью $x = K$ (аналогично могут быть изучены проекции его сечений на плоскость $y = K$).

Подставим в исходное уравнение вместо x значение K . Получим следующее уравнение:

$$\frac{y^2}{q} = 2z + \frac{K^2}{p}. \quad (5.33)$$

Видно, что при любом K последнее уравнение задает на плоскости Oyz параболу с вершиной в точке $z = -\frac{K^2}{2p}$ на оси Oz и параметром, равным q .

Все сечения гиперболического параболоида — гиперболы и параболы, или пары пересекающихся прямых.

Читателю в качестве упражнения предлагается найти исключительную плоскость (их две), которая пересекает гиперболический параболоид по *прямой*.

Если нарисовать гиперболический параболоид в пространстве, то он будет похож на седловидную поверхность. Поэтому его иногда называют *седлом*.

Дадим еще одну интерпретацию эллиптическому и гиперболическому параболоидам. Представим себе параболу в трехмерном пространстве, лежащую в некоторой плоскости. Построим плоскость, перпендикулярную первоначальной и проходящей через ось симметрии параболы. Очевидно, что при этом вершина параболы лежит на пересечении плоскостей.

Во второй плоскости построим вторую параболу, касающуюся в своей вершине первой параболы, при этом вершины обеих парабол совпадают. Последнее построение можно сделать двумя спо-

собами, в зависимости от того, в одну или в разные стороны лежат ветви обеих парабол.

В результате построений возможно так называемое скольжение (по сути — параллельный перенос) одной параболы по другой. Если ветви обеих парабол обращены вогнуто в одну сторону, то в процессе «скольжения» мы получаем некоторую «яму», а точнее, эллиптический параболоид, поскольку в его сечении появляются эллипсы. Если же ветви обеих парабол обращены вогнуто в разные стороны, то в процессе скольжения мы получаем некоторую *седловидную* поверхность, а точнее, гиперболический параболоид, поскольку в его сечении появляются гиперболы.

Определение 5.11. *Однополостным гиперboloидом называется поверхность в трехмерном пространстве $Oxyz$, задаваемая уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \geq b > 0 < c. \quad (5.34)$$

Если $a = b$, то однополостный гиперboloид можно получить вращением гиперболы, заданной на плоскости Oyz уравнением

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (5.35)$$

вокруг оси Oz (рис. 5.7).

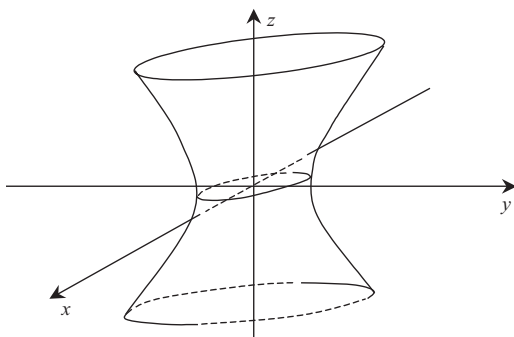


Рис. 5.7

Сразу же заметим, что проекцией на плоскость Oxy сечения однополостного гиперboloида плоскостью $z = K$ при любом

действительном значении K является эллипс, уравнение которого

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{K^2}{c^2}, \quad (5.36)$$

а полуоси равны $a\sqrt{1+\frac{K^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1+\frac{K^2}{c^2}}$. Поэтому однополостный гиперboloид является связной поверхностью, т.е. состоит из одного куска (полости).

Далее изучим проекции на плоскость Oyz сечений однополостного гиперboloида плоскостью $x = K$ (аналогично могут быть изучены проекции его сечений на плоскость $y = K$).

Видно, что при $|K| < a$ искомой проекцией на плоскость Oyz является гипербола, задаваемая формулой

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{K^2}{a^2}, \quad (5.37)$$

с полуосями, равными $b\sqrt{1-\frac{K^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1-\frac{K^2}{a^2}}$, и с фокусами на оси Oy .

Нетрудно догадаться, что при $|K| > a$ проекцией сечения на плоскость Ozx также будет являться гипербола, только ее фокусы будут располагаться на оси Oz .

При $|K| = a$ проекцией сечения на плоскость Oyz будет являться пара пересекающихся прямых, задаваемая уравнениями

$$cy = \pm bz. \quad (5.38)$$

Видно, что в сечении однополостного гиперboloида почти всегда получаются гиперболы с различными параметрами.

Предположим, что мы имеем так называемый *однополостный гиперboloид вращения*, т.е. когда $a^2 = b^2$. Тогда сечениями любых плоскостей вида $x = a$ или $y = a$ являются пары пересекающихся прямых. Более того, поскольку мы имеем дело с однополостным гиперboloидом вращения, то, при круговом «вращении» плоскости $x = a$ к плоскости $y = a$ вдоль окружности, заданной на плоскости $z = 0$ уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, искомыми сечениями также будут пары прямых.

Среди плоских сечений однополостного гиперболоида встречаются также параболы и пары *параллельных* прямых. Читателю предлагается найти такие сечения самостоятельно.

Последний факт нам говорит о том, что однополостный гиперболоид (кстати, не только вращения) как бы соткан из прямых, т.е. он является некоторой линейчатой поверхностью.

Определение 5.12. *Двуполостным гиперболоидом* называется поверхность в трехмерном пространстве $Oxyz$, задаваемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a \geq b > 0 < c. \quad (5.39)$$

Если $a = b$, то двуполостный гиперболоид можно получить вращением гиперболы, заданной на плоскости Oyz уравнением

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (5.40)$$

вокруг оси Oz (рис. 5.8).

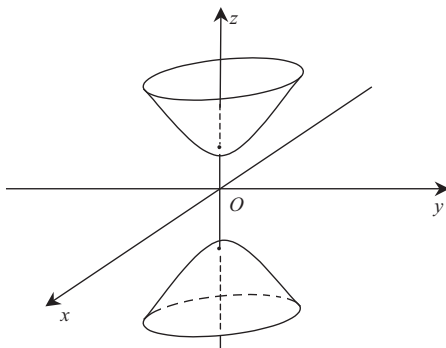


Рис. 5.8

Сразу же заметим, что проекция на плоскость Oxy сечения однополостного гиперболоида плоскостью $z = K$ иногда является пустым множеством. Так, например, при $|K| < c$ искомая проекция задается равенством

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{K^2}{c^2} < 0, \quad (5.41)$$

которое не имеет действительных решений.

Таким образом, двуполостный гиперboloид не является связной поверхностью, поскольку состоит не из одного, а из двух связных кусков (полостей).

Действительно, пара плоскостей $z = K$, $z = -K$ при $|K| > c$ пересекает двуполостный гиперboloид по симметричным эллипсам, проекцией которых на плоскость Oxy является эллипс, задаваемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{K^2}{c^2} - 1 > 0, \quad (5.42)$$

а его полуоси равны $a\sqrt{\frac{K^2}{c^2} - 1}$ и $b\sqrt{\frac{K^2}{c^2} - 1}$. Это доказывает двусвязность двуполостного гиперboloида.

Читая название изучаемой сейчас поверхности, естественно было бы найти среди сечений двуполостного гиперboloида гиперболу.

Для этого изучим проекции на плоскость Oyz сечений двуполостного гиперboloида плоскостью $x = K$ (аналогично могут быть изучены проекции его сечений на плоскость $y = K$).

Видно, что при любом действительном значении K искомой проекцией на плоскость Oyz является гипербола, задаваемая формулой

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{K^2}{a^2}, \quad (5.43)$$

с полуосями, равными $b\sqrt{1 + \frac{K^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1 + \frac{K^2}{a^2}}$, и с фокусами на оси Oz .

В сечении двуполостного гиперboloида плоскостями иногда появляются и другие сечения, например параболы или пары мнимых пересекающихся прямых, представленные одной действительной точкой.

Определение 5.13. *Конусом* называется поверхность в трехмерном пространстве $Oxyz$, задаваемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a \geq b > 0 < c. \quad (5.44)$$

Если $a = b$, то конус можно получить вращением одной из двух прямых, заданных на плоскости Oxy уравнением

$$y = \pm \frac{a}{c} z, \quad (5.45)$$

вокруг оси Oz .

В определениях 5.8–5.13, данных ранее, возникают уравнения, описывающие соответствующие поверхности второго порядка. Эти уравнения называются *каноническими*.

В заключение хотелось бы сделать важное замечание: сечение любой плоскостью любой поверхности второго порядка является кривой второго порядка (возможно, мнимой, в частности, представленной пустым множеством), за исключением случая, упомянутого в самом конце этого раздела.

Действительно, пусть в пространстве $Oxyz$ с декартовой системой координат задана поверхность второго порядка следующим уравнением:

$$F_2(x, y, z) = 0, \quad (5.46)$$

где F_2 — многочлен степени $n = 2$ от переменных x, y, z . Рассмотрим плоскость в трехмерном пространстве, заданную следующим уравнением:

$$Ax + By + Cz + B = 0, \quad (5.47)$$

где хотя бы один из параметров A, B или C не равен нулю.

Пусть для определенности $A \neq 0$. Проекцией сечения поверхности второго порядка на плоскость Oyz будет кривая, геометрическое место точек которой найдется из решений следующей системы:

$$F_2(x, y, z) = 0, Ax + By + Cz + D = 0. \quad (5.48)$$

Для этого выразим из второго уравнения x и подставим его в первое. Получим следующее уравнение:

$$F_2\left(\frac{-By - Cz - D}{A}, y, z\right) = 0, \quad (5.49)$$

в левой части которого стоит полином от y и z степени, не большей 2. Оно описывает искомое сечение, которое в *типичном случае* является кривой второго порядка.

Единственный случай, когда в (5.49) оказывается полином первой степени, задающий на плоскости сечения прямую, — это уже упоминавшаяся пара исключительных плоскостей для ги-

Для исполнения некоторой работы наняты две артели рабочих, из которых первая начала работать 6 днями позже второй. Всю работу они выполнили в $(\sqrt{306,25} + \sqrt[4]{150,0625})$ дней. Если бы эта работа была поручена каждой артели отдельно, то второй из них понадобилось бы для исполнения всей работы более дней, чем первой, настолько, сколько единиц в корне уравнения:

Во сколько дней каждая артель порознь может исполнить свою работу?

6. Решение системы n линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

В левой части системы у чисел a_{ij} у двойного индекса снизу первое число означает номер строки, а второе — номер столбца. В правой части системы стоят так называемые свободные коэффициенты b_i ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

Решим эту систему *методом Гаусса*.

Решением $x_1, x_2, \dots, x_n$ системы (6.1) линейных уравнений называется такой набор чисел, при подстановке которого в каждое уравнение системы получается истинное равенство.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если коэффициенты b_i равны нулю для любого $i = 1, \dots, m$.

Система уравнений называется *совместной*, если множество ее решений непусто.

Система уравнений называется *определенной*, если она совместна и имеет единственное решение.

Заметим сначала, что множество всех решений некоторой фиксированной однородной системы линейных уравнений определенного порядка образуют так называемое *линейное пространство над множеством действительных чисел*.

Это означает, что сумма (поэлементная) любых двух решений однородной системы является решением этой же системы, а также любое решение однородной системы, умноженное (поэлементно) на любое действительное число, является решением однородной системы. Последние два утверждения напрямую следуют из вида однородных систем.

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Рассмотрим операции над уравнениями системы, а именно сложение двух уравнений и умножение уравнения на любое не равное нулю действительное число. Перечисленные операции назовем *элементарными*.

При применении элементарных операций к произвольной системе линейных уравнений она приводится к системе, эквивалентной первоначальной. Заметим, что умножение линейного уравнения на число, равное нулю, не является элементарной операцией, поскольку она расширяет множество решений.

Применим к системе (6.1) следующую последовательность элементарных операций. Предположим, что $a_{11} \neq 0$ (иначе найдем индекс i такой, что $a_{i1} \neq 0$, и переставим 1-е уравнение с i -м местами; если же такого i нет, то система не зависит от x_1 , и можно переобозначить неизвестные). Далее:

умножим 1-е уравнение на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и прибавим ко 2-му уравнению;

3) либо в процессе исключения переменных появляется противоречивое равенство (6.3).

В случае 2) система имеет единственное решение (*определенна*), поскольку число преобразованных уравнений равно числу неизвестных; в случае 1) — бесконечно много решений (*неопределенна*), поскольку число преобразованных уравнений меньше числа неизвестных; а в случае 3) — система *несовместна*.

Из алгоритма Гаусса видно, что любая совместная система линейных уравнений не может иметь, например, два решения: их может быть либо одно, либо бесконечно много (*пространство решений*).

Задача из исторического прошлого.

Куплено изюму и орехов. Орехов куплено больше, чем изюму на столько фунтов, сколько единиц в сумме коэффициентов многочлена, полученного от извлечения квадратного корня из

$$4x^6 + 16x^5 + 28x^4 + 28x^3 + 17x^2 + 6x + 1.$$

За орехи заплачено 2 руб. 88 коп., а за изюм:

$$\left[\left(\frac{x^2}{x^3 + z^3} + \frac{2z}{x^2 - z^2} - \frac{2}{x - z} + \frac{1}{x + z} \right) \times \frac{z^3 - x^3}{x^2 z + z^3} - \frac{2xz}{x^3 + z^3} \right] + \frac{z - x}{x + z} \text{ копеек,}$$

причем $x = \frac{5}{6}$; $z = 0,841(6)$. *Сколько куплено орехов и изюму, если*

фунт изюму [на] 2 коп. дороже фунта орехов?

Ответ. 16 фун. и 6 фун.

7. Определители n -го порядка и их свойства.

Разложение определителя по строке (столбцу).

Решение систем n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными по правилу Крамера

Выше мы уже сталкивались с определителями матриц 2-го и 3-го порядка. Введем более общее понятие определителя произвольного конечного порядка.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу (таблицу чисел) порядка n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Определение 7.1. Минором M_j^i для любого элемента a_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$) матрицы n -го порядка называется определитель порядка $n - 1$, соответствующий той таблице чисел, которая получается из исходной в результате вычеркивания i -й строки и j -го столбца.

Минор элемента a_{ij} будем обозначать символом M_j^i (номер строки в данном случае пишется сверху).

Определений *определителя* n -го порядка можно дать несколько. В данном разделе ограничимся лишь следующим.

Определение 7.2. *Определителем порядка n* , соответствующим матрице (7.1), называется число, равное

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_j^i \quad (7.2)$$

и обозначаемое как

$$\Delta = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (7.3)$$

Заметим, что в равенстве (7.2) мы используем первую строку матрицы A (первый нижний индекс у a_{ij} равен 1). Таким образом, представление (7.2) определителя называется его *разложением по первой строке*.

Вспоминая теорию определителей второго и третьего порядков, можно сделать вывод, что при перестановке двух его строк (или столбцов) знак определителя меняется на противоположный. Например (для определителя второго порядка),

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \Delta^*, \quad (7.4)$$

где Δ^* — определитель, полученный из Δ перестановкой двух строк (столбцов).

Аналогичное утверждение справедливо и для определителя n -го порядка (хотя доказательство оказывается сложнее).

Действительно, применим *метод математической индукции*, а именно: пусть утверждение доказано при некотором начальном

значении n (в частности, оно доказано для определителей второго порядка ($n = 2$)).

По предположению индукции, пусть доказываемое утверждение выполнено для всех до определителей порядка $(n - 1)$ включительно. Для завершения доказательства необходимо его доказать и для порядка n .

Итак, при перестановке двух строк (столбцов) в определителе $(n - 1)$ -го порядка знак самого определителя меняется на противоположный. Пусть для начала переставляются две строки определителя Δ n -го порядка, не являющиеся первой. Это означает, что новый определитель Δ' получится из формулы

$$\Delta' = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} a_{ij} M_j^n, \quad (7.5)$$

где M_j^n — соответствующий минор определителя Δ' , в котором две строки переставлены. Но, по предположению индукции, для определителей $(n - 1)$ -го порядка включительно утверждение справедливо. Поскольку минор M_j^n имеет порядок $n - 1$, в выражении (7.5) произойдет следующее преобразование:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} a_{ij} M_j^n = - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} a_{ij} M_j^1, \quad (7.6)$$

где M_j^1 — соответствующий минор определителя Δ . Итак, утверждение доказано для всех n включительно для перестановки любых двух строк, не являющихся первой.

Теперь докажем утверждение теоремы в случае перестановки первых двух строк.

Действительно, предположим, что переставлена первая строка и вторая. Тогда получившийся определитель может быть вычислен по формуле

$$\Delta' = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{2j} M_j^n,$$

где M_j^n — соответствующие миноры $(n - 1)$ -го порядка, в которых в первой строке стоят соответствующие элементы первой строки до перестановки.

Данные миноры представляют собой сумму, вообще говоря, ненулевых слагаемых, в каждом из которых присутствует лишь

один (вообще говоря, ненулевой) элемент каждой из строк. Поэтому для таких ненулевых слагаемых справедливо равенство:

$$a_{2j}M_j^n = \frac{a_{2j}}{a_{1j}}a_{1j}M_j^n = -a_{1j}M_j^1, \quad a_{1j} \neq 0, j = 1, \dots, n$$

(здесь мы фактически в минорах M_j^1 в каждом слагаемом поменяли элементы a_{1j} на a_{2j}).

Но тогда искомый определитель Δ' может быть вычислен по формуле

$$\Delta' = -\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{2j}M_j^n = -\Delta,$$

что и требовалось.

Осталось показать, что при перестановке 1-ой и i -ой строк знак определителя меняется на противоположный.

Действительно, сделаем композицию *трех* перестановок строк, каждая из которых, как было только что показано, меняет знак определителя на противоположный: i -ю строку переставим со 2-й (одна перемена знака), затем 1-ю строку переставим со второй (вторая перемена знака), и, наконец, 2-ю строку переставим с i -й (третья перемена знака). В результате всего этого 1-я строка поменяется местом с i -й, и знак определителя изменится. Теперь теорема полностью доказана.

Теорема 7.1. Для любого индекса $i = 1, 2, \dots, n$ для определителя n -го порядка Δ справедлива следующая формула:

$$\Delta = \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}M_j^i \quad (7.7)$$

(это называется разложением определителя по i -й строке).

Доказательство. Воспользуемся предыдущим утверждением о перемене знака определителя при перестановке любых его двух строк. Передвинем в определителе Δ i -ю строку последовательно с верхними соседними так, чтобы она стала первой. Поскольку для этого требуется $i - 1$ передвижений, полученный определитель равен

$$\Delta' = \Delta (-1)^{i-1}. \quad (7.8)$$

Разложим теперь его по первой строке, в силу определения. Легко понять, что соответствующие миноры определителя Δ'

равны соответствующим минорам определителя Δ . Таким образом,

$$\Delta = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a'_{1j} M^1_j = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M^i_j, \quad (7.9)$$

где a_{ij} — коэффициенты матрицы до перестановки, а a'_{ij} — коэффициенты матрицы после перестановки.

Теорема доказана.

Выше определитель был введен с помощью разложения по строке, но можно его ввести аналогично с помощью разложения по столбцу.

Аналогично может быть доказана.

Теорема 7.2. Для любого индекса $j = 1, 2, \dots, n$ для определителя n -го порядка Δ справедлива следующая формула:

$$\Delta = \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M^i_j \quad (7.10)$$

(это называется разложением определителя по j -му столбцу).

Определение 7.3. *Транспонирование* матрицы — это такая операция, в результате которой меняются местами строки и столбцы матрицы с сохранением порядка их следования.

В результате операции транспонирования, примененной к некоторой матрице A , мы получаем новую матрицу, называемую транспонированной матрицей и обозначаемую A^m .

Приведем в качестве выводов следующие *основные свойства определителей*:

1) $|A^m| = |A|$ для любой квадратной матрицы A .

Читателю предоставляется в качестве упражнения доказать, пользуясь, как и выше, методом математической индукции данное свойство.

Второе предлагаемое упражнение — доказать тем же методом, что количество слагаемых у определителя n -го порядка равно

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

2) При перестановке в матрице двух строк (двух столбцов) определитель матрицы меняет знак.

Это свойство достаточно подробно доказано выше.

3) Пусть в определителе n -го порядка Δ некоторая строка с номером i является линейной комбинацией двух строк $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ с действительными коэффициентами λ_1 и λ_2 (ср. с (1.2)). Тогда

$$\Delta = \lambda_1 \Delta_1 + \lambda_2 \Delta_2, \quad (7.11)$$

где Δ_1 — определитель матрицы, у которой i -я строка равна x , а остальные строки те же, что и у Δ , а Δ_2 — определитель той матрицы, у которой i -я строка равна y , а остальные строки те же, что и у Δ .

Это свойство вытекает из разложения определителей Δ , Δ_1 , Δ_2 по i -й строке.

Таким образом, определитель является линейной функцией от каждой строки (столбца) при фиксированных других строках (столбцах).

Из этих трех основных свойств определителей вытекают следующие логические следствия (некоторые из которых выводятся друг из друга):

1) Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (или с двумя одинаковыми столбцами) равен нулю.

Действительно, в силу основного свойства 2, поменяем две одинаковые строки. С одной стороны, определитель не изменился, а, с другой стороны, он поменял знак на противоположный. Значит он равен нулю.

2) Умножение всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) матрицы на число λ эквивалентно умножению определителя на число λ .

3) Если матрица содержит нулевую строку (или столбец), то определитель этой матрицы равен нулю.

4) Если две строки (или два столбца) матрицы пропорциональны, то определитель этой матрицы равен нулю.

5) Если к некоторой строке (столбцу) матрицы прибавить другую строку (другой столбец) матрицы с некоторым множителем λ , то определитель этой матрицы не изменится.

Определение 7.4. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число

$$(-1)^{i+j} M_j^i \quad (7.12)$$

и обозначается как A_{ij} .

Тогда формулы разложения определителя по i -й строке и по j -му столбцу, соответственно, переписываются в следующем виде:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad \text{и} \quad \Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.13)$$

Система n линейных уравнений с n неизвестными называется *квадратной*.

Пусть дана квадратная система линейных уравнений с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (7.14)$$

с отличным от нуля определителем $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$.

Предположим, что решение данной системы существует. Докажем, что оно единственно и выпишем формулы для определения решения.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — решение, то есть набор чисел таких, которые при подстановке в систему обращают все уравнения в тождества.

Умножим все уравнения системы, соответственно, на $A_{1j}, \dots, A_{nj}$ и сложим получившиеся тождества. При этом получим для любого $j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{i=1}^n x_i (a_{i1}A_{1j} + a_{i2}A_{2j} + \dots + a_{in}A_{nj}) = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj}. \quad (7.15)$$

Коэффициент при x_i в левой части при $i = j$ равно Δ по свойству разложения определителя по i -ому столбцу. При $i \neq j$ эти коэффициенты все равны 0.

Действительно, если $i \neq j$, то выражение

$$a_{i1}A_{1j} + a_{i2}A_{2j} + \dots + a_{in}A_{nj} \quad (7.16)$$

равно определителю матрицы, у которой есть две одинаковые строки. Такой определитель равен нулю, а последнее разложе-

ние называется *фиктивным (фальшивым)* разложением определителя.

Таким образом, для вычисления любого определителя необходимо разлагать его по строке (столбцу), с алгебраическими дополнениями, соответствующими элементам данной строки (столбца). Если это соответствие нарушено, то произойдет фальшивое разложение определителя по строке с другими алгебраическими дополнениями.

Итак,

$$x_j \Delta = b_1 A_{1j} + \dots + b_n A_{nj} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.17)$$

Обозначим определитель матрицы, получающийся из матрицы A заменой j -го столбца на столбец свободных членов $b_1, \dots, b_n$, через Δ_j .

Тогда последнее равенство примет следующий вид:

$$x_j \Delta = \Delta_j \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.18)$$

Так как $\Delta \neq 0$, то

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.19)$$

Таким образом, мы доказали, что решение квадратной системы с определителем матрицы системы, равным $\Delta \neq 0$, существует, и оно однозначно определяется по предыдущим формулам, которые называются *формулами Крамера*.

Задача из исторического прошлого.

Из полной бочки, вмещающей 32 ведра чистого вина, отлили несколько ведер, а бочку дополнили водой. Потом опять отлили столько же ведер образовавшейся смеси, и тогда в бочке чистого вина осталось $\frac{x^2 - 22x + 40}{x^2 - 5x + 6}$ ведер, где x равно выражению:

$$\frac{\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1}}{\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{a}\right) \cdot 2}{\frac{1}{a} - 1}.$$

Сколько в первый раз отлили вина из бочки?

Ответ. 8 вед.

8. Матрицы и действия с ними.

Обратная матрица. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы

Выше мы уже касались понятия матрицы. Теперь дадим определение произвольной матрицы.

Определение 8.1. Матрицей размера $m \times n$ будем называть прямоугольную таблицу чисел из m строк и n столбцов.

Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*.

Определение 8.2. Суммой двух матриц A и B размера $m \times n$ с элементами a_{ij} и b_{ij} , соответственно, называется матрица C того же размера $m \times n$, элементы которой c_{ij} равны

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.1)$$

Обозначается сумма матриц как $C = A + B$.

Определение 8.3. Произведением матрицы A размера $m \times n$ с элементами a_{ij} на вещественное число r называется матрица B того же размера, элементы которой b_{ij} равны

$$b_{ij} = ra_{ij}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n. \quad (8.2)$$

Обозначается произведение матрицы на число как $B = rA$.

Определение 8.4. Произведением матрицы A размера $m \times n$ с элементами a_{ij} и матрицы B с элементами b_{ks} размера $n \times l$ называется матрица C размера $m \times l$, элементы c_{pq} которой определяются следующими формулами:

$$c_{pq} = \sum_{r=1}^n a_{pr} b_{rq} \quad (p = 1, 2, \dots, m; q = 1, \dots, l). \quad (8.3)$$

Обозначается произведение двух матриц как $C = AB$.

Единичная матрица (обозначение: E) — это матрица, у которой на (главной) диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю (см. далее (8.10)). Она является квадратной, и ее определитель равен 1.

Читателю предлагается доказать в качестве упражнения, что если имеется матрица A порядка $m \times n$, и две единичные матрицы E_1, E_2 порядка m и n соответственно, то справедливы равенства

$$E_1 A = A, A E_2 = A$$

(т.е. при умножении матрицы на единичную матрицу и справа, и слева получаем первоначальную матрицу).

Докажем сначала важное утверждение об ассоциативности умножения двух матриц.

Попутно заметим, что умножение матриц некоммукативно, поэтому порядок умножения важен. Так, вообще говоря, $AB \neq BA$.

Умножение матриц ассоциативно, поэтому можно однозначно говорить об однозначно определенном произведении любого конечного числа квадратных матриц n -го порядка, взятых в определенном порядке.

Действительно, пусть даны произвольные матрицы $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$. Пусть

$$U = AB = (u_{ij}), V = BC = (v_{ij}), S = (AB)C = (s_{ij}), T = A(BC) = (t_{ij}).$$

Надо доказать, что $S = T$.

Нетрудно заметить, что

$$u_{il} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl}, \quad v_{kj} = \sum_{l=1}^n b_{kl} c_{lj},$$

и поэтому, очевидно,

$$s_{ij} = \sum_{l=1}^n u_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj}, \quad t_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} v_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj},$$

что и требовалось.

Теорема 8.1. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей.

Схема доказательства (уточнение деталей предоставляется читателю в качестве упражнения). Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка n . Построим блочную матрицу

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

порядка $2n$. Поскольку у нее в правом верхнем углу стоит блок из нулей, можно показать, что ее определитель равен

$$\det A \det B. \quad (8.5)$$

Умножим теперь эту матрицу слева на другую построенную блочную матрицу

$$\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

При этом определитель не изменится, поскольку определитель последней равен 1.

Таким образом, произведение определителей матриц A и B , в силу (8.5), равно определителю матрицы

$$\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

(если понять, как умножать данные блочные матрицы). Определитель последней матрицы преобразуем следующим образом: поменяем местами первый столбец с $(n+1)$ -м, второй с $(n+2)$ -м и т.д. Это равносильно перестановке блоков-столбцов. При каждой перестановке меняется знак определителя, поэтому в результате он приобретет множитель $(-1)^n$. Итак, произведение определителей матриц A и B равно произведению $(-1)^n$ на определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & -E \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

Для окончания доказательства достаточно применить еще раз свойство определителя блочной (в данном случае ступенчатой) матрицы, получив следующее тождество:

$$(-1)^n |AB| (-1)^n |E| = (-1)^{2n} |AB| = |AB|. \quad (8.9)$$

Пусть далее A — квадратная матрица размера $n \times n$, а

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

— единичная матрица размера n .

Определение 8.5. Матрица B называется *правой (левой) обратной* к матрице A , если $AB = E$ ($BA = E$).

Если для матрицы A существует правая и левая обратные матрицы, то они равны между собой.

Действительно, если

$$AB_1 = E = B_2A, \quad (8.11)$$

то, в силу ассоциативности умножения матриц, имеем:

$$B_1 = EB_1 = B_2AB_1 = B_2E = B_2. \quad (8.12)$$

В этом случае матрица $B_1 = B_2 = B$ называется просто *обратной* и обозначается через A^{-1} .

Квадратная система n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (8.13)$$

в данном случае переписывается с помощью матриц в так называемом *матричном виде*:

$$AX = B, \quad (8.14)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель Δ (обозначаемый как $\det A$) не равен нулю:

$$\Delta = \det A \neq 0. \quad (8.15)$$

Теорема 8.2. Квадратная матрица невырождена, если и только если у нее существует обратная.

Доказательство. Если матрица невырождена, то существование для нее обратной матрицы следует из одного из правил ее вычисления, например, с помощью алгебраических дополнений.

С другой стороны, напомним в виде одной матрицы квадратную матрицу A , приписывая к ней справа матрицу единичную:

$$(A \mid E). \quad (8.16)$$

Теперь применим элементарные операции к данной «расширенной» матрице (8.16), при этом приведем матрицу слева к единичной, а справа получится какая-то матрица (при этом приведение матрицы A именно к *треугольному* виду возможно, поскольку она невырождена):

$$(E \mid B). \quad (8.17)$$

Утверждается, что матрица B — обратная к матрице A . Действительно, при приведении матрицы (8.16) элементарными преобразованиями к матрице (8.17) мы фактически решили методом Гаусса n систем линейных уравнений, получив справа в матрице (8.17) n столбцов решений для *всех* n систем линейных уравнений, записанных вместе с помощью матрицы (8.16). Но n систем линейных уравнений, записанных как матрица (8.16), имеют столбцами из свободных членов именно n столбцов, составляющих единичную матрицу E . Теперь видно, что решалось фактически матричное уравнение

$$AB = E, \quad (8.18)$$

где матрица B составлена из n столбцов неизвестных. Если заметить, что все рассуждения от предположения невырожденности матрицы до приведения матрицы вида (8.16) к виду (8.17) эквивалентны, то можно заметить, что мы уже доказали теорему.

Итак, пусть для данной матрицы A существует обратная A^{-1} . Тогда по теореме 8.1 произведение их определителей равно 1:

$$|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1, \quad (8.19)$$

поэтому, очевидно, что данная матрица A невырождена, и ее определитель равен

$$\frac{1}{|A^{-1}|}. \quad (8.20)$$

Обсудим теперь возможности решения так называемых матричных уравнений, т.е. уравнений следующего вида:

$$AX = B. \quad (8.21)$$

Здесь A, B, X — квадратные матрицы одного порядка, причем матрицы A, B известны, а матрицу X необходимо найти. Предполагается, что матрица A невырождена.

Для возможного решения данного матричного уравнения домножим обе его части слева на A^{-1} :

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B = (A^{-1}A)X = EX = X. \quad (8.22)$$

Поэтому можно считать, что матрица $X = A^{-1}B$ является *решением* искомого *матричного уравнения*. Это легко проверить, подставив ее в уравнение и получив тождество.

Задача из исторического прошлого.

Два путешественника отправились одновременно в город, отстоящий на расстоянии 360 верст. Один из них проезжал в час двумя верстами более другого и потому приехал в город раньше на столько часов, сколько единиц в корне уравнения

$$\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) \cdot \frac{1-x^3}{2+2x+2x^2} = \frac{x-1}{35}.$$

Сколько верст в час проезжал каждый путешественник?

Ответ. 10 вер. и 12 вер.

9. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Размерность и базис линейного пространства. Координаты вектора. Преобразование координат при переходе к новому базису

Мы фактически пользовались понятием линейного пространства над полем действительных чисел, например, когда имели дело с пространством решений линейной однородной системы уравнений.

В данном разделе подчеркнем отдельно свойства структуры линейного пространства, которое в принципе может иметь весьма различную природу.

Определение 9.1. Множество L некоторых элементов x, y, z , ... называется *линейным пространством* над множеством действительных чисел, если:

1) Каждым двум элементам x и y множества L по некоторому правилу ставится в соответствие третий элемент z из L , называемый их *суммой* и обозначаемый $z = x + y \in L$.

2) Каждому элементу x из L и каждому вещественному числу α ставится в соответствие некоторый элемент y из L , называемый *произведением элемента x на вещественное число α* и обозначаемый $y = \alpha x \in L$.

3) Эти два правила обладают следующими свойствами:

1. $x + y = y + x$ (*коммутативность сложения*).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*ассоциативность сложения*).

3. Существует единственный *нейтральный* элемент $0 \in L$ по сложению (*нулевой*) такой, что $x + 0 = x$ для любого $x \in L$.

4. Для любого $x \in L$ существует *единица* — *обратный* элемент $x' \in L$ такой, что $x + x' = 0$.

5. $1 \cdot x = x$ для любого $x \in L$ (*нейтральный элемент по умножению*).

6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (*ассоциативность* умножения на число).

7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ и

8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (*распределительность* сложения и умножения на число).

В качестве упражнения читателю предлагается доказать единственность нулевого и противоположного элемента.

Элементы линейного пространства часто удобно формально называть *векторами*.

Как и для обычных векторов, лежащих на плоскости или в трехмерном пространстве, можно дать следующие естественные определения.

Определение 9.2. *Линейной комбинацией* n векторов $x_1, \dots, x_n$ данного линейного пространства над множеством действительных чисел R называется выражение вида

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \quad (9.1)$$

где все $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$.

Определение 9.3. Векторы $x_1, \dots, x_n$ линейного пространства называются *линейно зависимыми*, если существуют такие действительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$, не все одновременно равные нулю, что

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0. \quad (9.2)$$

Определение 9.4. Векторы $x_1, \dots, x_n$ линейного пространства называются *линейно независимыми*, если из того, что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, следует, что

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0. \quad (9.3)$$

Таким образом, вышеприведенные понятия легко обобщаются на элементы произвольного линейного пространства над множеством (действительных) чисел.

Определение 9.5. (Упорядоченный) набор линейно независимых элементов $e_1, \dots, e_n$ данного линейного пространства L называется *базисом этого пространства*, если каждый элемент x из L раскладывается по этому набору, то есть существуют вещественные числа $x_1, \dots, x_n$ такие, что

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n. \quad (9.4)$$

Числа $x_1, \dots, x_n$ называются *координатами элемента x в базисе $e_1, \dots, e_n$* , а последнее разложение называется *представлением* элемента x в этом базисе.

Необходимо отметить, что представление любого элемента x в данном базисе *единственно*.

От противного, пусть имеется *два* представления данного элемента:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad (9.5)$$

и

$$x = x'_1 e_1 + \dots + x'_n e_n. \quad (9.6)$$

Вычтем одно равенство из другого и получим следующее представление в данном базисе нейтрального элемента по сложению:

$$0 = (x_1 - x'_1) e_1 + \dots + (x_n - x'_n) e_n. \quad (9.7)$$

В силу линейной зависимости векторов $e_1, \dots, e_n$ коэффициенты при них в последнем равенстве равны нулю. Тогда $x_1 = x'_1, \dots, x_n = x'_n$. Противоречие.

Определение 9.6. Говорят, что линейное пространство L имеет *размерность n* , если в нем есть n линейно независимых элементов, а любые его $(n + 1)$ элементов всегда линейно зависимы.

Число n называют размерностью пространства L и обозначают это так:

$$\dim L = n. \quad (9.8)$$

Координаты элемента конечномерного линейного пространства естественным образом привязаны к базису. Важным вопросом теории таких линейных пространств является изучение правила преобразования координат их элементов при изменении базиса.

тельных) чисел. Такие пространства обладают естественными операциями сложения элементов и их умножения на число.

В дальнейшем, возможно, конечномерные линейные пространства будут рассматриваться над множеством комплексных чисел. А именно, для определения таких пространств достаточно ввести предыдущие аксиомы, в которых слово «действительный» («вещественный») заменить на слово «комплексный».

Для изучения преобразования линейного пространства необходимо как-то подействовать на него, сопоставив ему какую-нибудь структуру, подобную структуре другого линейного пространства.

Определение 10.1. *Оператором* A , действующим из линейного пространства X размерности n в линейное пространство Y размерности m , называется отображение

$$A: X \rightarrow Y, \quad (10.1)$$

которое каждому элементу x пространства X сопоставляет некоторый элемент $y = A(x) = Ax$ пространства Y .

Нетрудно заметить, что линейные комбинации в пространстве X не обязаны переходить в линейные комбинации пространства Y .

Определение 10.2. Оператор $A: X \rightarrow Y$ называется *линейным*, если для любых элементов x_1 и x_2 пространства X и для любого комплексного числа λ выполняются следующие равенства:

$$1) A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2;$$

$$2) A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

На пространстве всех операторов, действующих на данном линейном пространстве, аналогичным образом можно определить операции сложения и умножения на число.

Определение 10.3. Если A и B — два линейных оператора из X в Y , то их *суммой* называется линейный оператор $A + B$, определяемый из следующего равенства:

$$(A + B)x = Ax + Bx. \quad (10.2)$$

Определение 10.4. *Произведением* линейного оператора A на число λ называется линейный оператор λA , определяемый из следующего равенства:

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax). \quad (10.3)$$

Элемент линейного конечномерного пространства имеет в определенном базисе свои координаты. Подобно этому, линейный оператор, действующий на линейном пространстве, имеет в некотором базисе этого пространства свое представление, касающееся более сложного объекта, нежели координаты вектора, — матрицы линейного оператора в базисе.

Выберем в конечномерном линейном пространстве X некоторый базис $e_1, \dots, e_n$. Возьмем произвольный элемент x линейного пространства X , который имеет следующее разложение в данном базисе:

$$x = \sum_{k=1}^n x^k e_k \quad (10.4)$$

— разложение элемента x по базису $e_1, \dots, e_n$.

Пусть A — линейный оператор, действующий из X в X (т.е., как говорят, в себя). Элемент Ax , поскольку принадлежит пространству X , также может быть представлен в данном базисе, причем, в силу линейности оператора A ,

$$Ax = \sum_{k=1}^n x^k A e_k. \quad (10.5)$$

Кроме того, можно получить разложение образов $A e_k$ базисных векторов $e_1, \dots, e_n$ пространства X по тому же выбранному базису $e_1, \dots, e_n$:

$$A e_k = \sum_{j=1}^n a_k^j e_j. \quad (10.6)$$

Тогда представление (10.5) элемента Ax в выбранном базисе примет следующий окончательный вид:

$$Ax = \sum_{k=1}^n x^k \sum_{j=1}^n a_k^j e_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n x^k a_k^j \right) e_j. \quad (10.7)$$

То есть, если данный элемент y конечномерного линейного пространства есть образ другого элемента x этого пространства под действием линейного оператора A , т.е. $y = Ax$, то координаты данного элемента выражаются как

$$y^j = A e_k = \sum_{k=1}^n a_k^j x^k, j = 1, 2, \dots, n, \quad (10.8)$$

где a_k^j — матрица линейного оператора в том же базисе $e_1, \dots, e_n$ линейного конечномерного пространства. Таким образом, выделим отдельно важное

Определение 10.5. Квадратная матрица $A = (a_k^j)$ называется *матрицей линейного оператора в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$* .

Поставим следующий вопрос (по аналогии с вопросом о преобразовании координат элемента линейного пространства): как меняется матрица линейного оператора в данном базисе, действующего из линейного пространства в себя, при переходе к другому базису линейного пространства?

Для этого в линейном пространстве X выберем два базиса: $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$.

Пусть один базис через другой выражается следующим образом:

$$e'_k = \sum_{j=1}^n u_k^j e_j, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (10.9)$$

т.е. формулы (10.9), задают переход от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e'_k\}$ ($i, k = 1, \dots, n$).

Пусть

$$A = (a_k^j) \text{ и } A' = (a'_k^j) \quad (10.10)$$

— матрицы линейного оператора $A: X \rightarrow X$ в базисах $\{e_i\}$ и $\{e'_k\}$, соответственно.

Теорема 10.1. Матрицы линейного оператора в описанных выше базисах $\{e_i\}$ (базис « e ») и $\{e'_k\}$ (базис « e' ») связаны следующим соотношением:

$$A = UA'U^{-1}, \quad (10.11)$$

где $U = (u_k^j)$ — матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e'_k\}$.

Доказательство. Обозначим, как и ранее, x^j, y^j, a_k^j и x'^k, y'^k, a'_k^j координаты элементов x и y и матрицу оператора A , соответственно, в базисах $\{e_i\}$ и $\{e'_k\}$, а U — матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e'_k\}$, т.е.

$$x = \sum_{j=1}^n x^j e_j, \quad y = \sum_{i=1}^n y^i e_i, \quad x = \sum_{k=1}^n x'^k e'_k, \quad y = \sum_{k=1}^n y'^k e'_k, \quad (10.12)$$

$$x' = U^{-1}x, \quad y' = U^{-1}y. \quad (10.13)$$

Тогда, очевидно, что

$$y = Ax = Uy' = U(A'x') = U(A'(U^{-1}x)) = (UA'U^{-1})x, \quad (10.14)$$

откуда вытекает следующее равенство:

$$A = UA'U^{-1} \text{ или } A' = U^{-1}AU \quad (10.15)$$

— формулы преобразования матрицы линейного оператора при изменении базиса.

Задача из исторического прошлого.

Куплено чаю и табаку, всего 11 фунтов, причем за чай заплачено 3-мя рублями более. Если бы табак был куплен по цене чаю, то он обошелся бы в 18 руб., а если бы чай был куплен по цене табака, то за него пришлось бы заплатить столько рублей, сколько единиц в наибольшем корне уравнения, полученного приравняв к нулю наименьшее кратное многочленов:

$$x^2 - 8x - 20; \quad x^2 - 13x + 30; \quad x^2 + 4x + 4; \quad x^2 - 9.$$

Сколько куплено чаю и табаку?

Ответ. 5 фун. и 6 фун.

11. Ранг матрицы. Теорема о ранге. Вычисление ранга матрицы

Рассмотрим произвольную прямоугольную матрицу чисел размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (11.1)$$

Она содержит в себе всевозможные матрицы размером $k \times l$, где k и l не превосходят, соответственно, чисел m и n , в том числе некоторые квадратные матрицы.

Определение 11.1. Минор r -го порядка — это определитель матрицы размером $r \times r$, образованный элементами, лежащими на пересечении произвольных r строк и произвольных r столбцов матрицы A .

Если матрица A ненулевая, то существует натуральное число $r > 0$ такое, что у матрицы A есть хотя бы один минор r -го порядка, отличный от нуля, а любой минор порядка, большего, чем r (если такой существует), для матрицы A равен нулю.

Это число r называется *рангом матрицы*.

Ранг матрицы можно также определить эквивалентным способом как максимальное число линейно независимых строк (столбцов) этой матрицы.

Действительно, у данной матрицы имеется r линейно независимых строк (столбцов), и любые $r + 1$ строк линейно зависимы, тогда и только тогда, когда у нее существует ненулевой минор порядка r , и при этом любой минор большего порядка будет равен нулю.

Вычислить же ранг произвольной ненулевой матрицы можно, произведя над данной матрицей все шаги алгоритма Гаусса (см. раздел 6). При этом по окончании алгоритма Гаусса некоторое число s ($0 \leq s < m$) строк матриц могут оказаться нулевыми.

Ранг исходной матрицы (обозначается также как rang , rank или rk) равен числу строк исходной матрицы m минус это число s , то есть

$$\text{rang} A = m - s. \quad (11.2)$$

Определим для любой матрицы линейное *пространство ее строк (столбцов)* как пространство всевозможных их линейных комбинаций.

Две матрицы одного размера называются *эквивалентными*, если их пространства строк (столбцов) совпадают. Это означает, что любая строка (столбец) первой матрицы может быть представлена в виде линейной комбинации строк (столбцов) второй матрицы, и наоборот.

Таким образом, замены строки (столбца) матрицы линейной комбинацией ее строк (столбцов) с ненулевым коэффициентом при самой этой строке (столбце) (впрочем, как и перестановки строк (столбцов)) не нарушают пространства строк (столбцов) данной матрицы. Такие действия (операции) над матрицами назовем *элементарными*.

Построенные эквивалентности для строк и столбцов — разные.

Применение элементарных операций к произвольной матрице приводит к другой матрице, эквивалентной первоначальной. Заметим, что умножение строк (столбцов) матрицы на число, равное нулю, не является элементарной операцией, поскольку она (обычно) сужает пространство строк (столбцов) матрицы.

Применим к матрице (11.1) следующую последовательность элементарных операций. Предположим, что $a_{11} \neq 0$ (иначе найдем индекс i такой, что $a_{i1} \neq 0$, и переставим 1-е уравнение с i -м местами; если же такого номера i нет, то переходим ко второму столбцу). Далее:

умножим 1-ю строку на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и прибавим ко 2-й строке;

умножим 1-ю строку на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и прибавим к 3-й строке;

и т.д.;

умножим 1-ю строку на $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ и прибавим к m -й строке.

Таким образом, в результате этих преобразований мы приходим к матрице, эквивалентной первоначальной, при этом в первом столбце останется лишь один ненулевой элемент a_{11} .

Нулевые строки чаще появляются в самом конце.

Далее, путем применения элементарных операций, в 3-й, 4-й, ..., m -ой строках аналогичным образом «зануляем» коэффициенты из второго столбца матрицы (в случае, если новое $a_{22} \neq 0$; иначе найдем индекс i такой, что новое $a_{i2} \neq 0$, и переставим строки):

умножим 2-ю строку на $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ и прибавим к 3-й и т.д.

Нулевые строки чаще появляются в самом конце.

Продолжая этот процесс (Гаусса) (не более $m - 1$ раз), получим, что матрица приводится к виду трапеции. При этом, возможно, появилось s нулевых строк, а оставшееся количество ненулевых строк равно рангу матрицы (см. (11.2)).

Повторив алгоритм Гаусса для матриц, который уже приводился для решения систем линейных уравнений, заключаем, что фактически доказана.

Теорема 11.1 (о ранге матрицы). Для любой прямоугольной матрицы следующие числа равны между собой:

1. Максимальное число линейно независимых строк.
2. Максимальное число линейно независимых столбцов.
3. Максимальный порядок ненулевого минора.
4. Разность между общим числом строк и числом нулевых строк после приведения к виду трапеции.
5. Разность между общим числом столбцов и числом нулевых столбцов после приведения к виду трапеции (элементарными преобразованиями столбцов).

В силу определения 11.1 во всех пяти случаях данное число и равно рангу матрицы.

Таким образом теорема 11.1 (при участии алгоритма Гаусса) дает метод вычисления ранга любой прямоугольной матрицы.

Задача из исторического прошлого.

В бассейне проведены две трубы, которые, действуя порознь, наполняют бассейн в разное время, а именно, вторая 10 часами скорее первой. Если же обе трубы открыть одновременно, то пустой бассейн наполнится во столько часов, сколько единиц в сумме линейных множителей многочлена

$$3a^2 - 9a + 6,$$

когда в них на место a подставить довший корень уравнения

$$\frac{4x}{x+3} - \frac{4x}{x^2 - 5x + 3} = 0.$$

Во сколько времени каждая труба отдельно наполняет бассейн?

Ответ. 30 час. и 20 час.

12. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Однородная и неоднородная системы. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений

Из предыдущего раздела видно, что теория систем линейных уравнений и алгебра матриц, в том числе вычисление их ранга, тесно взаимосвязаны. Эта связь проявляется еще более красиво на языке пространств решений линейных уравнений.

Запишем систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (12.1)$$

Напомним важные определения из теории систем линейных уравнений, данные выше.

Решением системы (12.1) называется такой набор чисел $c_1, \dots, c_n$, при подстановке которого вместо $x_1, \dots, x_n$ в систему уравнений все уравнения обращаются в тождества.

Система называется *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение.

Система называется *несовместной*, если у нее нет ни одного решения.

Если

$$b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0, \quad (12.2)$$

то система (12.1) называется *однородной*.

Если хотя бы один из свободных членов b_i ($i = 1, \dots, m$) отличен от нуля, то система называется *неоднородной*.

Теорема 12.1 (Кронекера–Капелли). Для того чтобы система (12.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (12.3)$$

был равен рангу ее основной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

Как видно, расширенная матрица системы уравнений строится из основной матрицы прибавлением справа столбца свободных членов.

условия, содержащегося в теореме Кронекера-Капелли, доказана, впрочем, как и вся теорема.

Более того, при этом установлено, что $n - r$ неизвестным можно придавать произвольные значения. Эти $n - r$ переменных называют *свободными*.

Таким образом, показано, что количество свободных неизвестных определяет *размерность пространства решений*. А именно, выбирая $n - r$ штук линейно независимых строк, состоящих из $n - r$ чисел (значений свободных неизвестных), можно получить остальные (главные) неизвестные. При этом, в силу линейной независимости $n - r$ строк свободных неизвестных, полученные решения (которые соответствуют главным и свободным неизвестным) также являются линейно независимыми.

Кроме того, любое решение системы уравнений однозначно определяется строкой значений свободных неизвестных, которая является линейной комбинацией выбранных $n - r$ строк.

Другими словами, главные переменные соответствуют первым ненулевым элементам матрицы ступенчатого вида, а остальные переменные — свободные.

Если мы применим все эти рассуждения к однородным системам, решения которых, как показано выше, образуют арифметическое линейное пространство, то становится верна

Теорема 12.2. Совокупность всех решений однородной системы с n неизвестными и рангом r основной матрицы (12.4) образует линейное пространство, которое можно отождествить с арифметическим пространством строк $\mathbf{R}^{n-r}$.

Таким образом, любой набор из $n - r$ линейно независимых решений однородной системы образует базис в пространстве всех решений.

Такой набор называется *фундаментальной системой решений*.

Все отмеченное выше объединим в виде следующего правила.

Пусть дана совместная система линейных уравнений, и пусть основная матрица A имеет ранг r . Выбираем в матрице A r линейно независимых строк и оставляем в данной системе лишь уравнения, коэффициенты которых вошли в выбранные строки. Далее, в этих уравнениях оставляем в левых частях такие r неизвестных, что определитель из коэффициентов при них

отличен от нуля, а остальные неизвестные объявляем свободными и переносим в правые части уравнений. Давая свободным неизвестным произвольные числовые значения и вычисляя значения остальных неизвестных по правилу Крамера, мы получим все решения исследуемой системы.

Задача из исторического прошлого.

Двое внесли вместе 550 руб. в общее торговое предприятие. Капитал первого находится в обороте

$$\left\{ \frac{[(-5)^{-3} + 1] \cdot 2^{-1}}{(-5)^{-1} + 1} \div \left(\frac{5}{31} \right)^{-1} \right\}^{-1}$$

месяцев, а второго — 22 месяца. По окончании торговли каждый из них получил вместо внесенного им капитала

$$\sqrt[4]{16796160000} \text{ руб.}$$

Сколько внес каждый?

Ответ. 300 руб.; 250 руб.

13. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен

Выше уже было дано определение линейного оператора, действующего в линейном пространстве. Оказывается, что для такого оператора могут существовать некоторые важные элементы (векторы) линейного пространства, которые переводятся в элементы (векторы), коллинеарные им.

Пусть X — n -мерное линейное пространство, A — линейный оператор $X \rightarrow X$, действующий из этого пространства в себя.

Определение 13.1. Число λ называется *собственным значением* оператора A , если для некоторого отличного от нуля элемента (вектора) x выполняется следующее тождество:

$$Ax = \lambda x. \quad (13.1)$$

Этот вектор x называется *собственным вектором* оператора A с *собственным значением* λ .

Пусть I — тождественный оператор в пространстве X , то есть $Ix = x$ для любого $x \in X$. В любом базисе n -мерного пространства матрица тождественного оператора, как известно, единична.

Определение 13.1. Многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix}, \quad (13.2)$$

где a_i^j — матрица линейного оператора A в некотором базисе, называется *характеристическим многочленом* оператора A . При этом уравнение

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (13.3)$$

называется *характеристическим уравнением* для оператора A .

Покажем, что характеристический многочлен не зависит от выбора базиса, в котором записан линейный оператор.

Действительно, пользуясь формулой (10.11) (в которой U — (невырожденная) матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$), перепишем уравнение (13.3) в следующем виде:

$$\det(UA'U^{-1} - \lambda E) = 0.$$

Умножим сначала слева данное уравнение на $\det U^{-1}$, получив следующее алгебраическое уравнение:

$$\det(A'U^{-1} - \lambda U^{-1}) = 0,$$

а затем справа данное уравнение на $\det U$, получив уравнение

$$\det(A' - \lambda E) = 0,$$

используя при этом утверждение о том, что определитель произведения матриц есть произведение определителей.

Последнее уравнение и доказывает искомую независимость.

Теорема 13.1. Число λ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда оно является корнем характеристического многочлена оператора A .

Доказательство. Пусть A — матрица оператора в некотором базисе линейного пространства X . Собственные значения оператора и соответствующие им собственные вектора связаны соотношением

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad (13.4)$$

где I — единичная матрица, а 0 — нулевой вектор из X .

Это означает, что собственный вектор оператора является ненулевым решением линейной однородной системы, полученной из (13.4). Ненулевое решение однородной системы (которая, как всегда, совместна) существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю, т.е. выполнено свойство (13.3). Следовательно, собственные значения линейного оператора могут быть вычислены как корни уравнения (13.3), а собственные векторы — как решения соответствующих однородных систем (13.4).

Заметим, что если матрица оператора в некотором базисе линейного пространства не равна тождественно нулю, то уравнение (13.3), вообще говоря, имеет комплексные решения. Если же все коэффициенты матрицы оператора являются действительными числами, то важен вопрос о действительности собственных значений и собственных векторов.

Так, например, рассмотрим линейный оператор, поворачивающий векторы плоскости на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Действительно, образами стандартных базисных векторов $\{1, 0\}$ и $\{0, 1\}$ плоскости под действием данного оператора являются векторы $\{0, 1\}$ и $\{-1, 0\}$, соответственно. Поэтому матрица данного линейного оператора в стандартном базисе имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.5)$$

Тогда ее собственные значения являются корнями уравнения

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \quad (13.6)$$

и равны $\pm i$.

Таким образом, и собственные значения рассмотренного оператора, и соответствующие им собственные векторы (которые нетрудно отыскать, решив соответствующие системы линейных уравнений) являются *комплекснозначными*. Действительно, никакой ненулевой (*действительнозначный*) вектор плоскости не

может в результате поворота на угол, не кратный π , перейти в (действительнозначный) коллинеарный себе вектор.

Задача из исторического прошлого.

Некто, имея капитал, состоящий из столькох сотен рублей, сколько единиц в сумме коэффициентов квадратного уравнения с одним неизвестным, корни которого 7 и 2, разделил его на 2 части и отдал в рост, причем вторую часть 3-мя процентами более первой. Определить части капитала, зная, что с первой в 7 месяцев получено 14 руб. процентных денег, а со второй в 10 месяцев столько руб. процентных денег, сколько единиц в дроби

$$\frac{5a^2 - 25a + 20}{a^2 - 7a + 12},$$

где $a=4$.

Ответ. 400 руб. и 200 руб.

14. Билинейные и квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Формулировка закона инерции. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы

Ранее было введено понятие линейного оператора, который действует из одного линейного пространства в другое, переводя при этом линейные комбинации из одного пространства в линейные комбинации из другого.

В дальнейшем нам потребуется понятие *билинейной формы*, действующей не на одном элементе линейного пространства L , а на паре его элементов, т.е. из $L \times L$ во множество чисел.

Определение 14.1. *Билинейной формой* на линейном пространстве L называется числовая функция $B(x, y)$ на элементах (векторах) этого линейного пространства, удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1) $B(x + z, y) = B(x, y) + B(z, y)$;
- 2) $B(x, y + z) = B(x, y) + B(x, z)$;

$$3) B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y);$$

$$4) B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y).$$

Необходимо заметить, что в данном определении есть *искусственная неточность*, принятая для простоты. Дело в том, что билинейная форма, которая является линейной формой по каждой из переменных при фиксированной второй переменной, отображает не само линейное пространство L , а прямое произведение $L \times L$ этого линейного пространства на себя во множество чисел.

Поэтому далее, когда говорится о билинейной форме на линейном пространстве, имеется в виду такая форма на упорядоченном прямом произведении.

Определение 14.2. Билинейная форма $B(x, y)$ на линейном пространстве L называется *симметричной* (кососимметричной), если для любых двух элементов $x, y \in L$:

$$B(x, y) = B(y, x) \quad (B(x, y) = -B(y, x)). \quad (14.1)$$

Теперь пусть $A(x, y)$ — симметричная билинейная форма на пространстве L .

Определение 14.3. Числовая функция $A(x, x)$ одного аргумента x , полученная из $A(x, y)$ при $x = y$, называется *квадратичной формой*, соответствующей данной билинейной форме.

Теперь, в результате определения 14.3, уже можно говорить о квадратичной форме, действующей не на прямом произведении линейного пространства на себя, а на нем самом.

Билинейная и квадратичная форма связаны следующим соотношением:

$$A(x, y) = \frac{1}{2} [A(x + y, x + y) - A(x, x) - A(y, y)], \quad (14.2)$$

что следует из того, что

$$A(x + y, x + y) = A(x, x) + A(x, y) + A(y, x) + A(y, y), \quad (14.3)$$

и из того, что A симметрична, т.е. $A(x, y) = A(y, x)$.

Теорема 14.1. В n -мерном линейном пространстве L с базисом $\{e_i\}_{i=1}^n$ билинейная форма $B(x, y)$ может быть однозначно представлена в виде

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i y_j, \quad (14.4)$$

где $b_{ij} = B(e_i, e_j)$, а x_i и y_j — координаты элементов x и y в базисе $\{e_i\}$.

Доказательство. Если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, а $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, то

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n B(e_i, e_j) x_i y_j, \quad (14.5)$$

в силу линейности билинейной формы по каждому из аргументов при фиксированном втором.

Для доказательства однозначности представления (14.5) достаточно взять $x = e_i$, $y = e_j$ и получить из представления билинейной формы $B(x, y)$, что

$$b_{ij} = B(e_i, e_j). \quad (14.6)$$

Теорема доказана.

Аналогичное представление можно получить и для квадратичной формы, соответствующей билинейной форме:

$$A(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (14.7)$$

При этом матрица $A = (a_{ij})$ называется *матрицей квадратичной формы* $A(x, x)$ в данном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ и получается аналогичным образом, действуя на векторах базиса:

$$a_{ij} = A(e_i, e_j). \quad (14.8)$$

Поскольку форма $A(x, x)$ симметрична, то ее матрица также симметрична:

$$a_{ij} = a_{ji}. \quad (14.9)$$

Ранг матрицы (a_{ij}) называется *рангом квадратичной формы* и он не зависит от выбора базиса (доказательство данного факта предоставляется читателю в качестве упражнения).

Определение 14.4. Квадратичная форма $A(x, x)$ на линейном пространстве называется *положительно (отрицательно) определенной*, если для любого отличного от нулевого вектора x выполняется следующее неравенство:

$$A(x, x) > 0 \text{ (} A(x, x) < 0 \text{)}. \quad (14.10)$$

Теорема 14.2. Любая квадратичная форма $A(x, x)$ на n -мерном линейном пространстве L в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ может быть приведена к каноническому виду

$$A(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2, \quad (14.11)$$

где x_i — координаты элемента x в некотором другом базисе $\{e'_i\}_{i=1}^n$, путем невырожденного линейного преобразования координат.

Схема доказательства. Итак, пусть дана квадратичная форма (14.7) от n неизвестных $x_1, \dots, x_n$. Найдем такое невырожденное линейное преобразование, которое выделило бы из формы A квадрат одного из неизвестных, т.е. привело бы ее к виду суммы этого квадрата и некоторой квадратичной формы от остальных неизвестных. Это сделать несложно, если среди коэффициентов $a_{11}, \dots, a_{nn}$ есть отличные от нуля.

Пусть для определенности $a_{11} \neq 0$. Тогда выражение

$$a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{nn}x_n)^2,$$

являющееся квадратичной формой, содержит такие же члены с неизвестным x_1 , как и наша исходная форма, а, следовательно, разность

$$A(x, x) - a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{nn}x_n)^2 = R$$

будет квадратичной формой, содержащей лишь неизвестные $x_2, \dots, x_n$, но никак не x_1 . Тогда, очевидно,

$$A(x, x) = a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{nn}x_n)^2 + R.$$

Если мы переобозначим

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{nn}x_n, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n,$$

то получим равенство

$$A(x, x) = a_{11}^{-1}y_1^2 + R,$$

где R будет теперь квадратичной формой от неизвестных $y_2, \dots, y_n$.

Читателю предлагается попутно доказать, что построенное линейное преобразование является невырожденным.

Возможен, конечно, случай, когда одновременно $a_{11} = \dots = a_{nn} = 0$. Тогда необходимо предварительно совершить вспомога-

тельное линейное преобразование, приводящее к появлению в форме квадратов неизвестных. Так, например, для формы

$$A(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

такое вспомогательное преобразование можно выбрать в виде

$$y_1 = x_1 - x_2, y_2 = x_1 + x_2.$$

Теорема доказана.

Для завершения доказательства необходимо заметить, что если новых переменных оказалось меньше числа старых (т.е. построенное преобразование — вырожденное), то новые переменные необходимо «дополнить» другими переменными, лишь соблюдая невырожденность полного списка построенных переменных.

Оказывается, что иногда удобно приводить квадратичную форму к еще более простому виду.

Теорема 14.3 (закон инерции квадратичных форм). Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами в *нормальном* виде квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к этому виду (*нормальный* вид квадратичной формы — это следующий вид:

$$A(x, x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_k^2, \quad 0 \leq p \leq n, \quad 0 \leq k \leq n). \quad (14.12)$$

Доказательство. Пусть исходная квадратичная форма приведена в некоторых координатах x_i , $i = 1, \dots, k$ к нормальному виду (14.12), $k \leq n$.

Рассмотрим такое подпространство M_+^p объемлющего n -мерного пространства, на котором исходная квадратичная форма положительно определена. Это значит, что

$$A(x, x) > 0 \quad (14.13)$$

для любого ненулевого вектора из подпространства M_+^p (которое назовем *положительным* для данной квадратичной формы).

Построим базис в подпространстве M_+^p . Это сделать нетрудно, поскольку в полученных координатах x_i следующие p векторов

$$\{1, 0, \dots, 0\}, \{0, 1, 0, \dots, 0\}, \dots, \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\} \quad (14.14)$$

(у последнего вектора единица стоит на p -м месте) объемлющего n -мерного пространства линейно независимы.

Аналогичным образом рассмотрим такое подпространство M_-^{k-p} объемлющего n -мерного пространства, на котором исходная квадратичная форма отрицательно определена. Это значит, что

$$A(x, x) < 0 \quad (14.15)$$

для любого ненулевого вектора из подпространства M_-^{k-p} (которое назовем *отрицательным* для данной квадратичной формы).

Построим базис в подпространстве M_-^{k-p} . Это сделать нетрудно, поскольку в полученных координатах x_i следующие $k - p$ векторов

$$\{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}, \dots, \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}, \{0, \dots, 0, 1, \dots\} \quad (14.16)$$

(у первого вектора единица стоит на $(p + 1)$ -м месте, а у последнего — на $(k + 1)$ -м) объемлющего n -мерного пространства линейно независимы.

Ясно, что всевозможные линейные комбинации векторов (14.14) (соответственно, (14.16)) пробегают все подпространство M_+^p (соответственно, M_-^{k-p}).

От противного. Пусть исходная квадратичная форма приведена в других координатах x'_j , $j = 1, \dots, k'$ к следующему нормальному виду:

$$A(x', x') = x_1'^2 + \dots + x_{p'}'^2 - x_{p'+1}'^2 - \dots - x_{k'}'^2, \quad 0 \leq p' \leq n, \quad 0 \leq k' \leq n. \quad (14.17)$$

Ранг квадратичной формы в первом случае равен k , а во втором — k' , поэтому $k = k'$. Предположим, что $p' > p$. Система линейных уравнений относительно $x_1, \dots, x_n$

$$x_1 = 0, \dots, x_p = 0, x_{p'+1}' = 0, \dots, x_k' = 0, x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0$$

(здесь x'_i — суть линейные функции от x_j) имеет хотя бы одно ненулевое решение $y = (y_1, \dots, y_n)$, так как выполнено неравенство

$$n - p' + p < n.$$

Если $y_1 = \dots, y_p = 0 = y_{k+1} = y_n = 0$, то среди величин $y_{p+1}, \dots, y_k$ найдется хотя бы одно значение, не равное нулю, поэтому имеем неравенство

$$A(y, y) < 0$$

в силу (14.12). Но из (14.17) в силу того, что $y'_{p+1} = \dots, y'_k = 0$ (соответствующие линейные функции y_i обращаются в нуль) имеет место неравенство

$$A(y, y) \geq 0.$$

Противоречие. Теорема 14.3 полностью доказана.

Необходимо заметить, что если $k \neq n$, то имеется еще так называемое *нулевое* подпространство объемлющего n -мерного пространства, на котором действие исходной квадратичной формы нулевое.

Действительно, базис такого подпространства легко построить по аналогии с предыдущими базисами (14.14) и (14.16), только первый ненулевой элемент каждого вектора такого базиса должен стоять, лишь начиная с $(k+1)$ -го места.

Таким образом, объемлющее n -мерное пространство разлагается в непересекающееся объединение следующих трех подпространств:

$$M_+^p, M_-^{k-p} \text{ и } M^{n-k}, \quad (14.18)$$

при этом в общем случае лишь третье подпространство непусто. Оно всегда содержит, по крайней мере, нулевой элемент объемлющего линейного пространства.

Для положительно определенных квадратичных форм пусто второе подпространство, а для отрицательно определенных — первое.

Пусть (a_{ij}) — матрица квадратичной формы $A(x, x)$ в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$ объемлющего линейного пространства.

Обозначим:

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (14.19)$$

Теорема 14.4 (критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы). Квадратичная форма $A(x, x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (14.20)$$

Квадратичная форма $A(x, x)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \dots, \Delta_n > 0 \quad (n = 2k), \quad (14.21)$$

$$\Delta_n < 0 \quad (n = 2k + 1), \quad (14.22)$$

$k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Изучим сначала вопрос об изменении вида матрицы квадратичной формы при переходе к другому базису.

Пусть исходная квадратичная форма приведена в некоторых координатах x_i к нормальному виду. При этом, в силу правил умножения матриц, представление (14.12) можно переписать в следующем виде:

$$A(x, x) = (x_1 \ \dots \ x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^T A x \quad (14.23)$$

(здесь $x^T = (x_1 \ \dots \ x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T$ — транспонированная матрица).

Если есть (невыврожденная) замена переменных

$$y = Cx \quad (14.24)$$

(здесь $\det C \neq 0$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$), приводящая исходную квадратичную

форму к нормальному виду

$$(y_1 \ \dots \ y_n) D \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (14.25)$$

то

$$A(x, x) = A(C^{-1}y, C^{-1}y) = x^T A x = x^T C^T D C x = y^T D y, \quad (14.26)$$

поскольку $(y_1 \dots y_n) = y^T = x^T C^T$ (здесь D — диагональная матрица).

В силу (14.26) выполнено следующее равенство:

$$A = C^T D C. \quad (14.27)$$

Таким образом,

$$\det A = \det D \det^2 C, \quad (14.28)$$

т.е. $\det A$ и $\det C$ — одного знака.

Очевидно, квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все диагональные элементы матрицы D положительны.

Заметим, что равенства (14.26)–(14.28) верны не только для матриц A и D , но и для их угловых (левых верхних) миноров порядка i (когда замена $y = Cx$ затрагивает только первые i координат, а остальные преобразуются тождественно), поэтому все угловые миноры матрицы A должны быть положительными, как и угловые миноры матрицы D .

Аналогично, исходная матрица отрицательно определена тогда и только тогда, когда все диагональные элементы матрицы D отрицательны. Знаки угловых миноров одного порядка матриц A и D должны совпадать. Последнее условие и эквивалентно необходимым и достаточным условиям теоремы, которую можно считать доказанной.

Задача из исторического прошлого.

Число фунтов купленного товара представляется двузначным, в котором единицы 2-мя менее числа десятков; цена каждого фунта этого товара в копейках также есть двузначное число, написанное теми же цифрами, как и число фунтов, только расположенными в обратном порядке. Определить количество купленного товара и стоимость каждого его фунта, зная, что за весь товар заплачено такое число копеек, в котором единиц и десятков по столько, чему равен корень уравнения:

$$2z^4 - 7z^2 = 1075,$$

а число сотен равно значению дроби:

$$\frac{6(5x^2 - 22x + 8)}{x^2 - 2x - 8}$$

при $x = 4$.

Ответ. 53 фун., 35 коп.

**15. Евклидовы пространства. Неравенство
Коши–Буняковского. Матрица Грама скалярного
произведения. Ортогональный и ортонормированный базис.
Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение
подпространства в евклидовом пространстве**

Выше мы уже фактически пользовались понятием евклидова пространства, когда вводили определения трех основных операций с векторами — скалярное, векторное и смешанное произведения. Кроме того, структура такого пространства естественна, когда рассматривается декартова система координат.

Определение 15.1. (Конечномерным) евклидовым пространством называется вещественное конечно мерное линейное пространство, для которого выполнены два требования:

а) любым двум элементам этого пространства по некоторому правилу ставится в соответствие вещественное число, так называемое *скалярное произведение* этих элементов (x, y) ;

б) Для данного правила выполняется:

1) $(x, y) = (y, x)$ (свойство *симметричности*);

2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ и

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall \lambda \in R$ (свойства *линейности*);

4) $(x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (свойство *невыврожденности*).

Размерность вещественного линейного пространства является размерностью определенного на его базисе евклидова пространства.

Введенная операция скалярного произведения в евклидовом пространстве позволяет получить важное утверждение.

Теорема 15.1 (неравенство Коши–Буняковского). Для всяких двух элементов x, y евклидова пространства справедливо неравенство:

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y). \quad (15.1)$$

Доказательство. В силу свойства 4) скалярного произведения для любого вещественного числа λ выполнено неравенство:

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0. \quad (15.2)$$

Его, в силу свойств 1)–3) скалярного произведения, можно переписать так:

$$\lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0. \quad (15.3)$$

Если рассмотреть левую часть этого неравенства как квадратный трехчлен относительно λ , то для выполнения самого неравенства при всех λ имеем требование на неположительность его дискриминанта ($D \leq 0$):

$$D = 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0, \text{ т.е. } (x, y)^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (15.4)$$

Теорема доказана.

Для любого набора векторов (элементов) данного евклидова пространства удобно строить матрицу из попарных скалярных произведений.

Определение 15.2. Матрицей Грама системы векторов $x_1, \dots, x_n$ данного евклидова пространства называется матрица

$$g = \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \dots & (x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \dots & (x_n, x_n) \end{pmatrix}. \quad (15.5)$$

Ее определитель называется *определителем Грама*.

Читателю предлагается доказать теорему о том, что *определитель Грама системы векторов всегда неотрицателен и равен нулю тогда и только тогда, когда данная система векторов линейно зависима* (для доказательства необходимо представить один из векторов системы через линейную комбинацию других, после чего подставить в определитель Грама и получить линейную комбинацию определителей Грама с одинаковыми строками).

Определение 15.3. n ненулевых упорядоченных элементов n -мерного евклидова пространства образуют *ортogonalный базис* этого пространства, если эти n элементов попарно ортogonalны.

Определение 15.4. n ненулевых упорядоченных элементов n -мерного евклидова пространства образуют *ортонормированный базис* этого пространства, если они попарно ортогональны и $(e_i, e_j) = 1$; иными словами,

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (15.6)$$

Символ δ_{ij} называется *символом Кронекера*.

Для того чтобы доказать корректность данного определения, необходимо доказать, что выбранный набор попарно ортонормированных (и попарно ортогональных тоже) векторов — действительно является базисом.

В самом деле, пусть $e_1, \dots, e_n$ попарно ортонормированные элементы. Составим из них следующую линейную комбинацию:

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0. \quad (15.7)$$

Домножая это равенство скалярно на e_i ($i = 1, \dots, n$), последовательно получим, что

$$0 = \alpha_i (e_i, e_i) = \alpha_i \quad (15.8)$$

(или, в случае попарно ортогональных элементов, в правой части стоит некоторая постоянная, равная произведению $(e_i, e_i) > 0$ и α_i).

Отсюда $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, то есть элементы $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, а значит, и образуют базис, поскольку в n -мерном линейном пространстве любые n линейно независимых упорядоченных векторов базис и образуют.

Теорема 15.2. В любом n -мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство. По любому набору из n линейно независимых векторов $f_1, \dots, f_n$ в n -мерном евклидовом пространстве можно построить ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$, элементы которого линейно выражаются через $f_1, \dots, f_n$. Это построение осуществляется с помощью так называемого *процесса ортогонализации*.

Действительно, первый вектор будущего базиса строится следующим образом:

$$e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{(f_1, f_1)}} \quad (15.9)$$

и имеет единичную длину.

Второй вектор достаточно выбрать в следующем виде:

$$e_2 = \frac{f_2 - (f_2, e_1)e_1}{\sqrt{(f_2 - (f_2, e_1)e_1, f_2 - (f_2, e_1)e_1)}}. \quad (15.10)$$

Легко проверить, что он также имеет единичную длину и ортогонален первому вектору будущего базиса.

Действительно, умножив скалярно числитель выражения (15.9) на числитель выражения (15.10), получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} (f_2 - (f_2, e_1)e_1, f_1) &= (f_2, f_1) - (f_2, e_1)(e_1, f_1) = \\ &= (f_2, f_1) - \frac{1}{\sqrt{(f_1, f_1)}\sqrt{(f_1, f_1)}}(f_2, f_1)(f_1, f_1) = 0. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Равенство (15.11) доказывает ортогональность первых двух векторов будущего ортонормированного базиса.

Продолжаем далее по индукции и в процессе построения нового ортонормированного базиса останавливаемся на n -м векторе, который также имеет единичную длину и ортогонален предыдущим $n - 1$ векторам.

$$\begin{aligned} e_n &= \\ &= \frac{f_n - (f_n, e_{n-1})e_{n-1} - \dots - (f_n, e_1)e_1}{\sqrt{(f_n - (f_n, e_{n-1})e_{n-1} - \dots - (f_n, e_1)e_1, f_n - (f_n, e_{n-1})e_{n-1} - \dots - (f_n, e_1)e_1)}}, \end{aligned} \quad (15.12)$$

что проверяется аналогично равенству (15.11).

Теорема 15.2 доказана.

Пусть подмножество $M \subset E$ — произвольное *подпространство* евклидова пространства E . Это означает, что любая линейная комбинация векторов из подмножества M не выходит за рамки самого M .

Определение 15.5. *Ортогональным дополнением* подпространства M в евклидовом пространстве E называется множество элементов пространства E , ортогональных каждому элементу из M .

Обозначается через $M^\perp$.

Будем говорить, что конечномерное евклидово пространство E раскладывается в сумму своих подпространств

$$E = M_1 + M_2 + \dots + M_s, \quad (15.13)$$

если любой вектор x евклидова пространства E может быть разложен в сумму

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_s, \quad (15.14)$$

где $x_k \in M_k$ для любого $k = 1, \dots, s$.

Будем говорить, что конечномерное евклидово пространство раскладывается в *прямую сумму* своих подпространств, если представление (15.14) единственно.

Таким образом, подпространства, которые составляют прямую сумму данного евклидова пространства, могут пересекаться лишь по нулевому элементу, который принадлежит всем подпространствам.

Теорема 15.3. Любое конечномерное евклидово пространство может быть разложено в прямую сумму любого своего подпространства и его ортогонального дополнения.

Доказательство. Зафиксируем данное подпространство M^n евклидова пространства и рассмотрим его базис, состоящий из m векторов $e_1, \dots, e_m$, где для определенности $m < n$ (случай $m = n$ тривиален).

Используя метод ортогонализации, можно дополнить первый набор векторов $e_1, \dots, e_m$ вторым набором $n - m$ линейно независимых векторов $e_{m+1}, \dots, e_n$, каждый из которых ортогонален векторам первого набора. Этот второй набор и является базисом ортогонального дополнения пространства M^n . В результате получим базис $e_1, \dots, e_n$ всего евклидова пространства, по которому раскладывается любой его вектор.

Таким образом, получаем единственное представление любого вектора евклидова пространства в виде суммы двух векторов: одно слагаемое принадлежит подпространству M^n евклидова пространства, а другое слагаемое — ортогональному дополнению к данному подпространству. Теорема доказана.

Задача из исторического прошлого.

Из денег, собранных с любительского спектакля, ассигновано m рублей в пользу некоторого числа несостоятельных учеников. Так как n из них ушли из гимназии до раздела денег, то каждый из оставшихся получил больше, чем первоначально предполагалось, на столько рублей, сколько единиц в корне уравнения:

$$5x^4 - 6x^2 = 6264.$$

Скольким ученикам розданы деньги, если m и n суть два числа, сумма которых 107, а произведение 210?

Ответ. 5 уч.

16. Сопряженные операторы в евклидовом пространстве и их свойства. Самосопряженные операторы. Построение ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора

В данном разделе будем рассматривать линейные операторы, действующие в конечномерном евклидовом пространстве V .

Определение 16.1. Линейный оператор A^* на конечномерном евклидовом пространстве V называется *сопряженным оператором* к линейному оператору A , если для всех элементов x и y из V выполняется следующее равенство:

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \quad (16.1)$$

Заметим, что равенство (16.1) определяет сопряженный оператор A^* однозначно.

Выделим важные *свойства сопряженных операторов*, вытекающие из определения.

1. $I^* = I$ (сопряженный к единичному оператору — тоже единичный).

Действительно,

$$(x, y) = (Ix, y) = (x, Iy) = (x, I^*y). \quad (16.2)$$

2. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

Действительно,

$$((A + B)x, y) = (Ax, y) + (Bx, y) =$$

$$= (x, A^*y) + (x, B^*y) = (x, (A^* + B^*)y). \quad (16.3)$$

$$3. (\lambda A)^* = \lambda A^*.$$

Действительно,

$$(\lambda Ax, y) = \lambda (Ax, y) = \lambda (x, A^*y) = (x, \lambda A^*y). \quad (16.4)$$

$$4. (A^*)^* = A.$$

Действительно,

$$(x, A^{**}y) = (A^*x, y) = (y, A^*x) = (Ay, x) = (x, Ay). \quad (16.5)$$

$$5. (AB)^* = (BA)^*.$$

Действительно,

$$((AB)x, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*(A^*y)) = (x, (B^*A^*)y). \quad (16.6)$$

Все свойства 1–5 верны для произвольных x, y из пространства V .

Определение 16.2. Линейный оператор A на конечномерном евклидовом пространстве V называется *самосопряженным*, если $A^* = A$, т.е.

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (16.7)$$

для любых элементов x и y , принадлежащих пространству V .

Очевидно, что матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе евклидова пространства должна быть симметрической, поскольку $(Ax, y) = (Ay, x)$.

Действительно,

$$(Ax, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^j x^i y^j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^i x^j y^i = \sum_{i,j=1}^n a_{ji}^i y^j x^i = (x, Ay). \quad (16.8)$$

Понятие самосопряженности для оператора находит свое отражение в способе нахождения его собственных значений и собственных векторов.

Для начала дадим определение скалярного произведения в линейном пространстве над множеством комплексных чисел. Это определение естественным образом дополняет определение скалярного произведения в линейном пространстве над множеством действительных чисел.

Пусть E — линейное пространство над множеством C комплексных чисел.

Определение 16.3. Функция $(\cdot, \cdot): E \times E \rightarrow C$ называется *скалярным произведением элементов пространства E* , если она удовлетворяет условиям:

- 1) является неотрицательным вещественным числом: $(x, x) \geq 0$ $\forall x \in E$, причем, если $(x, x) = 0$, то $x = 0$;
- 2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad \forall x, y \in E, \quad \forall \alpha \in C$;
- 3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y, z \in E$;
- 4) $(x, y) = \overline{(y, x)} \quad \forall x, y \in E$,

где черта означает комплексное сопряжение.

Из свойств 2) и 4) следует, что

$$(x, \beta y) = \bar{\beta}(x, y) \quad \forall x, y \in E, \quad \forall \beta \in C. \quad (16.9)$$

Действительно,

$$(x, \beta y) = \overline{(\beta y, x)} = \bar{\beta} \cdot \overline{(y, x)} = \bar{\beta}(x, y). \quad (16.10)$$

Далее отметим комплексный аналог самосопряженного оператора, матрица которого является симметричной, и действующего в линейном пространстве над множеством действительных чисел. Такие операторы принято называть *эрмитовыми* (они действуют в пространстве над множеством комплексных чисел).

В данном разделе нам потребуется лишь свойство 4) скалярного произведения из определения 16.3.

Из вышеприведенных определений следует, что матрица A эрмитова оператора в некотором ортонормированном базисе линейного пространства (то есть самосопряженного оператора, действующего на линейном пространстве над множеством комплексных чисел), в силу определения 16.3, обладает следующим свойством:

$$A^T = \bar{A}. \quad (16.11)$$

Другими словами, после транспонирования матрицы эрмитова оператора она становится комплексно сопряженной к данной.

Теорема 16.1. Все характеристические числа (собственные значения) самосопряженного оператора вещественны.

Доказательство проведем сначала для эрмитова оператора. Поскольку выполнено свойство

$$Ax = \lambda x, \quad (16.12)$$

где λ — собственное значение (вообще говоря, комплексное число), а x — соответствующий собственный вектор, то

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda (x, x). \quad (16.13)$$

Поскольку оператор A эрмитов, то

$$(Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda} (x, x). \quad (16.14)$$

Таким образом,

$$\lambda (x, x) = \bar{\lambda} (x, x) \quad (16.15)$$

и, поскольку собственный вектор не является по определению нулевым, то

$$\lambda = \bar{\lambda}, \quad (16.16)$$

что означает вещественность λ .

Докажем теперь теорему для случая *симметричного* оператора (откуда будет вытекать утверждение теоремы) (симметричный оператор можно определить как оператор, имеющий в некотором базисе симметричную матрицу).

Рассмотрим матрицу A данного симметричного оператора в каком-либо ортонормированном базисе. Ясно, что эта матрица симметрична (см. выше). Формально расширим действие исследуемого оператора из линейного пространства над множеством действительных чисел в линейное пространство над множеством комплексных чисел (в силу определения 16.3). Получим некоторый «расширенный» оператор с той же матрицей A . Так как она симметрична и все ее элементы по начальному предположению вещественны, то она является матрицей эрмитова оператора, у которого (как только что показано) собственные значения действительны.

Из только что доказанной теоремы и следует, что все собственные значения любого самосопряженного оператора действительны. Теорема доказана.

Поскольку матрица самосопряженного оператора симметрична, то актуальна

Теорема 16.2. Самосопряженный оператор имеет, по крайней мере, один собственный вектор.

Доказательство. Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (16.17)$$

(I — единичная матрица) самосопряженного оператора в n -мерном евклидовом пространстве является, очевидно, многочленом степени n и имеет, в силу основной теоремы алгебры, по крайней мере, один корень λ_0 . В силу теоремы 16.1 этот корень действителен и поэтому является собственным значением оператора A . Тогда, если I — единичный оператор, то, в силу линейности, оператор $A - \lambda_0 I$ — вырожден, т.е. выполнено свойство (16.17). Если x — собственный вектор оператора A , соответствующий собственному значению λ_0 , то все ненулевые векторы, ему *сонаправленные*, переходят в нулевой вектор под действием оператора $A - \lambda_0 I$. Теорема доказана.

Заметим, что доказан более глубокий факт:

Теорема 16.3. Для каждого самосопряженного оператора существует, по крайней мере, одномерное *инвариантное подпространство*, порожденное собственным вектором.

Сразу же заметим, что *инвариантным подпространством* N для оператора A называется такое пространство объемлющего линейного пространства, что для любого элемента x из N выполнено включение $Ax \in N$. Таким образом, инвариантное подпространство, *порожденное собственным вектором*, — это все коллинеарные с данным собственным вектором векторы (т.е. все его линейные комбинации).

Действительно, построенное одномерное линейное подпространство (которое иногда называют «натянутым» на один вектор) является инвариантным, поскольку если под действием оператора $A - \lambda_0 I$ данное подпространство переходит в нулевой вектор, то под действием оператора A любой его вектор переходит в себя, только умноженный на число λ_0 .

Собственным подпространством, соответствующим характеристическому числу λ , называется множество всех векторов x таких, что

$$Ax = \lambda x.$$

Оно может быть многомерным (если корень λ — кратный).

Итак, у каждого самосопряженного оператора имеется одномерное инвариантное подпространство. Но ведь, вообще говоря, в объемлющем линейном пространстве существуют и другие векторы, не принадлежащие данному инвариантному подпространству. К таким, например, относятся векторы, перпендикулярные одному ненулевому (а значит, и любому) вектору одномерного инвариантного подпространства.

Повторим уже приведенное ранее определение 15.5.

Определение 16.4. *Ортогональным дополнением $P^\perp$ к линейному подпространству P объемлющего евклидова пространства L называется множество всех векторов $y \in L$ таких, что выполнено равенство*

$$(x, y) = 0 \quad \forall x \in P. \quad (16.18)$$

Теорема 16.4. Ортогональное дополнение любого инвариантного подпространства самосопряженного оператора также является инвариантным подпространством.

Доказательство. Если P — инвариантное подпространство линейного оператора A , то для любого $x \in P$ выполнено включение $Ax \in P$ (по определению инвариантного подпространства). Выберем произвольный вектор $y \in P^\perp$ и докажем, что $Ay \in P^\perp$.

Действительно, для вектора y справедливо равенство (16.18). Поскольку $\forall x \in P \quad Ax \in P$, то $(Ax, y) = 0$. Далее:

$$0 = (Ax, y) = (x, Ay), \quad (16.19)$$

то есть вектор Ay ортогонален любому вектору $x \in P$. Видно, что $Ay \in P^\perp$. Теорема доказана.

Теорема 16.5. Собственные векторы самосопряженного оператора, которые отвечают различным собственным значениям этого оператора, являются ортогональными.

Доказательство. Пусть λ_1 и λ_2 — два различных собственных значения самосопряженного оператора A , которым соответствуют два собственных вектора x и y . Это значит, что

$$\lambda_1(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \lambda_2(x, y). \quad (16.20)$$

Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(x, y) = 0$. Теорема доказана.

Далее заметим, что скалярное произведение в евклидовом пространстве естественным образом определяет *норму* элемента в данном пространстве по следующему правилу:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad (16.21)$$

для любого элемента x из данного евклидова пространства.

Отметим, что норма обладает следующими важными свойствами:

1. $\|x\| \geq 0$ для любого x , причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (*невырожденность*).

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для любого действительного числа λ .

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых элементов x и y данного пространства (*неравенство треугольника*).

Пространство, обладающее вышеприведенными свойствами 1–3, называется *нормированным*. Более того, в силу свойств скалярного произведения любое евклидово пространство является нормированным.

В самом деле, свойства 1 и 2 очевидны, а свойство 3 вытекает из неравенства Коши-Буняковского, которое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} |(x, y)| &\leq \|x\| \cdot \|y\|, \\ \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Обратное неверно: не всякое нормированное пространство может быть превращено в евклидово.

Кроме нормы самих элементов линейного (евклидова) пространства удобно вводить понятие нормы линейного оператора, действующего на данном линейном пространстве в себя.

Определение 16.5. *Нормой линейного оператора A называется число*

$$\|A\| = \sup_{\sqrt{(x, x)}=1} \sqrt{(Ax, Ax)} = \sup_{\sqrt{(x, x)}=1} \|Ax\| \quad (16.22)$$

(выше в евклидовом пространстве было введено понятие *нормы элемента x* (см. (16.21)).

Теорема 16.6. В любом конечномерном евклидовом пространстве любой оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов данного оператора.

Доказательство. Пусть оператор A — самосопряженный. Выше было показано, что у такого оператора имеется, по крайней мере, один собственный вектор и, следовательно, одномерное собственное подпространство P . Ортогональное дополнение $P^\perp$ этого инвариантного подпространства (в силу теоремы 16.4) само является инвариантным подпространством размерности, на единицу меньшей размерности объемлющего евклидова пространства.

Ограничим оператор A на подпространство $P^\perp$ следующим образом: будем действовать на инвариантном подпространстве $P^\perp$ в некотором смысле автономно, не трогая векторы из подпространства P . В силу инвариантности ортогонального дополнения $P^\perp$ такое ограничение действия самосопряженного оператора A корректно.

Итак, такое ограничение представляет собой самосопряженный оператор в $P^\perp$, который также обладает, по крайней мере, одним собственным вектором, лежащим в $P^\perp$.

Данный процесс можно успешно продолжить до конца и получить (в силу конечномерности объемлющего евклидова пространства) ортогональную систему из n собственных векторов оператора A . Нормируя их, получим ортонормированный базис объемлющего евклидова пространства, состоящий из собственных векторов самосопряженного оператора A .

Обратно, пусть теперь в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A . Поскольку по столбцам матрицы оператора A в данном базисе стоят образы базисных векторов под действием данного оператора (а они — собственные векторы), такая матрица является диагональной. Причем на диагонали стоят вещественные числа — собственные значения данного оператора. Поэтому данная матрица симметрична. Но оператор, имеющий в ортонормированном базисе симметричную матрицу, ввиду (16.8), очевидно, является самосопряженным. Теорема полностью доказана.

Задача из исторического прошлого.

Некто разыгрывал часы в лотерею. Если он продаст каждый билет по 75 коп., то будет в убытке столько рублей, сколько единиц в меньшем корне уравнения:

$$(x-1)^{1/2} + 6(x-1)^{1/4} = 16;$$

если же каждый билет продаст по столько копеек, сколько было всех билетов, то получит барыша:

$$\left\{ \left[\frac{a-1}{a^2-2a+1} + \frac{2(a-1)}{a^3-4} - \frac{4(a+1)}{a^2+a-2} - \frac{a}{a^2-3a+2} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27} \right\} \text{ рублей,}$$

где $a=3$. Сколько было всех билетов и что стоят часы?

Ответ. 100 бил., 92 руб.

17. Ортогональные операторы, их свойства. Ортогональные матрицы

Будем рассматривать линейные операторы в вещественном евклидовом пространстве V .

Определение 17.1. Линейный оператор A на вещественном евклидовом пространстве V называется *ортогональным*, если для любых элементов x и y из пространства V выполняется следующее свойство:

$$(Ax, Ay) = (x, y). \quad (17.1)$$

То есть ортогональный оператор сохраняет такую важную функцию, как скалярное произведение.

Теорема 17.1. Линейный оператор A ортогонален тогда и только тогда, когда существует оператор A^{-1} и выполняется равенство:

$$A^* = A^{-1}. \quad (17.2)$$

Доказательство. Пусть A — ортогональный оператор. Тогда, по определению, $(Ax, Ay) = (x, y)$ для любых элементов x и y вещественного евклидова пространства. Это равенство можно переписать

сать с использованием сопряженного к данному оператору A^* следующим образом:

$$(Ax, Ay) = (x, A^*Ay) = (x, y), \quad (17.3)$$

откуда, в силу линейности, видно, что при всех x и y должно выполняться равенство

$$((A^*A - I)x, y) = 0. \quad (17.4)$$

Зафиксируем в этом равенстве x , и, беря произвольный элемент y , получим, что в силу свойства невырожденности скалярного произведения полученный линейный оператор $A^*A - I$ вынужден действовать так:

$$(A^*A - I)x = 0 \quad (17.5)$$

для *любого* фиксированного элемента x .

Тем самым оператор $A^*A - I$ является нулевым. То есть $A^*A = I$, а, значит, $A^* = A^{-1}$.

Обратно, пусть теперь $A^* = A^{-1}$. Тогда, очевидно, $AA^* = A^*A = I$. По определению оператора, сопряженного данному, должно быть выполнено равенство:

$$(Ax, Ay) = (x, A^*Ay) = (x, Iy) = (x, y), \quad (17.6)$$

что и подтверждает, что оператор A — ортогональный. Теорема полностью доказана.

Заметим, что в силу данной теоремы определитель матрицы любого ортогонального оператора, действующего в вещественном евклидовом пространстве, всегда по модулю равен 1, поскольку

$$\det AA^* = \det A^2 = \det I = 1. \quad (17.7)$$

Как мы уже говорили, каждую вещественную матрицу можно рассматривать в качестве матрицы некоторого линейного оператора в некотором ортонормированном базисе вещественного евклидова пространства. Поэтому следующее определение становится естественным и связывает теорию ортогональных операторов с алгеброй матриц.

Определение 17.2. Матрица A называется *ортогональной*, если

$$A^T A = A A^T = I, \quad (17.8)$$

где A^T — матрица, транспонированная к данной.

Таким образом, любая ортогональная матрица является матрицей некоторого ортогонального оператора, действующего в вещественном евклидовом пространстве.

Для доказательства последнего факта следует заметить, что матрица, транспонированная к данной, является матрицей оператора, сопряженного к данному, в том же базисе.

Другими словами, если A — матрица ортогонального оператора в данном ортонормированном базисе, то A^T — матрица, транспонированная к данной, — обратная к матрице A , а также является матрицей оператора, сопряженного данному оператору.

На матричном языке это выглядит так:

$$A = A^* = A^{-1} = A^T. \quad (17.9)$$

Какое самое важное свойство ортогональности матрицы? Для того чтобы выполнялось свойство (17.8), необходимо и достаточно, чтобы скалярные квадраты строк или столбцов матрицы равнялись 1, а скалярное произведение любых двух различных строк или любых двух различных столбцов данной матрицы равнялось 0.

Действительно, чтобы получить свойство (17.8), необходимо умножить i -ю строку матрицы A на j -й столбец матрицы A^T и получить 1 в случае, если $i = j$, и 0 в случае, если $i \neq j$. Но это означает возведение в скалярный квадрат как вектора строки (столбца) матрицы A в первом случае или скалярное произведение различных строк (столбцов) во втором случае.

С геометрической точки зрения это означает, что у ортогональной матрицы по столбцам стоят векторы, длина которых равна 1, и, кроме того, столбцы взаимно перпендикулярны. Значит, эти векторы-столбцы ортогональной матрицы образуют ортонормированную систему координат в данном вещественном линейном пространстве.

Но данные векторы-столбцы являются образами векторов базиса, в котором записана данная ортогональная матрица данного ортогонального оператора, под действием самого себя.

Таким образом, можно сделать важный геометрический вывод: любой ортогональный оператор так действует в веществен-

ном евклидовом пространстве, что сохраняет углы между любыми двумя прямыми, плоскостями и т.д.

В качестве примера рассмотрим возможный вид ортогональной матрицы на двумерной плоскости. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (17.10)$$

На ее 4 элемента должны накладываться следующие 3 условия:

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0. \quad (17.11)$$

Поэтому общий вид ортогональной матрицы должен зависеть от $4 - 3 = 1$ независимого параметра.

В силу первого уравнения (17.11) можно сделать замену $a = \cos \varphi$, $c = \sin \varphi$. Тогда имеем следующую систему для определения b и d :

$$b^2 + d^2 = 1, \quad b \cos \varphi + d \sin \varphi = 0, \quad (17.12)$$

которая имеет следующее решение:

$$d = \pm \cos \varphi, \quad b = \mp \sin \varphi. \quad (17.13)$$

Другими словами, можно получить общий вид ортогональной матрицы второго порядка:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \mp \sin \varphi \\ \sin \varphi & \pm \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (17.14)$$

Данная матрица в случае верхних знаков определяет поворот плоскости Oxy на угол φ (положительным является направление поворота от оси Ox к оси Oy), а в случае нижних знаков — симметрию плоскости Oxy относительно прямой, проходящей через начало координат под углом $\varphi/2$ к оси Ox . Последнее, например, подтверждает факт сохранения углов между любыми двумя прямыми на плоскости при повороте всей плоскости.

Несколько слов об ортогональных матрицах третьего порядка. В предыдущем (двумерном) случае на 4 коэффициента были наложены 3 соотношения. В трехмерном случае таких соотношений будет 6:3 соотношения, характеризующие единичную длину векторов-столбцов (векторов-строк) плюс 3 соотношения

на взаимную перпендикулярность этих столбцов (строк). Таким образом, остаются независимыми лишь $9 - 6 = 3$ параметра, характеризующие произвол в выборе ортогональной матрицы третьего порядка.

Последний факт имеет важную геометрическую интерпретацию: чтобы совместить одну декартову систему координат с другой (с совпадающими началами координат и одинаковой ориентации), нужно совершить, вообще говоря, три независимых поворота.

Задача из исторического прошлого.

Если двузначное число, в котором десятков более, чем единиц, на величину корня уравнения:

$$3x^6 - 7x^3 = 136,$$

разделить на число его десятков, то в частном получится удвоенное число единиц, а в остатке — значение дроби

$$\frac{a^2 - 6a + 5}{a^2 - 9,2a + 21}$$

при $a = 5$. Определить двузначное число.

Ответ. 75.

18. Понятие о тензорах

В различных областях естествознания часто встречаются объекты, зависящие от определенного количества координат, измеряемых в различных системах отсчета. При этом в некотором смысле в общем и целом сама структура объекта не зависит от каждой конкретной системы координат. От нее зависит лишь представление самого объекта.

Так, например, было введено понятие вектора, но пока только как наглядного объекта (для простоты, как некоторого направленного отрезка). Но ведь координаты вектора при их преобразовании, вообще говоря, изменяются, хотя сам вектор действительно инвариантен (хотя бы, для простоты понимания, как направленный отрезок).

Для начала дадим формальное определение тензора в декартовой системе координат, чтобы понять общую идеологию новых геометрических объектов.

Определение 18.1. Тензором T типа (p, q) в n -мерном линейном пространстве V^n называется геометрический объект, который:

1) в каждом базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ n -мерного линейного пространства V^n задается n^{p+q} координатами

$$T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} (i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q = 1, 2, \dots, n); \quad (18.1)$$

2) обладает таким свойством, что его координаты $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ связаны со старыми координатами $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ следующим соотношением:

$$T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = a_{i_1}^{i_1'} \dots a_{i_p}^{i_p'} a_{j_1}^{j_1'} \dots a_{j_q}^{j_q'} T_{i_1' \dots i_p'}^{j_1' \dots j_q'} \quad (18.2)$$

(здесь и далее, если в формуле внизу и вверху имеются повторяющиеся индексы, то, по определению, по ним производится суммирование, хотя знак суммы в данном случае не пишется; так, в формуле (18.2) производится суммирование по индексам $i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q$).

Здесь (a_i') — матрица перехода от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{e_i'\}_{i=1}^n$; (a_j') — обратная ей матрица перехода от базиса $\{e_i'\}_{i=1}^n$ к базису $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Число $p + q$ называется рангом тензора $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$.

Введем следующие основные алгебраические операции над тензорами:

1) Пусть T и S — два тензора одного типа (p, q) , а $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ и $S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ — их координаты в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Их суммой $T + S$ (в частности, разностью $T - S$) называется тензор типа (p, q) с координатами

$$T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} (T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} - S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}) \text{ в базисе } \{e_i\}_{i=1}^n. \quad (18.3)$$

2) Пусть T — тензор типа (p, q) с координатами $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$, а λ — произвольное вещественное (комплексное) число.

Произведением тензора T на число λ называется тензор λT типа (p, q) с координатами

$$\lambda T_{i_1 \dots j_p}^{j_1 \dots j_q} \text{ в базисе } \{e_i\}_{i=1}^n. \quad (18.4)$$

3) Пусть T — тензор типа (p, q) с координатами $T_{i_1 \dots j_p}^{j_1 \dots j_q}$ в данном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$, а S — тензор типа (r, s) с координатами $S_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s}$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Произведением $E = TS$ этих тензоров называется тензор типа $(p+r, q+s)$ с координатами

$$E_{i_1 \dots j_p k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_q l_1 \dots l_s} = T_{i_1 \dots j_p}^{j_1 \dots j_q} \cdot S_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s} \quad (18.5)$$

(полагают $k_1 = i_{p+1}, \dots, k_r = i_{p+r}; l_1 = j_{q+1}, \dots, l_s = j_{q+s}$) в данном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

4) Пусть T — тензор типа (p, q) , где $p \neq 0$ и $q \neq 0$, с координатами $T_{i_1 \dots j_p}^{j_1 \dots j_q}$. Произведем *свертывание* (суммирование по повторяющимся одновременно вверху и внизу индексам) тензора по индексам i_m и j_k с некоторыми номерами m, k ($1 \leq m \leq p, 1 \leq k \leq q$) путем замены данных индексов индексом α , по которому производится суммирование:

$$T_{i_1 \dots \alpha \dots j_p}^{j_1 \dots \alpha \dots j_q}. \quad (18.6)$$

Полученный тензор типа $(p-1, q-1)$ называется *сверткой* данного тензора T .

Примерами тензоров являются *векторы* (тензоры типа $(1, 0)$), *дифференциальные формы* (тензоры типа $(0, 1)$), *матрицы линейного оператора* в некотором базисе (тензоры типа $(1, 1)$).

Задача из исторического прошлого.

Ученик, перемножая два числа, из которых одно было более другого на величину большего корня уравнения:

$$5z - 4z^{1/2} = 33,$$

ошибся, приняв цифру сотен 7 в одном из частных произведений за 4. Повторяя действие делением полученного результата на меньшего из множителей, он получил в остатке истинное значение дроби

$$\frac{x^2 - 18x + 45}{x^2 - 29x + 210}$$

при $x=15$, а в частном столько единиц, сколько их в сумме двух чисел, разность которых 7, а произведение — 120. Найти перемножаемые числа.

Ответ. 35 и 26.

II. Введение в математический анализ

19. Множества. Операции с множествами. Декартово произведение множеств. Отображения множеств. Мощность множества

Ни в одном учебнике нельзя найти определение множества. Это на самом деле очень глубокая, даже философская категория. И мы не собираемся здесь уточнять данную категорию. Скажем лишь, что для работы с ней мы будем использовать лишь понятие множества. Данное понятие не требует точной логической завершенности.

Итак, можно говорить о множестве точек, множестве чисел и т.д. Множества обычно обозначаются прописными буквами A , B , ..., а элементы множеств — малыми буквами a , b , ...

Утверждение «элемент a принадлежит множеству A » обычно записывается как $a \in A$.

Утверждение «элемент a не принадлежит множеству A » записывается как $a \notin A$.

Если все элементы множества A входят и в множество B , то A называется *подмножеством* множества B и пишется $A \subset B$.

Здесь уместно сделать одно замечание. Во избежание логических противоречий не следует писать $A \subset B$, если A является элементом множества B , и $a \in A$, если a состоит из элементов, каждый из которых входит во множество B .

По определению *пустое* множество $\emptyset$ — это множество, не содержащее ни одного элемента. Более того, также по определению считается, что пустое множество входит в любое множество, в том числе и в себя.

Пусть A и B — два произвольных множества. Их *объединением* $A \cup B$ называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.

Пересечением $A \cap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и A , и B .

Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A , не содержащихся во множестве B .

Симметрической разностью $A \Delta B$ называется множество

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \quad (19.1)$$

Декартовым произведением $A \times B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар элементов, где на первом месте стоит элемент из A , а на втором — элемент из B :

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}. \quad (19.2)$$

Здесь символ « $|$ » (иногда « $:$ ») обозначает «таких, что».

Множество $A \times A$ называется *декартовым квадратом* множества A . Аналогично можно определить любую натуральную степень множества.

Говорят, что на множестве A *определено отображение* f , принимающее значения из B , если каждому элементу $a \in A$ поставлены в соответствие некоторые элементы (в том числе и пустое множество) $b \in B$. Пишут

$$f: A \rightarrow B. \quad (19.3)$$

Каждый из элементов $b = f(a)$ из B , отвечающий элементу $a \in A$, называется *образом элемента a* при отображении f .

Множество таких элементов $a \in A$, образом которых является данный элемент $b \in B$, называется *прообразом элемента b* и обозначается $f^{-1}(b)$.

Пусть $X \subset A$, тогда множество $\{f(x) : x \in X\}$ называется *образом множества X* и обозначается $f(X)$.

Для любого $Y \subset B$ множество

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\} \quad (19.4)$$

называется *полным прообразом* множества Y .

Образование $f: A \rightarrow B$ называется *сюрекцией* (или отображением «на»), если $f(A) = B$, т.е. для каждого элемента множества B его полный прообраз не пуст.

Образование $f: A \rightarrow B$ называется *инъекцией*, если для любых различных элементов a_1 и a_2 из A выполняются следующие условия: $b_1 = f(a_1)$ и $b_2 = f(a_2)$, и $b_1 \neq b_2$ (то есть различным элементам a_1, a_2 соответствуют различные элементы b_1, b_2).

Образование $f: A \rightarrow B$ называется *биекцией* (или *взаимнооднозначным*), если оно является одновременно и сюрекцией, и инъекцией.

Множества могут быть конечными и бесконечными.

Бесконечное множество называется *счетным*, если его элементы можно взаимнооднозначно сопоставить со всеми натуральными числами. Другими словами, счетные множества можно пересчитать с помощью натуральных чисел, которые, в свою очередь, в школьном курсе математики так и определяются.

Примерами счетных множеств являются множество целых чисел и множество рациональных чисел.

Выделим некоторые элементарные свойства счетных множеств.

1) Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Действительно, если все множество можно пересчитать, то для пересчета его подмножества достаточно пересчитать те натуральные числа, которые использовались для пересчета элементов подмножества как элементов всего множества.

2) Объединение любого конечного или счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Для пересчета конечного количества n счетных множеств достаточно записать их слева направо в виде полубесконечной полосы ширины n : первые элементы под первыми, вторые — под вторыми и т.д. Получится действительно полубесконечная полоса ширины n , слева ограниченная, а справа — уходящая на бесконечность, поскольку каждое из n множеств счетно. Далее, всю совокупность элементов, очевидно, можно пересчитать «змейкой»:

$$\begin{aligned} a_{11} \rightarrow a_{12} \rightarrow a_{21} \rightarrow a_{31} \rightarrow a_{22} \rightarrow a_{13} \rightarrow \\ \rightarrow a_{14} \rightarrow a_{23} \rightarrow a_{32} \rightarrow a_{41} \rightarrow a_{51} \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (19.5)$$

Для пересчета же счетного количества счетных множеств достаточно записать их подобным же образом слева направо в виде полубесконечного угла: первые элементы под первыми, вторые — под вторыми и т.д. Получится действительно полубесконечный угол, слева и сверху ограниченный, а справа и снизу — уходящий на бесконечность, поскольку каждое из множеств счетно и самих множеств тоже счетное множество. Далее, всю совокупность элементов можно также пересчитать «змейкой» (19.5), подобно предыдущему примеру.

3) Во всяком бесконечном множестве есть счетное подмножество.

Действительно, если бы это было не так, то мы за конечное число шагов смогли бы пересчитать все данное бесконечное множество, что противоречит условию.

Если два данных множества конечны, то их можно сравнивать по количеству элементов. Если же они бесконечны, то сравнение этих множеств вполне разумно проводить через взаимнооднозначное сопоставление их элементов.

Два множества называются *эквивалентными*, если между ними существует взаимнооднозначное отображение.

Если два множества эквивалентны, то говорят, что они имеют *одинаковую мощность*.

Теорема 19.1. Если к данному бесконечному множеству прибавить дополнительное счетное множество, то его мощность не изменится.

Доказательство. Действительно, если данное множество бесконечно, то у него есть счетное подмножество. Объединим это счетное подмножество с дополнительным счетным множеством, получив по-прежнему счетное множество, которое можно взаимнооднозначно сопоставить с дополнительным множеством.

Таким образом, осталось построить взаимнооднозначное соответствие оставшихся элементов данного бесконечного множества. Но эта задача тождественна, поскольку каждому оставшемуся элементу мы сопоставим его самого. Теорема доказана.

Примером несчетного множества может служить множество всех действительных чисел, заключенных между 0 и 1, то есть отрезок $[0, 1]$.

В качестве простого следствия из теоремы 19.1 можно сделать следующее замечание: замкнутый отрезок $[0, 1]$ и открытый интервал $(0, 1)$ имеют одинаковую мощность.

Итак, мощность конечного множества — это характеристика числа элементов данного множества.

Есть также мощность счетного множества и мощность множества $[0, 1]$, так называемая *мощность континуума*.

Задача из исторического прошлого.

Некоторый капитал, будучи отдан в рост, через год обратился в такое число рублей, которое представляется трехзначным, причем числа его сотен, единиц и десятков суть последовательные четные числа, из которых последнее удовлетворяет уравнению:

$$2x^{2/3} + 3x^{1/3} = 14.$$

Если бы этот капитал увеличить на 150 руб., то он, будучи отдан в рост 2% менее прежнего, через год обратился бы в число рублей, которое также бы представлялось бы трехзначным, но имеющим следующие свойства: сотен и единиц в нем поровну, а десятков вдвое менее; если же из него вычесть произведение числа сотен на число единиц, то в разности получится 600. Как велик капитал и под сколько процентов он был отдан?

Ответ. 450 руб., под 8%.

20. Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики

Наиболее используемая теоретико-множественная структура в математике и естествознании вообще является множеством всех действительных чисел.

На этом множестве могут быть определены так называемые отображения вещественных чисел или, более конкретно, функции действительного (вещественного) переменного.

Таким образом, в последнем случае множество вещественных чисел R — это область определения X некоторой независимой переменной x .

Вообще, термин «переменная» является относительным. Возникает естественный вопрос: чем отличаются величины постоянные, параметрические и переменные? Постоянные величины естественно понимать как привязанные к какому-то своему конкретному значению, не изменяющемуся в процессе данного исследования. А вот переменные и параметрические величины очень тесно взаимосвязаны.

Например, параметрическая величина по сути является переменной, но в процессе исследования может быть фиксирована. Более

того, переменная величина может рассматриваться в качестве параметрической, но область ее изменения может быть сколь угодно широкой.

Поэтому в каждом конкретном случае надо четко оговаривать характер всех величин, используемых при данном исследовании.

По отношению к числовым (действительным) функциям обычно используется такая терминология: независимая переменная пробегает область определения, а значение данной функции, соответственно, — область значений.

Пусть даны две переменные x и y с областями изменения X и Y . Тогда:

Определение 20.1. Переменная y называется *функцией f от переменной x* в области X , если каждому значению x из X по некоторому правилу ставится в соответствие не более одного определенного значения y из Y .

Обозначение: $y = f(x)$.

В данном случае область X называется областью определения функции, а переменная x — (независимым) аргументом функции.

Если каждому значению x поставлено в соответствие несколько (или даже бесконечно много значений y), то функция называется *многозначной* (это более общий подход к определению понятия функции).

Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой области X и пусть Y — множество принимаемых ею значений.

Возьмем некоторое $y = y_0$ из Y , тогда возможно, что в области X найдется одно или несколько таких значений x_0 , что $f(x_0) = y_0$.

Возможно, каждому значению y из Y ставится в соответствие одно или несколько значений x из X .

Этим соответствием в области Y может быть определено однозначное (или многозначное) отображение $x = g(y)$, называемое *обратным* для функции $y = f(x)$.

Пусть функция $z = g(y)$ определена в некоторой области Y , а функция $y = f(x)$ — в некоторой области X и верно следующее включение:

$$\{f(x) | x \in X\} \subset Y. \quad (20.1)$$

Тогда следующим образом можно построить так называемую *сложенную функцию* $z = g(f(x))$, а именно:

по данному x из X находим $y = f(x)$ из Y , а затем по этому y из Y находят $z = g(y)$ и считают этот z соответствующим данному x .

Графиком функции $y = f(x)$ называется кривая на плоскости с декартовой системой координат Oxy , описываемая точкой $A(x, y)$ с абсциссой x и ординатой $y = f(x)$, т.е.

$$A = A(x, f(x)). \quad (20.2)$$

Пример. Является ли геометрическое место точек на плоскости Oxy , задаваемое уравнением окружности радиуса 2:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (20.3)$$

графиком какой-либо функции?

Ответ: нет, поскольку, например, началу координат — точке $(0, 0)$ на плоскости соответствуют две точки данной линии (окружности), а именно

$$(0, 2) \text{ и } (0, -2). \quad (20.4)$$

Это произошло по причине того, что данное уравнение на отрезке $[-2, 2]$ нельзя однозначно разрешить относительно y . Действительно, имеются два выражения переменной y через x :

$$y = -\sqrt{4-x^2}, \quad y = \sqrt{4-x^2}. \quad (20.5)$$

Числовая функция $y = f(x)$ называется *четной*, если:

область определения функции симметрична относительно точки O числовой оси. Это означает, что если точка x_0 принадлежит области определения функции, то и точка $-x_0$ также принадлежит области определения функции;

для любого значения независимой переменной, принадлежащего области определения функции, выполняется следующее равенство

$$f(x) = f(-x). \quad (20.6)$$

Числовая функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если:

область определения функции симметрична относительно точки O числовой оси (см. предыдущее определение);

для любого значения независимой переменной, принадлежащего области определения функции, выполняется следующее равенство

$$f(-x) = -f(x). \quad (20.7)$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат, т.е. *центрально симметричен*.

Сумма, разность, произведение и частное двух четных функций есть четная функция.

Сумма и разность нечетных функций — нечетная функция, а произведение и частное — четная функция.

Обычно доказательство четности (или, соответственно, нечетности) функции $y = f(x)$ проводится следующим образом. Выясняется симметричность области определения функции $y = f(x)$ относительно точки O числовой оси. Если область определения функции не симметрична относительно точки O , то функция не является ни четной, ни нечетной. Если же область определения функции симметрична относительно точки O , то переходят к проверке справедливости соответствующих равенств.

Если же не выполняется ни одно из равенств (20.6), (20.7), то функция по определению не является ни четной, ни нечетной.

В математике имеется не одно определение периодических функций. Ограничимся следующим.

Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом T (T — некоторое действительное число, отличное от нуля), если

для любого значения аргумента x из области определения функции значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения функции;

при любом x из области определения функции выполнено следующее условие:

$$f(x) = f(x + T). \quad (20.8)$$

Обычно под *периодом* функции понимают наименьший из всех положительных периодов (если такой существует). В этом случае все периоды функции, очевидно, кратны ее наименьшему периоду, т.е.

$$T = kT_0, \quad (20.9)$$

где T_0 — наименьший положительный период функции, а k — целое число, отличное от нуля.

Доказательство периодичности (или непериодичности) функции заключается в нахождении ее периода или в доказательстве того, что не существует числа T , удовлетворяющего вышеприведенным условиям.

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором числовом промежутке (a, b) . Она называется *возрастающей в промежутке* (a, b) , если для любой пары значений $x_1, x_2 \in (a, b)$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Если из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функцию называют *неубывающей*.

Функция $f(x)$ называется *убывающей в промежутке* (a, b) , если для любой пары значений $x_1, x_2 \in (a, b)$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Если из нера-

венства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функцию называют *невозрастающей*.

Возрастающие и убывающие функции называют *монотонными* функциями.

В данном разделе используется понятие *точек экстремума*. О них — см. далее.

Может случиться, что функция $f(x)$ не монотонна во всей области своего определения, однако при подходящем разбиении области определения функции на некоторое (возможно, бесконечное) число непересекающихся промежутков оказывается, что функция будет монотонной на каждом из этих промежутков (на одних — убывающей, на других — возрастающей). Такие промежутки называют *промежутками монотонности* такой функции.

Функция, задаваемая формулой

$$y = ax + b, \quad (20.10)$$

где a и b — действительные числа, называется *линейной*. При $b = 0$ функция $y = ax + b$ принимает вид $y = ax$ и называется *прямой пропорциональностью*. Число a называется *коэффициентом пропорциональности* (рис. 20.1).

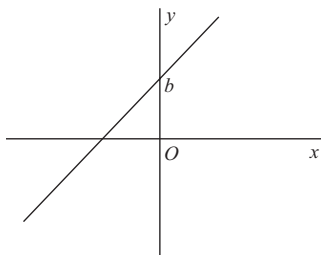


Рис. 20.1

Область определения этой функции — множество всех действительных чисел R . Множество значений при $a \neq 0$ — также R , а при $a = 0$ — единственная точка $y = b$.

Такая функция при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ не является ни четной, ни нечетной. При $a = 0$ (b — любое) функция является четной. При $b = 0$ функция является нечетной.

Как будет показано далее, линейная функция является также *непрерывной* и *дифференцируемой* функцией. При этом если $a > 0$, то функция возрастает, а если $a < 0$, то функция убывает; если же $a = 0$, то функция (тождественно) постоянна. Она не имеет точек *экстремума* (о точках экстремума см. далее).

График линейной функции есть прямая линия. Она пересекает ось Oy в точке $M = (0, b)$, наклонена к оси Ox под углом, тангенс которого равен a . Если $a > 0$, то угол наклона — острый (рис. 20.1), а если $a < 0$, то угол наклона — тупой. Заметим, что если угол наклона равен 90° , то уравнение данной прямой записывается в виде $x = c$.

Функция, задаваемая формулой

$$y = k/x, \quad (20.11)$$

где $k \neq 0$ — действительное число, называется *обратной пропорциональностью*. Обратная пропорциональность характеризуется следующим свойством: с увеличением (уменьшением) значения x в несколько раз соответствующее значение y уменьшается (увеличивается) во столько же раз (рис. 20.2).

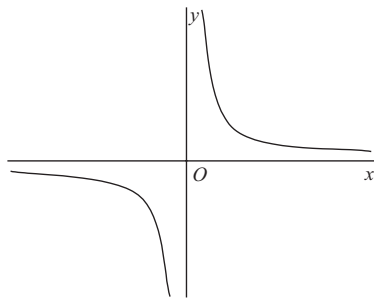


Рис. 20.2

Область определения данной функции — множество всех действительных чисел, кроме нуля. Множество значений — оно же.

Такая функция является нечетной, и ее график симметричен относительно начала координат.

Как будет показано далее, она непрерывна в промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и дифференцируема во всех точках числовой оси

кроме $x = 0$. Если $k > 0$, то функция убывает (рис. 20.2); если $k < 0$, то она возрастает. У нее нет точек экстремума (о точках экстремума см. далее). Ее график называется *гиперболой* и состоит из двух ветвей.

Функция, задаваемая формулой

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (20.12)$$

где $a \neq 0$, b , c — действительные числа, называется *квадратичной*.

Область определения данной функции — множество всех действительных чисел.

Функция $y = ax^2 + bx + c$ в некотором смысле является *функцией общего вида*. Если же $b = 0$, то $y = ax^2 + c$ является четной функцией.

Как будет показано далее, такая функция является непрерывной во всех точках числовой оси. Она дифференцируема во всей своей области определения. При этом она имеет экстремум в точке $x = -b/2a$ (рис. 20.3) (о точках экстремума см. далее).

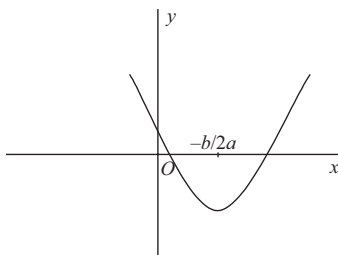


Рис. 20.3

Если $a > 0$, то в точке экстремума $x = -b/2a$ она имеет минимум. При $x < -b/2a$ эта функция монотонно убывает, а при $x > -b/2a$ — монотонно возрастает. Если $a < 0$, то в точке экстремума $x = -b/2a$ она имеет максимум. При $x < -b/2a$ она монотонно возрастает, а при $x > -b/2a$ — монотонно убывает. Точка графика квадратичной функции с абсциссой $x = -b/2a$ и ординатой $y = -(b^2 - 4ac)/4a$ называется *вершиной параболы*.

Множеством значений рассматриваемой функции является следующее множество:

$$[-(b^2 - 4ac)/4a, +\infty), \text{ при } a > 0 \text{ и}$$

$$(-\infty, -(b^2 - 4ac)/4a], \text{ при } a < 0. \quad (20.13)$$

График рассматриваемой функции пересекается с осью Oy в точке $y = c$. В случае, если $b^2 - 4ac > 0$, график квадратичной функции пересекает ось Ox в следующих двух точках:

$$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a; \quad (20.14)$$

если $b^2 - 4ac = 0$, график квадратичной функции касается оси Ox в точке $x = -b/2a$; если $b^2 - 4ac < 0$, пересечения графика этой функции с осью Ox нет. Более того, ее график симметричен относительно прямой $x = -b/2a$.

Функция вида $y = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, называется *степенной*. Рассмотрим свойства степенной функции с натуральным показателем:

$$y = x^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (20.15)$$

Область определения такой функции — множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$.

Множество ее значений также совпадает с $\mathbb{R}$, если $n = 2k + 1$ (т.е. в случае нечетной степени (рис. 20.4)); если же степень четная (т.е. $n = 2k$), то множество ее значений — неотрицательная полуось $[0, +\infty)$.

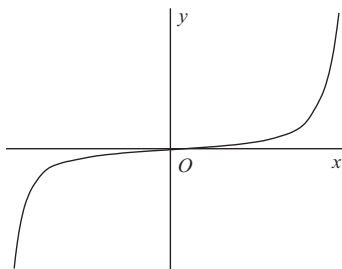


Рис. 20.4

При $x = 0$ значение этой функции равно 0. Значит, ее график проходит через начало координат — точку $O = (0,0)$.

Отметим промежутки знакопостоянства рассматриваемой функции:

$$y > 0 \text{ при } n = 2k \ (x \neq 0) \text{ и при } n = 2k + 1 \text{ и } x > 0;$$

$$(20.16)$$

$$y < 0 \text{ при } n = 2k + 1 \text{ и } x < 0.$$

Данная функция является четной при $n = 2k$ и нечетной — при $n = 2k + 1$.

Как будет показано далее, рассматриваемая функция непрерывна на всей числовой прямой, а также везде дифференцируема.

Если $n = 2k$, то она имеет один экстремум (минимум) в точке $x = -b/2a$; если же $n = 2k + 1$, то она экстремумов не имеет. При $x < 0$ и $n = 2k$ она убывает, а при $n = 2k + 1$ — возрастает. При $x > 0$ такая функция всегда возрастает.

Рассмотрим свойства степенной функции с целым отрицательным показателем:

$$y = x^{-n} = 1/x^n, \ n \in \mathbb{N}. \quad (20.17)$$

Область определения такой функции — множество всех действительных чисел, кроме нуля: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Множество ее значений также совпадает с $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, если $n = 2k + 1$ (т.е. в случае нечетной степени); если же степень четная (т.е. $n = 2k$), то множество ее значений — положительная полуось $(0, +\infty)$ (рис. 20.5).

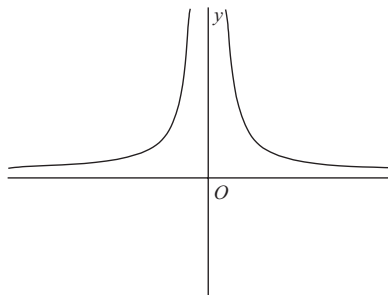


Рис. 20.5

Рассматриваемая функция нулей не имеет, т.е. всегда $y \neq 0$. Отметим промежутки ее знакопостоянства:

$y > 0$ при $n = 2k$ и при $n = 2k + 1$ и $x > 0$;

$y < 0$ при $n = 2k + 1$ и $x < 0$. (20.18)

Она является четной при $n = 2k$ и нечетной — при $n = 2k + 1$.

Как будет показано далее, рассматриваемая функция непрерывна на множестве $R \setminus \{0\}$, а также на этом же множестве дифференцируема.

При любом $x \neq 0$ и при $n = 2k + 1$ эта функция убывает; при $n = 2k$ она возрастает, если $x < 0$ и убывает, если $x > 0$.

Рассмотрим свойства степенной функции с дробным показателем:

$$y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}, \quad n \in N, \quad n \neq 1. \quad (20.19)$$

Областью определений этой функции является множество неотрицательных чисел $[0, +\infty)$, если $n = 2k$ (рис. 20.6) и все действительные числа, если $n = 2k + 1$.

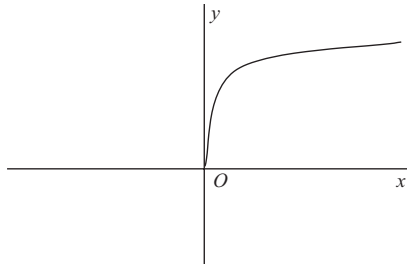


Рис. 20.6

Множество значений совпадает с множеством определения: множество неотрицательных чисел $[0, +\infty)$, если $n = 2k$, и все действительные числа, если $n = 2k + 1$.

При $x = 0$ значение нашей функции равно 0. Значит, ее график проходит через начало координат — точку $O(0, 0)$.

Выделим промежутки знакопостоянства данной функции:

$y > 0$ при $n = 2k$ или при $n = 2k + 1$ и $x > 0$;

$y < 0$ при $n = 2k + 1$ и $x < 0$.

Функция $y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ при $n = 2k$ не является ни четной, ни нечетной; а при $n = 2k + 1$ такая функция является нечетной.

Как будет показано далее, эта функция непрерывна на множестве неотрицательных чисел при $n = 2k$ и на множестве всех действительных чисел при $n = 2k + 1$. Она имеет производную на всем множестве положительных чисел при $n = 2k$ и на множестве $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ при $n = 2k + 1$.

При $n = 2k + 1$ она всегда возрастает на всей своей области определения.

Функция вида

$$y = a^x, \quad (20.21)$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, называется *показательной*.

Область определения такой функции — множество всех действительных чисел. Множество значений — множество всех положительных чисел (рис. 20.7).

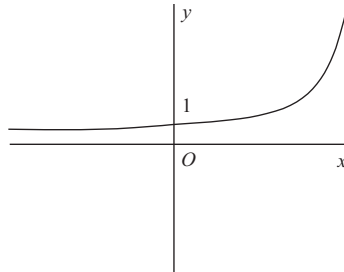


Рис. 20.7

Эта функция не является ни четной, ни нечетной функцией.

Выделим промежутки знакопостоянства нашей функции:

$a > 1$, то $a^x > 1$ при $x > 0$ и $a^x < 1$ при $x < 0$ (рис. 20.7);

$0 < a < 1$, то $a^x < 1$ при $x > 0$ и $a^x > 1$ при $x < 0$.

Если $x = 0$, то значение данной функции равно 1. Ее график пересекает ось Oy в одной точке $M(0, 1)$.

Как будет показано далее, рассматриваемая функция непрерывна и имеет производную при любом значении своего аргумента. Более того, при $a > 1$ она возрастает, а при $0 < a < 1$ — убывает.

Функция вида

$$y = \log_a x, \quad (20.23)$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, называется *логарифмической*.

Область определения такой функции — множество всех положительных чисел. Множество ее значений — множество всех действительных чисел (рис. 20.8).

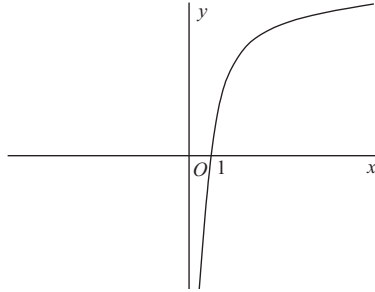


Рис. 20.8

Эта функция не является ни четной, ни нечетной функцией.

Отметим промежутки ее знакопостоянства:

$$a > 1, \text{ то } \log_a x > 0 \text{ при } x > 1 \text{ и } \log_a x < 0 \text{ при } x < 1; \quad (20.24)$$

$$0 < a < 1, \text{ то } \log_a x < 0 \text{ при } x > 1 \text{ и } \log_a x > 0 \text{ при } x < 1.$$

Если $x = 1$, то значение функции равно 0. Ее график пересекает ось Ox в одной точке $M(1, 0)$.

Как будет показано далее, наша функция непрерывна и имеет производную при любом значении аргумента из области определения функции. Более того, она при $a > 1$ возрастает, а при $0 < a < 1$ — убывает.

Перейдем далее к краткому описанию тригонометрических функций.

Ордината точки, полученной при повороте около начала координат $O(0, 0)$ на угол α против часовой стрелки единичного начального радиуса (вектора с координатами $\{1, 0\}$), называется *синусом* угла α .

Обозначение: $\sin \alpha$.

При этом абсцисса данной точки называется *косинусом* угла α .

Обозначение: $\cos \alpha$.

Область определения функции $y = \sin x$ — множество всех действительных чисел. Множество значений — числовой промежуток $[-1, 1]$ (рис. 20.9).

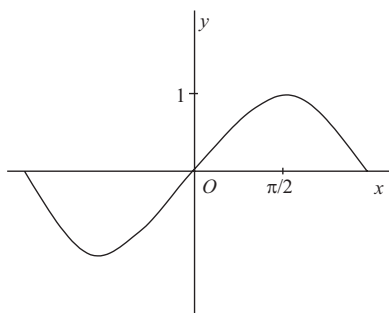


Рис. 20.9

Такая функция является нечетной. Она — периодическая, наименьший положительный период данной функции равен 2π , т.е.

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x. \quad (20.25)$$

Ее график пересекает ось Ox при $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отметим промежутки знакопостоянства данной функции:

$$y > 0 \text{ при } x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (20.26)$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Как будет показано далее, данная функция непрерывна на всей своей области определения и имеет производную при любом значении аргумента.

Она возрастает при $x \in (-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, и убывает при $x \in (\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рассматриваемая функция имеет минимум при $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и максимум при $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

График ее функции называется *синусоидой*.

Отметим далее некоторые свойства функции $y = \cos x$ (рис. 20.10).

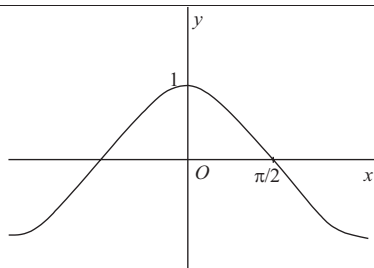


Рис. 20.10

Область ее определения — множество всех действительных чисел. Множество значений — числовой промежуток $[-1, 1]$.

Эта функция является четной. Она — периодическая, наименьший положительный ее период равен 2π , т.е.

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x. \quad (20.27)$$

Ее график пересекает ось Ox при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отметим промежутки знакопостоянства данной функции:

$$y > 0 \text{ при } x \in (-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n), n \in \mathbb{Z};$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}.$$

Как будет показано далее, такая функция непрерывна на всей своей области определения и имеет производную при любом значении аргумента.

Она возрастает при $x \in (-\pi + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, и убывает при $x \in (\pi/2 + 2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Наша функция имеет минимум при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и максимум при $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тангенсом числа x называется отношение синуса этого числа к его косинусу:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}. \quad (20.29)$$

Область определения такой функции — множество всех действительных чисел, кроме чисел $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Множество ее значений — множество всех действительных чисел (рис. 20.11).

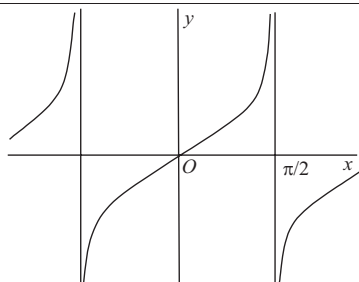


Рис. 20.11

Данная функция является нечетной. Она — периодическая, ее наименьший положительный период равен π , т.е.

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x. \quad (20.30)$$

График этой функции пересекает ось Ox при $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отметим промежутки ее знакопостоянства:

$$y > 0 \text{ при } x \in (\pi n, \pi/2 + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (20.31)$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\pi/2 + \pi n, \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Как будет показано далее, эта функция непрерывна и имеет производную при любом значении аргумента из своей области определения.

Она возрастает в каждом промежутке $x \in (-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

График рассматриваемой функции называется *тангенсоидой*.

Котангенсом числа x называется отношение косинуса этого числа к его синусу:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \quad (20.32)$$

Область определения данной функции — множество всех действительных чисел, кроме чисел $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Множество ее значений — множество всех действительных чисел (рис. 20.12).

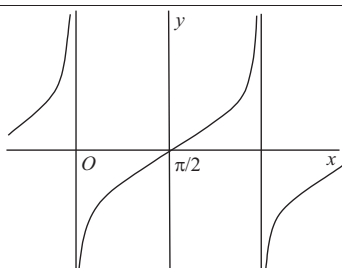


Рис. 20.12

Эта функция является нечетной. Она — периодическая, ее наименьший положительный период равен π , т.е.

$$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x. \quad (20.33)$$

График данной функции пересекает ось Ox при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отметим промежутки ее знакопостоянства:

$$y < 0 \text{ при } x \in (\pi n, \pi/2 + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (20.34)$$

$$y > 0 \text{ при } x \in (-\pi/2 + \pi n, \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Как будет показано далее, эта функция непрерывна и имеет производную при любом значении аргумента из своей области определения.

Она убывает в каждом промежутке ее области определения.

Выше были перечислены важные функции, которые называются *элементарными*. Любые конечные комбинации перечисленных функций, а также взятия обратной и сложной функции от перечисленных функций также будем называть *элементарными*.

Например, к элементарным функциям принадлежат следующие *гиперболические функции*:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{гиперболический синус}); \quad (20.35)$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{гиперболический косинус}); \quad (20.36)$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{гиперболический тангенс}); \quad (20.37)$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{гиперболический котангенс}). \quad (20.38)$$

Хотелось бы отметить еще один способ введения показательной и логарифмической функций.

Определим функцию $a^x = \exp_a(x)$ при $a \neq 1$, $a > 0$ аксиоматически (т.е. набором следующих свойств):

- 1) $\exp_a(1) = a$;
- 2) $\exp_a(x) > 0$;
- 3) для любых x, y имеет место равенство

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y); \quad (20.39)$$

4) при $a > 1$ функция $\exp_a(x)$ возрастает на всей числовой прямой, а при $0 < a < 1$ убывает.

В школьном курсе математики без доказательства утверждается (или произносится вслух), что существует одна и только одна функция, удовлетворяющая свойствам 1) – 4) и объясняется, как, используя свойство 4), можно доопределить функцию $\exp_a(x)$ для всех действительных x , зная значение $\exp_a(x)$ для всех рациональных x .

Отметим также (без доказательства) некоторые другие свойства.

- 5) Функция $\exp_a(x)$ непрерывна при всех $x \in R$;
- 6) множество значений $E(\exp_a) = R_+ = (0, +\infty)$;
- 7) из свойств 4), 5), 6) и теоремы об обратной функции следует, что существует обратная функция, которая обозначается символом $\log_a(x)$.

Более того, строгое изложение определения функции $\ln x$ (натурального логарифма) а, следовательно, и $\log_a(x)$, $\exp_a(x)$, требует дополнительных знаний и в данном случае является необязательным. При этом функция $\ln x$ определяется по формуле

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}. \quad (20.40)$$

При этом имеют место следующие основные формулы.

- 1) $a^{\log_a N} = N$, $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$;
- 2) $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$;

$$3) \log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|;$$

$$4) \log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$5) \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a};$$

$$6) \log_a b = \frac{1}{\log_b a};$$

$$7) \log_{a^n} N = \frac{1}{n} \log_a N;$$

$$8) \log_a N \log_b M = \log_b N \log_a M.$$

Задача из исторического прошлого.

Некто проехал расстояние до города A (120 верст) в течение нескольких часов. Если бы он в каждый час проезжал b верстами более, то приехал бы в город скорее на столько часов, сколько единиц в большем корне уравнения:

$$3(x-2)^{2/3} - 2(x-2)^{1/3} = 1.$$

Во сколько часов он проехал расстояние до города A , если b равно численному значению дроби:

$$\frac{a^2 - 8a + 15}{a^2 - 9a + 20}$$

при

$$a = \frac{[(-3)^{-2} - 1] \div (-2)^{-1}}{(-3)^{-2} - (-3)^{-1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}?$$

Ответ. 15 часов.

**21. Комплексные числа и действия над ними.
Изображение комплексных чисел на плоскости.
Модуль и аргумент комплексного числа.
Алгебраическая и тригонометрическая формы
комплексного числа. Показательная форма
комплексного числа. Формула Эйлера.
Корни из комплексных чисел**

В предыдущих разделах мы частично уже использовали понятие комплексного числа как естественного обобщения числа действительного. При этом в основном использовалось лишь такое простейшее свойство комплексных чисел, как свойство сложения.

Наряду с последним свойством комплексные числа существенно расширяют такие операции, как умножение и возведение в степень.

Определение 21.1. *Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел (a, b) .*

Таким образом, все комплексные числа можно в некотором смысле отождествить со всеми векторами, лежащими на плоскости.

Первое число пары называется *действительной частью* комплексного числа и обозначается $a = \operatorname{Re} z$.

Второе число пары называется *мнимой частью* комплексного числа и обозначается $b = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа называются равными, если равны их соответствующие действительные и мнимые части.

Взятие суммы комплексных чисел естественным образом похоже на операцию сложения двух векторов плоскости.

Определение 21.2. *Суммой комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется число*

$$z = (a_1 + a_2, b_1 + b_2). \quad (21.1)$$

Определение 21.3. *Произведением комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число*

$$z = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \quad (21.2)$$

Мнимая единица $(0, 1)$ обозначается как i .

Комплексное число вида $z = (0, b)$ называется *чисто мнимым числом* и обозначается $z = bi$.

Теперь можно записать комплексное число в так называемой алгебраической форме:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi. \quad (21.3)$$

Комплексное число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* числу $z = a + bi$ и обозначается как $\bar{z}$.

В силу всего сказанного выше *геометрической интерпретацией* комплексного числа $z = a + bi$ является точка $M(x, y)$ на декартовой плоскости с абсциссой $x = a$ и с ординатой $y = b$.

При этом можно также воспользоваться полярными координатами (ρ, φ) на плоскости Oxy .

Записав связь декартовых координат с полярными следующим образом:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad (21.4)$$

мы можем записать так называемую *тригонометрическую форму* комплексного числа:

$$z = x + yi = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (21.5)$$

При этом величина

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (21.6)$$

называется *модулем* комплексного числа, а величина φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \quad (21.7)$$

— *аргументом* комплексного числа.

Обозначаются величины (21.6) и (21.7), соответственно, следующим образом:

$$\rho = |z|, \varphi = \operatorname{arg} z. \quad (21.8)$$

Следует заметить, что в принципе функция arg определяется неоднозначно. Действительно, угол отклонения вектора, «изображающего» данное комплексное число на плоскости, определяется с точностью до поворота на 2π . Таким образом, в принципе можно говорить, что аргумент комплексного числа определен с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Внесем некоторую ясность в данном вопросе. По определению, функция arg имеет в качестве своей области значения лишь полуоткрытый интервал $[0, 2\pi)$. Поэтому вводимая функция arg по определению является однозначной.

Последним свойством не обладает вводимая вспомогательная многозначная функция Arg . Она определяется по следующему правилу:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (21.9)$$

В дальнейшем мы перейдем к так называемой формуле Эйлера, которую пока введем по определению:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (21.10)$$

Эта формула является естественной и удобной записью комплексного числа. Прокомментируем ее.

Формула Эйлера традиционно вводится в курсе комплексного анализа. Но ознакомление с ней целесообразно провести после вышеприведенного изложения тригонометрической формы комплексного числа, так как формула Эйлера позволяет представить комплексные числа в экспоненциальной форме:

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}. \quad (21.11)$$

Экспоненциальная форма комплексного числа обладает многими преимуществами перед тригонометрической формой: краткость записи, операции умножения, деления, возведения в степень, извлечение корня натуральной степени и сопряжения имеют в экспоненциальной форме естественный вид операций со степенями.

Действительно, верны следующие формулы:

$$\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}, \quad (21.12)$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = |z|^2, \quad (21.13)$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \\ &\cdot [\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1] \cdot [\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2] = \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &\quad + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned} \quad (21.14)$$

$$z^n = (|z|e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (21.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (21.16)$$

Отсюда вытекает конкретное и практическое правило деления комплексных чисел в алгебраической форме, которое не вытекает естественным образом из определения частного от деления двух комплексных чисел, но легко получается в экспоненциальной форме. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{-i\varphi_2} = \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|^2} \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{-i\varphi_2} \cdot |z_2| = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}. \end{aligned} \quad (21.17)$$

Более того, если рассмотреть операцию взятия корня из комплексного числа, при этом если $\sqrt[n]{z} = z_1$, то

$$|z_1|^n e^{i\varphi_1 n} = |z| e^{i\varphi}. \quad (21.18)$$

Далее, из определения равенства комплексных чисел и их геометрической интерпретации следует, что

$$|z_1|^n = |z|, \quad \text{Arg } z_1^n = \text{Arg } z + 2\pi k \quad (21.19)$$

(здесь можно использовать также функцию $\arg$ вместо функции Arg).

Таким образом, в случае (21.19)

$$\sqrt[n]{|z|} = |z_1|, \quad n\varphi_1 = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (21.20)$$

Поэтому имеем окончательно:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}. \quad (21.21)$$

Итак, мы с помощью формулы Эйлера проинтерпретировали *показательную форму* записи комплексного числа z :

$$z = \rho e^{i\varphi}. \quad (21.22)$$

Теперь вполне корректно следующее определение.

Комплексное число z_0 называется *корнем n -й степени* из комплексного числа z , если

$$z_0^n = z. \quad (21.23)$$

В этом случае пишут следующее:

$$z_0 = \sqrt[n]{z}. \quad (21.24)$$

Следствием предыдущего является формула:

$$\rho_0 = \sqrt[n]{\rho}. \quad (21.25)$$

Так как аргумент комплексного числа определен неоднозначно, а с точностью до прибавления $2\pi k$, $k \in N$, то

$$\varphi_0 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (21.26)$$

Имеется, таким образом, n различных корней:

$$\varphi_{0k} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1, \rho_{0k} = \rho_0. \rho_{0k} = \sqrt[n]{\rho_0} \quad (21.27)$$

Нами доказано окончательное утверждение: число различных корней n -й степени из комплексного числа точно равно n .

Задача из исторического прошлого.

Отданы в рост на год два капитала, из которых один был более другого на столько сотен рублей, сколько единиц в большем корне системы уравнений:

$$x^2 + y^2 = 5, xy = 2.$$

Меньший капитал, отданный одним процентом более, доставил 24 руб. процентных денег, а больший доставил такое число руб. проц. денег, которое удовлетворяет уравнению:

$$(z-26)^2 - 60(z-26)^3 = 256.$$

Определить каждый капитал и узнать, по сколько процентов он был отдан в рост.

Ответ. 400 руб.; 600 руб.; 6%; 5%.

22. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Критерий Коши. Арифметические свойства пределов. Переход к пределу в неравенствах. Существование предела монотонной ограниченной последовательности

Представим себе ряд из натуральных чисел:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots, m, \dots \quad (22.1)$$

Числа в нем расположены в порядке возрастания.

Если в этом ряду каждое число n заменить некоторым действительным числом x_n , то мы получим так называемую *числовую последовательность*, то есть последовательность чисел:

$$x_1, \dots, x_n, \dots, x_m, \dots \quad (22.2)$$

Вообще последовательность (вещественную или комплексную) можно рассматривать как взаимнооднозначное отображение множества натуральных чисел во множество всех (вещественных или комплексных) чисел.

В нашем случае видно, что элементы данной последовательности занумерованы в порядке возрастания.

Определение 22.1. Постоянная x называется (конечным) *пределом числовой последовательности* x_n , если для каждого сколь угодно малого положительного числа ε существует такой (натуральный) номер N , что начиная с него все члены последовательности удовлетворяют неравенству

$$|x_n - x| < \varepsilon. \quad (22.3)$$

Иначе говоря, на строгом математическом языке имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon. \quad (22.4)$$

Если последовательность имеет (конечный) предел, то говорят, что она *сходится*.

Нетрудно сформулировать определение предела, соответствующего бесконечно удаленной точке.

Последовательность x_n *стремится «к бесконечности»* (имеет бесконечный предел) $+\infty$ ($-\infty$), если для любого $M > 0$ существует такой номер $N = N(M)$, что при $n > N(M)$ выполнено неравенство $|x_n| > M$ ($|x_n| < -M$).

С точки зрения наличия конечного предела данная последовательность расходится, а при учете понятия «бесконечно удаленная точка» она сходится к бесконечности.

С логической точки зрения признаки сходимости последовательности следует трактовать как достаточные условия сходимости данной последовательности (если не присутствует словосочетание «необходимый признак сходимости»), а критерии

сходимости — как необходимые и достаточные условия ее сходимости.

Точка x_0 называется *предельной* для последовательности x_n , если в любой достаточно малой ее окрестности содержатся точки данной последовательности.

Теорема 22.1 (критерий Коши). Для того чтобы числовая последовательность x_n имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого положительного числа $\varepsilon > 0$ существовал номер N такой, что для любых $m, n > N$ выполнено неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \quad (22.5)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть данная последовательность имеет конечный предел. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N |x_n - x| < \varepsilon/2, |x_m - x| < \varepsilon/2. \quad (22.6)$$

Тогда $\forall n, m > N$ выполнена следующая оценка:

$$|x_m - x_n| = |x_m - x + x - x_n| \leq |x_m - x| + |x_n - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad (22.7)$$

что и доказывает необходимое неравенство.

Достаточность. Допустим, что выполняются условия Коши, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |x_n - x_m| < \varepsilon \forall m, n > N.$$

Пусть E_N — множество, состоящее из точек $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$, и пусть $\overline{E_N}$ — замыкание множества E_N (то есть множество, содержащее все свои предельные точки). Максимальное расстояние между любыми точками данного замыкания мы назовем его *диаметром* (diam). Легко понять, что должно выполняться следующее равенство:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{diam } \overline{E_N} = 0, \quad (22.8)$$

поскольку расстояние между точками данной последовательности (Коши) можно сделать сколь угодно малым.

Последний факт означает, что точки сгущаются возле одной точки, что и доказывает полностью теорему.

Отметим теперь некоторые очень важные *арифметические свойства* пределов. Пусть даны две произвольные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

1) Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, а также существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n)$ и он равен $x \pm y$.

2) Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, а также существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n)$ и он равен $x \cdot y$.

3) Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, а также существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ и при этом $y \neq 0$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n)$ и он равен x/y .

На первый взгляд покажется, что сами утверждения слишком громоздки, т.е. в них слишком много лишних слов. Только можно привести множество примеров, когда пределы двух последовательностей не существуют, а предел их суммы (разности, произведения, частного) существует. Это даже не единственная значительная причина.

Докажем для примера лишь третье из них.

Воспользуемся следующим справедливым равенством:

$$x_n y_n - x y = (x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + y(x_n - x). \quad (22.9)$$

По предположению, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие целые числа N_1 и N_2 , что:

при $n \geq N_1$ выполняется строгое неравенство $|x_n - x| < \sqrt{\varepsilon}$,

при $n \geq N_2$ выполняется строгое неравенство $|y_n - y| < \sqrt{\varepsilon}$.

Если мы возьмем $N = \max(N_1, N_2)$, то при $n \geq N$ выполнено другое строгое неравенство:

$$|(x_n - x)(y_n - y)| < \varepsilon, \quad (22.10)$$

которое повлечет за собой следующее тождество:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x)(y_n - y) = 0. \quad (22.11)$$

Сформулируем теперь два более простых свойства, как свойство 1) (доказательство его мы оставляем читателю), а также свойство о том, что, если сходящуюся числовую последовательность умножить на любое действительное число, то у получившейся последовательности также будет существовать предел и

он будет равен пределу последовательности, умноженному на данное действительное число.

Последние утверждения применим к тождеству (22.9) и получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n - xy) = 0, \quad (22.12)$$

что в принципе мы и собирались доказать (свойство 3)).

Перейдем теперь к так называемым свойствам предельных переходов. Более простые мы доказывать не будем.

1. *В равенстве:*

если две числовые последовательности x_n и y_n совпадают при всех номерах n и каждая из них имеет конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \quad (22.13)$$

то и их пределы совпадают:

$$x = y. \quad (22.14)$$

2. *В неравенстве:*

если для двух числовых последовательностей x_n , y_n всегда выполняется неравенство $x_n \geq y_n$ и каждая из этих числовых последовательностей имеет конечный предел (22.13), то выполняется неравенство

$$x \geq y. \quad (22.15)$$

Доказательство. Предположим противное: $x \leq y$. Возьмем число z такое, что

$$x < z < y. \quad (22.16)$$

Тогда:

$$\exists N': \forall n > N' \rightarrow x_n < z, \quad (22.17)$$

$$\exists N'': \forall n > N'' \rightarrow y_n < z.$$

Таким образом, если удовлетворить строгому неравенству

$$N > \max \{N', N''\}, \quad (22.18)$$

то при $n > N$ одновременно будет выполнено двойное строгое неравенство

$$x_n < z < y_n,$$

а, значит, $x_n < y_n$, что противоречит условию. Теорема доказана.

Свойство 2 позволяет нам производить предельный переход в нестрогом неравенстве:

из того, что $x_n \geq y_n$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (22.19)$$

3. *Правило о двух милиционерах.* Если для трех числовых последовательностей x_n, y_n, z_n всегда выполняется двойное нестрогое неравенство

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad (22.20)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, \quad (22.21)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a. \quad (22.22)$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем такой номер N' , чтобы при $n > N'$ было выполнено условие:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \quad (22.23)$$

Далее, найдем такой номер N'' , чтобы при $n > N''$ было выполнено аналогичное условие:

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon. \quad (22.24)$$

Если выбрать некоторое

$$N > \max\{N', N''\}, \quad (22.25)$$

то при $n > N$ выполняются оба верхних неравенства, а, значит,

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon. \quad (22.26)$$

Поэтому при $n > N$ справедливо двойное неравенство:

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad (22.27)$$

что равносильно

$$|y_n - a| < \varepsilon. \quad (22.28)$$

Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$. Теорема доказана.

Определение 22.2. Числовая последовательность x_n называется (*строго*) *возрастающей* (*строго*) *убывающей*), если выполнены следующие свойства:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots \\ (x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots). \end{aligned} \quad (22.29)$$

Числовая последовательность называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если выполнены следующие свойства:

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots \\ (x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots). \end{aligned} \quad (22.30)$$

Все подобные последовательности называются (*строго*) *монотонными*. Их значение в математике трудно переоценить.

Приведем еще одну классическую теорему о сходимости часто встречающихся последовательностей.

Последовательность x_n называется *ограниченной*, если существует такое $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|x_n| < M$.

Теорема 22.2. Ограниченная монотонная последовательность всегда имеет конечный предел.

Доказательство. Предположим, для определенности, что последовательность монотонно возрастает (аналогичным образом может быть рассмотрен случай монотонно убывающей последовательности).

От противного. Пусть данная последовательность *расходится*, т.е. она не является сходящейся. Монотонно возрастающая последовательность чисел расходиться может (в данном случае не имея конечного предела) лишь в случае, когда она уходит на бесконечность.

Действительно, пусть для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для достаточно больших номеров n справедливо неравенство

$$|x_n - x_0| \geq \varepsilon_0, \quad (22.31)$$

что означает неограниченность последовательности x_n и приводит к противоречию. Теорема доказана.

Задача из исторического прошлого.

Из городов A и B выехали два путешественника одновременно и едут друг другу навстречу. После встречи они продолжают путешествие каждый в свою сторону, и первый достигает города B во столько часов, сколько единиц в одном корне, а другой достигает города A во столько часов, сколько единиц в другом корне системы уравнений:

$$4y^2 - 10x^2 = -15,$$

$$2x^2 + xy = 228.$$

Определить часовую скорость каждого путешественника. Расстояние между городами A и B составляет такое число верст, которое представляется произведением трех множителей, сумма квадратов которых равна 122 и из которых один более другого на 1 и менее третьего на 4.

Ответ. 8 вер. и 10 вер.

23. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства предела функции. Односторонние пределы. Пределы монотонных функций. Замечательные пределы

Для начала рассмотрим некоторое *числовое* множество X (т.е. $X \subseteq \mathbb{R}$).

Определение 23.1. Точка a называется *предельной точкой* множества X , если в любом промежутке $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, называемом ε -окрестностью точки a , содержатся отличные от a точки множества X .

Пусть в области X с предельной точкой a задана некоторая функция $f(x)$.

Определение 23.2. Функция $f(x)$ имеет в точке a *предел A* , если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, $x \in X$, выполнено неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \quad (23.1)$$

Это обозначают так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Заметим, что важной отличительной особенностью в последнем определении является тот факт, что рассматриваемые значения аргумента x обязаны не совпадать с самим значением a . Поэтому, по сути, мы имеем здесь дело не с обычной окрестностью точки a , а с ее так называемой *проколотой окрестностью*.

Множество X числовой оси назовем *ограниченным сверху* (снизу), если существует число $M > 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполнено неравенство $x \leq M$ ($x \geq -M$).

Определение 23.3. Если множество X не ограничено сверху (снизу), то говорят, что *функция $f(x)$ имеет предел A при стремлении x к $+\infty$ ($-\infty$)*, если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\Delta > 0$, что при $x > \Delta$ ($x < -\Delta$) выполнено неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \quad (23.2)$$

Пишут: $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} f(x) = A$.

Таким образом, бесконечность в этом смысле ничем не отличается от конечной точки.

Определение 23.4. При стремлении $f(x)$ к 0 при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ называется *бесконечно малой в точке a* .

При стремлении $|f(x)|$ к ∞ при $x \rightarrow a$ функция называется *бесконечно большой в точке a* .

Выделим простые, но очень важные свойства предела функции.

1) Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $A > B$ ($A < C$), то в некоторой окрестности точки a будет выполняться неравенство

$$f(x) > B \text{ (} f(x) < C \text{)}. \quad (23.3)$$

Действительно, пусть для определенности $A > B$. По определению непрерывности функции, достаточно малая δ -окрестность точки a посредством отображения f переходит в достаточно малую окрестность точки A . Ясно, что рассматриваемую ε -окрестность точки A можно сделать настолько малой, что при всех рассматриваемых x будет выполнено неравенство $f(x) > B$ (достаточно выбрать $\varepsilon = (A - B)/2$).

2) Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $A \neq \pm\infty$, то в некоторой δ -окрестности точки a функция $f(x)$ будет ограниченной, т.е. при $|x - a| < \delta$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq C. \quad (23.4)$$

Доказательство. Ограниченность следует из определения предела:

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < \varepsilon + |A|, \quad (23.5)$$

что и требовалось.

3) Пусть на числовом множестве X с предельной точкой a заданы две функции $f(x)$ и $g(x)$, имеющие в точке a конечные пределы A и B соответственно.

Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ тоже имеют конечные пределы, которые равны, соответственно, $A \pm B$, $A \cdot B$ и $\frac{A}{B}$ (в случае частного предполагается выполнение требования $B \neq 0$).

Докажем в качестве примера первое свойство. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta_1 > 0$, что при $|x - a| < \delta_1$, $x \neq a$, $x \in X$, выполнено неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon/2. \quad (23.6)$$

Аналогичным образом, для все того же $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta_2 > 0$, что при $|x - a| < \delta_2$, $x \neq a$, $x \in X$, выполнено неравенство

$$|g(x) - B| < \varepsilon/2. \quad (23.7)$$

Возьмем далее $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, что при $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, $x \in X$, выполнено неравенство

$$|f(x) + g(x) - A - B| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad (23.8)$$

Свойство доказано.

Заметим, что утверждение о том, что предел произведения функций в данной точке равен произведению их пределов в данной точке (опять же, если они существуют), доказывается, как и

аналогичное утверждение для произведения пределов последовательностей (см. (22.9)–(22.12)).

Пока мы имели дело с так называемыми двусторонними пределами, т.е. когда функции были определены и справа, и слева от точки a , т.е. были определены в своей двусторонней проколотой окрестности.

Но может сложиться ситуация, когда функция определена лишь с одной стороны от точки a .

Определение 23.5. Если числовое множество X таково, что в любой окрестности точки a , но *справа* от a , найдутся отличные от a точки множества X , то a называется *правой предельной точкой* множества X , и если функция $f(x)$ имеет в точке a предел (заменив в определении предела функции неравенство $|x - a| < \delta$ двойным неравенством $a < x < a + \delta$), то этот предел называется *пределом в точке a справа* и обозначается через $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

Аналогичным образом определяется *предел функции в точке слева* от a : $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$.

Аналогично определениям из теории числовых последовательностей можно дать ряд следующих определений.

Определение 23.6. Функция $f(x)$, определенная на некотором числовом множестве X , называется *возрастающей (строго)* (*убывающей (строго)*) на множестве X , если для произвольных точек x_1, x_2 из множества X , таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Если же для произвольных точек x_1, x_2 из множества X , таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), то функция $f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)*.

Все подобные функции называют *монотонными*.

Думается, нет смысла на умозрительном языке расшифровывать данные определения. Последнее уже было сделано при изучении подобных свойств числовых последовательностей.

Более того, при изложении теории числовых последовательностей и теории пределов числовых функций прослеживается некоторая двойственность.

Теорема 23.1. Если функция $f(x)$ монотонно возрастает, или хотя бы не убывает на числовом множестве X с предельной точкой a , большей всех остальных значений из множества X , и функция $f(x)$ ограничена сверху: $f(x) \leq M \forall x \in X$, то при $x \rightarrow a$ функция имеет предел, причем конечный.

Доказательство. Поскольку точка a больше всех значений множества X , при этом являясь предельной, рассмотрим функцию $f(x)$ в ее окрестности. Данная окрестность является левосторонней, поскольку значений множества X , больших, чем a , по предположению не существует.

Далее, поскольку точка a — предельная, в любой сколь угодно малой ее левосторонней окрестности существуют точки из множества X . Поэтому мы можем составить монотонную последовательность a_n точек из левосторонней окрестности точки a , сходящуюся к самой точке a .

Итак, последовательность a_n является монотонной, значит, в силу монотонности функции $f(x)$ последовательность $f(a_n)$ также является монотонной (в нашем случае — монотонно неубывающей).

По теореме 22.2 для монотонно неубывающих ограниченных последовательностей таковые имеют предел. Значит, имеет предел и последовательность $f(a_n)$, поскольку функция $f(x)$ ограничена сверху. Теорема доказана.

Можно сформулировать аналогичные теоремы для случая, когда a меньше всех значений множества X , а также для случая монотонно убывающей (хотя бы невозрастающей) функции, ограниченной снизу.

Далее, в математике большое значение имеют два замечательных предела.

Первый замечательный предел (его еще проходят в курсе средней школы):

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел (имеющий важное значение во всех областях естествознания):

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

Первый замечательный предел рассматривался в курсе начал анализа средней школы. Идея доказательства того, что он существует, лежала в том, что отношение длины дуги окружности к длине соответствующей ей хорде стремится к 1 при стремлении одной из них к нулю. Эта идея наглядная, геометрическая, но абсолютно верная.

В дальнейшем, в главе по дифференциальному исчислению функций одного переменного мы выведем первый замечательный предел несколько по-другому.

О втором замечательном пределе хотелось сделать лишь одно замечание. Одним из классических определений числа e является следующее.

Число e называется предел последовательности

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (23.9)$$

Несложно доказать, что он существует.

Идея доказательства такая: последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ограничена сверху (это можно проверить арифметически), при этом она строго монотонна.

Далее хотелось бы сформулировать признак (называемый признаком Коши–Больцано) существования конечного предела функции в предельной точке. Как станет видно, он аналогичен критерию Коши сходимости числовой последовательности.

Теорема 23.2 (критерий Коши–Больцано). Функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке a тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ ($\Delta > 0$), чтобы неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ выполнялось при $|x - a| < \delta$ и $|x' - a| < \delta$ ($x > \Delta$ и $x' > \Delta$).

Сразу же заметим, что «символика с Δ » соответствует случаю функций, область определения которых уходит на бесконечность.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке a , тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_1 > 0$ ($\Delta_1 > 0$), чтобы неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon/2$ выполнялось при $|x - a| < \delta_1$ ($x > \Delta_1$).

Точка x «ничем не лучше», чем точка x' . Поэтому для того же числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_2 > 0$ ($\Delta_2 > 0$), чтобы неравенство $|f(x') - a| < \varepsilon/2$ выполнялось при $|x' - a| < \delta_2$ ($x' > \Delta_2$).

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ($\Delta = \max\{\Delta_1, \Delta_2\}$). Теперь видно, что для того же числа $\varepsilon > 0$ найдется такое выбранное число $\delta > 0$ ($\Delta > 0$), чтобы неравенство

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x)| &= |f(x') - f(x) - a + a| \leq \\ &\leq |f(x') - a| + |f(x) - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned} \quad (23.10)$$

выполнялось при $|x' - a| < \delta$ ($x' > \Delta$) и при $|x - a| < \delta$ ($x > \Delta$). Прямое утверждение теоремы доказано.

Обратно, пусть для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ ($\Delta > 0$), чтобы неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ выполнялось при $|x - a| < \delta$ и $|x' - a| < \delta$ ($x > \Delta$ и $x' > \Delta$). Применим критерий Коши для числовых последовательностей. Рассмотрим произвольную последовательность x_n , сходящуюся к точке a . Она является *последовательностью Коши*, т.е. для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется номер N такой, что для любых $m, n > N$ выполнено неравенство

$$|x_m - x_n| < \varepsilon_1. \quad (23.11)$$

Причем, очевидно, все это можно сделать так, что весь остаток последовательности x_n лежит в δ -окрестности точки a .

Следовательно, в силу последнего факта, для этого же номера N и для любых $m, n > N$ будет выполнено неравенство

$$|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon, \quad (23.12)$$

означает, что последовательность $f(x_n)$ является последовательностью Коши. Теорема полностью доказана.

Задача из исторического прошлого.

Куплено два сорта товара, которого 2-мя пудами более, чем первого, и за всю закупку заплачено столько рублей, сколько единиц в сумме корней уравнений:

$$\begin{aligned} 7x^2 - 5xy &= 1600, \\ 10y^2 - 3x^2 &= 240. \end{aligned}$$

Если бы первого сорта купить вдвое столько, сколько второго, а второго втрое столько, сколько первого, то вся покупка обошлась бы дороже на число рублей, обращающее трехчлен

$$(z - 43)^3 - 24(z - 43)^{\frac{3}{2}} - 81$$

в нуль. Сколько куплено каждого сорта товара и по какой цене, если пуд первого сорта тремя рублями дороже пуда второго?

Ответ. $1\frac{1}{3}$ пуда по 9 руб.; $3\frac{1}{3}$ пуда по 6 руб.

или 4 пуда по 5 руб.; 6 пуд. по 2 руб.

24. Непрерывность функции в точке.

Локальные свойства непрерывных функций.

Непрерывность сложной и обратной функции.

Непрерывность элементарных функций

Понятие предела функции одной переменной в точке явилось базовым понятием для одного из основных понятий математики — понятия *непрерывности*.

В определении предела функции использовалось, как мы помним, понятие проколотой окрестности точки, т.е. такой окрестности, которая как бы не «интересуется» самой точкой, около которой сама окрестность и строится. Понятие же непрерывности ликвидирует этот пробел.

Определение 24.1. Функция $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки a , *непрерывна в точке a* , если существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ данной функции в этой точке и он равен ее значению в точке a , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (24.1)$$

Другими словами, для произвольного положительного числа ε должно существовать положительное число δ такое, что неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (24.2)$$

всегда должно выполняться при выполнении неравенства

$$|x - a| < \delta \quad (24.3)$$

(в том числе и при $x = a$).

Таким образом, мы забыли про «проколотость» окрестности точки a .

Отметим важные и элементарные свойства непрерывных функций.

1) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$, то линейная комбинация $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ непрерывна для произвольных $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ в точке $x = a$.

Это следует из теоремы о свойствах пределов функций одной переменной в точке.

2) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ также является непрерывной функцией в точке $x = a$.

Это также следует из свойств пределов функций, впрочем, как и следующее свойство непрерывных функций.

3) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$, а также $g(a) \neq 0$, то их частное $f(x)/g(x)$ также непрерывно в точке $x = a$.

4) Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y = f(a)$, то определена *сложная функция* $h(x) = g(f(x))$, которая непрерывна в точке $x = a$.

Действительно, пусть для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что когда выполнено неравенство $|x - a| < \delta_1$, справедливо неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon_1$. С другой стороны, для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2) > 0$ такое, что когда выполнено неравенство $|y - f(a)| < \delta_2$ справедливо неравенство $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon_2$. Выберем теперь $\varepsilon_1 < \delta_2$. Тогда для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta_1 = \delta_1(\delta_2) > 0$ такое, что когда выполнено неравенство $|x - a| < \delta_1$, справедливо неравенство $|h(x) - h(a)| = |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon_2$.

5) Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ и возрастает (убывает) в некоторой малой окрестности точки $x = a$, то определена *обратная функция* $g(y) = x$, которая непрерывна в точке $y = f(a)$.

Действительно, пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что когда выполнено неравенство $|x - a| < \delta$, справед-

ливо неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. В силу строгой монотонности в некоторой малой окрестности точки $f(a)$ однозначно определена обратная функция $g(y) = x$. Покажем ее непрерывность в точке $f(a)$.

От противного. Пусть существует такое $\delta_0 > 0$, что при любых $y = f(x)$, удовлетворяющих неравенству $|f(x) - f(a)| < \varepsilon_0$, при любом достаточно малом ε_0 выполнено неравенство $|x - a| \geq \delta_0$. Но последнее предположение приводит к тому, что функция $f(x)$ становится разрывной в точке a .

Выше (раздел 20) уже приводились примеры элементарных функций, заданных на всей числовой прямой. Они являются также непрерывными на всей своей области определения.

Для примера покажем непрерывность следующих элементарных функций на всей числовой прямой.

1. Показательная функция $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

Действительно, возьмем произвольное $x_0 \in R$. Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}. \quad (24.4)$$

Действительно, выберем последовательность x_n , сходящуюся к x_0 . Тогда нетрудно вычислить следующий предел:

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} |a^{x_n} - a^{x_0}| = a^{x_0} \lim_{x_n \rightarrow x_0} |a^{x_n - x_0} - 1| = a^{x_0} \cdot 0 = 0, \quad (24.5)$$

поскольку $\lim_{x_n \rightarrow x_0} x_n = x_0$.

2. Тригонометрическая функция $f(x) = \sin x$.

Возьмем произвольное $x_0 \in R$. Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0. \quad (24.6)$$

Для этого несложно провести следующие выкладки:

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| < |x - x_0|, \quad (24.7)$$

поскольку для достаточно малых значений α выполнена оценка: $|\sin \alpha| < |\alpha|$. Теперь достаточно для любого $\varepsilon > 0$ выбрать $\delta = \varepsilon$ и заметить, что при $|x - x_0| < \delta$, в силу (24.7), выполнено неравенство $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$.

Задача из исторического прошлого.

Два работника взялись исполнить некоторую работу. Если первый из них исполнит часть работы, равную меньшему корню, а затем второй исполнит часть работы, равную большему корню системы уравнений:

$$12(x+y)^2 + x + y = 2,5,$$

$$6(x-y)^2 + x - y = \frac{1}{8},$$

то для окончания работы они должны будут вдвоем работать

$$\left(6 + \sqrt[3]{24} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{784}\right) - \left(3 - \frac{1}{8}\sqrt{28}\right) + \left(\sqrt[3]{1\frac{67}{125}} + 1\right) \cdot 4 - \\ - \left(3\sqrt[3]{576} - \frac{1}{2}\sqrt{15\frac{3}{4}} - \frac{4}{5}\sqrt[3]{3}\right)$$

часов. Если же первый будет работать сам один 15 часов, то для окончания работы второй употребит столько часов, сколько требуется обоим работникам вместе для исполнения $\frac{5}{4}$ работы.

Во сколько часов каждый работник в отдельности может исполнить свою работу?

Ответ. 30 час.; 20 час.

25. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва, их классификация

По аналогии с двусторонними и односторонними окрестностями, двусторонними и односторонними пределами, после введения двусторонней непрерывности естественно вводится и односторонняя непрерывность.

Односторонняя непрерывность естественно возникает во многих физических процессах. Например, процесс может так развиваться во времени, что до какого-то момента он непрерывен (даже гладок — о гладкости см. далее), а после этого момента он практически мгновенно меняет свои всевозможные характеристики.

Таким образом, понятие односторонней непрерывности вполне естественно, и введение такого понятия вполне необходимо.

Определение 25.1. Функция $f(x)$ *непрерывна в точке a справа (слева)*, если выполняется следующее соотношение:

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a), \quad (f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)). \quad (25.1)$$

Понятно, что если оба этих соотношения выполняются одновременно, то функция называется *непрерывной в точке a* (в обычном «двустороннем» смысле).

Действительно, достаточно при этом объединить левостороннюю и правостороннюю окрестности, получить двустороннюю окрестность точки a и естественно прийти к обычному понятию непрерывности.

Если же одно из вышеперечисленных условий не выполнено, то говорят, что *функция $f(x)$ имеет в точке a разрыв с одной из сторон (справа или слева)*.

Предыдущие рассуждения удобно сформулировать в виде строгой теоремы.

Теорема 25.1. Непрерывность функции в точке равносильна непрерывности этой функции в данной точке одновременно справа и слева.

Для более подробного пояснения этих понятий рассмотрим, к примеру, непрерывность справа.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке $[a, a+h]$ ($h > 0$) справа от точки a .

Тогда для непрерывности функции $f(x)$ справа в точке a необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) существовал конечный предел $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) (= f(a))$;
- 2) этот предел был равен значению функции $f(x)$ в точке a , т.е.

$$f(a+0) = f(a). \quad (25.2)$$

Впрочем, второе из этих свойств уже упомянуто в первом, но, тем не менее, хотелось бы его выделить отдельно.

Поэтому, с логической точки зрения возможны несколько ситуаций.

Ситуация 1. В первом случае значение $f(a-0)$ конечно, но не равно $f(a)$ (иначе функция была бы непрерывной в классиче-

ском «двустороннем» смысле). Такой разрыв называют *обыкновенным, или разрывом первого рода*.

Ситуация 2. Если же предел $f(a - 0)$ бесконечен или вообще не существует, то точка a называется *точкой разрыва второго рода* функции $f(x)$.

Возможно, в принципе, такая ситуация, при которой и слева, и справа односторонние пределы функций либо не существуют, либо сами функции неограниченно возрастают.

Задача из исторического прошлого.

На какое число следует разделить произведение корней уравнений:

$$2x^2 + 3y^2 = 147, \quad 5x^2 - 2y^2 = 130,$$

чтобы в частном получить на

$$\left(2 + \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}\right) \times (2\sqrt{3} - 3)$$

меньше делителя, а в остатке

$$\frac{\left(\sqrt[3]{0,04} \cdot \sqrt[6]{6}\right)^3}{\left(5\sqrt[5]{\frac{3}{2}}\right)^2} ?$$

Ответ. 7.

26. Сравнение функций. Символы о и О. Эквивалентные функции

В математике часто важны характеристики одной функции (одной или нескольких переменных) относительно другой функции, либо локально возле какой-либо точки их общей области определения, либо сравнения их на бесконечности.

В связи с этим дадим определение, несущее информацию о сравнении функций.

Определение 26.1. 1) Функция $f(x)$ *есть функция не низшего порядка малости*, чем функция $g(x)$ при $x \rightarrow a$ (другими словами, возле точки a), если существует некоторая окрестность точки a , в которой при $x \neq a$ отношение $f(x)/g(x)$ ограничено.

Пишут $f(x) = O[g(x)]$ («О большое»).

Более строго, должно выполняться равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = C = \text{const} . \quad (26.1)$$

Если $C \neq 0$, то говорят, что обе рассматриваемые функции имеют один и тот же порядок малости.

2) Таким образом, функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют один и тот же порядок, если предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ существует и отличен от нуля.

3) Функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$

1. Пишут $f(x) \sim g(x)$.

4) Функция $f(x)$ есть функция более высокого порядка малости, чем функция $g(x)$ при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. (Пишут $f(x) = o[g(x)]$, «о малое»).

В частности:

5) Бесконечно малыми порядка 1, 2, ... при $x \rightarrow 0$ называются функции того же порядка, что и, соответственно, функции $x, x^2, \dots$ при $x \rightarrow 0$.

6) Бесконечно большими порядка 1, 2, ... при $x \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) называются функции того же порядка, что и, соответственно, функции $x, x^2, \dots$ при $x \rightarrow +\infty$ ($-\infty$).

Пример. Сравнить порядок малости двух функций:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \text{ и } g(x) = x^2 - 1 \quad (26.2)$$

в точке $a = 1$.

Решение. Вычислим предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x+1)} = 0, \end{aligned} \quad (26.3)$$

что говорит о следующем: $f(x) = o[g(x)]$.

Данный раздел хоть и является достаточно коротким и состоит сплошь из одних определений, в некотором смысле является ключевым для дальнейшего изложения.

Задача из исторического прошлого.

Некто купил на 70 рублей сукна, израсходовав на свои потребности

$$-\frac{\sqrt{x^3\sqrt{x^2\sqrt{x^3}}}}{\sqrt[4]{x^3\sqrt{x^2\sqrt{x}}}} \cdot \sqrt[2]{\sqrt[3]{2}\sqrt{x^{-1}}} \text{ аришин},$$

где $x = 2$, остальное продал за столько рублей, сколько единиц в корне уравнения

$$2\sqrt[3]{z^2} - 3\sqrt[3]{z} = 20,$$

получив на каждом аришине

$$\sqrt{2(5\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt[3]{3} / \sqrt[3]{75} \text{ копеек}$$

прибыли.

Сколько он купил сукна?

Ответ. 20 ари.

**27. Свойства функций, непрерывных на отрезке:
ограниченность, существование наибольшего
и наименьшего значений, промежуточные значения.
Теорема об обратной функции**

В отличие от предыдущего раздела, данный раздел содержит основные теоремы, касающиеся свойств непрерывных функций.

Ранее в основном изучались непрерывные функции в точке. Но бывают непрерывные функции и на более мощных множествах, чем точка.

Назовем функцию одной переменной *непрерывной на некотором числовом множестве*, если она непрерывна в каждой точке данного множества.

Уточним также некоторые определения.

Число M назовем (*точной*) *верхней гранью* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если оно обладает двумя свойствами:

1) $f(x) \leq M$, где $a \leq x \leq b$.

2) Каково бы ни было малое число $\varepsilon > 0$, можно найти на отрезке $[a, b]$ такое значение x , что $f(x) > M - \varepsilon$.

Аналогично число m назовем (*точной*) *нижней гранью* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если оно обладает двумя свойствами:

1) $f(x) \geq m$, где $a \leq x \leq b$.

2) Каково бы ни было малое число $\varepsilon > 0$, можно найти на отрезке $[a, b]$ такое значение x , что $f(x) < m + \varepsilon$.

Перейдем к теоремам. Первая из них говорит о непрерывности (на отрезке) как о более сильном свойстве, нежели ограниченность функции на нем.

Теорема 27.1. Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Предположим противное. Пусть каково бы ни было положительное число k , на отрезке $[a, b]$ найдется, по крайней мере, одна точка x_k , для которой $|f(x_k)| > k$. Придавая k значения $1, 2, \dots$, получим последовательность точек $\{x_k\}$, для которых значения функции $f(x_k)$ с возрастанием k неограниченно увеличиваются. Множество точек x_k бесконечное и ограниченное (поскольку все x_k лежат на отрезке $[a, b]$), поэтому оно имеет по крайней мере одну предельную точку на данном отрезке $[a, b]$ (докажем ниже). Эту предельную точку мы обозначим через ξ . Она принадлежит нашему отрезку, поэтому наша функция имеет в ней определенное значение

$$f(\xi) = s. \quad (27.1)$$

Далее имеем:

$$|f(x_k) - f(\xi)| \geq |f(x_k)| - |f(\xi)| > k - |s|. \quad (27.2)$$

С другой стороны, для любого достаточно малого $\delta > 0$ в интервал $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ попадает бесконечное число точек x_k , и, следовательно, в этом интервале имеются точки x_k со сколь угодно большими номерами, но тогда последнее неравенство показывает, что функция $f(x)$ в точке ξ разрывна, что противоречит условию теоремы.

Осталось доказать, что любая последовательность x_n точек на отрезке имеет хотя бы одну предельную точку на нем. Действительно, разделим отрезок $[a, b]$ пополам, при этом в одной из половин содержится бесконечное множество точек. Выберем ту его

половину I_1 , в которой они и лежат. Разделим вновь пополам выбранную часть I_1 и выберем ту ее часть I_2 , в которой находится бесчисленное множество точек.

Продолжаем далее процесс до бесконечности. Получим систему вложенных друг в друга отрезков I_n , $n \in \mathbb{N}$, сходящихся к точке I_0 , поскольку длина S_n отрезка I_n удовлетворяет равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a) \frac{1}{2^n} = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0. \quad (27.3)$$

Ясно, что в любой достаточно малой окрестности точки I_0 содержатся точки данной последовательности x_n , что и доказывает, что точка I_0 для нее является предельной. Теорема полностью доказана.

Из этой теоремы следует, что (примем это без строгого доказательства)

всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция имеет верхнюю и нижнюю грани.

Мы обозначим их, как и выше в определениях, соответственно, через M и m .

Теорема 27.2. Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает своих (точной) нижней и верхней граней, то есть существует $x_1 \in [a, b]$ такое, что

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_1) = M, \quad (27.4')$$

и существует $x_2 \in [a, b]$ такое, что

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_2) = m. \quad (27.4'')$$

Доказательство. Начнем с доказательства существования точки x_1 .

Пусть

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Если бы для любого $x \in [a, b]$ выполнялось строгое неравенство

$$f(x) < M, \quad (27.5)$$

то функция

$$\frac{1}{M - f(x)} \quad (27.6)$$

была бы непрерывной и ограниченной сверху некоторым числом $C > 0$, т.е.

$$\frac{1}{M - f(x)} < C. \quad (27.7)$$

Следовательно,

$$M - f(x) > \frac{1}{C}, \quad (27.8)$$

т.е.

$$M - \frac{1}{C} > f(x). \quad (27.9)$$

Неравенство (27.9) верно для любых $x \in [a, b]$, значит величина $M - \frac{1}{C}$ ограничивает сверху множество значений функции $f(x)$ и M — точная верхняя грань (поскольку число C может быть сколь угодно большим).

Другими словами, функция достигает своего наибольшего значения.

Аналогично можно доказать, что существует точка x_2 такая, что $f(x_2) = m$, т.е. непрерывная на отрезке функция достигает и своего наименьшего значения. Теорема доказана.

Следующая теорема называется теоремой о промежуточном значении.

Теорема 27.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$.

Тогда, если $\alpha \leq c \leq \beta$ (когда $\alpha \leq \beta$) или если $\beta \leq c \leq \alpha$ (когда $\beta \leq \alpha$), то существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что

$$f(x_0) = c. \quad (27.10)$$

Доказательство. Пусть для определенности $\alpha \leq \beta$ (случай $\beta \leq \alpha$ рассматривается аналогичным образом). Очевидно, что

$$m \leq c \leq M, \quad (27.11)$$

где m и M , соответственно, — наименьшее и наибольшее значения функции (см. теорему 27.2). Как было показано выше, суще-

ствуют такие значения x_1 и x_2 из отрезка $[a, b]$, что $f(x_1) = M$ и $f(x_2) = m$.

Рассмотрим вспомогательную непрерывную функцию

$$\Psi(x) = f(x) - c. \quad (27.12)$$

На отрезке $x_1 \leq x \leq x_2$ значения $\Psi(x_1)$ и $\Psi(x_2)$ имеют разные знаки. Если бы данная вспомогательная функция нигде на данном отрезке не обращалась бы в нуль, она не поменяла бы знак при переходе от x_1 к x_2 (это можно рассматривать в качестве несложного упражнения для читателя). Значит, найдется такое x_0 , где $\Psi(x_0) = 0$, т.е. $f(x_0) = c$. Теорема доказана.

Следующая теорема носит фундаментальный смысл, поскольку вводится понятие функции, обратной к непрерывной.

Теорема 27.4. Если функция $f(x)$ определена, монотонно возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает значения на этом отрезке из отрезка $[c, d]$ ($f(a) = c, f(b) = d$), то на отрезке $[c, d]$ существует однозначная обратная функция

$$x = g(y), \quad (27.13)$$

которая непрерывна на нем и монотонно возрастает (убывает).

Доказательство. Докажем теорему для случая возрастающей функции. Для простоты, независимое переменное функции, обратное по отношению к $f(x)$, как и указано в формулировке теоремы, будем обозначать через y .

Пусть дано произвольное значение y на отрезке $[c, d]$. Так как $f(a) = c, f(b) = d$, то

$$f(a) < y < f(b), \quad (27.14)$$

и так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она, проходя от значения c к значению d , должна пройти все промежуточные значения. То есть существует такое значение $x = x'$, что

$$f(x') = y. \quad (27.15)$$

Так как функция $f(x)$ монотонна, а, как мы показали выше, двум *различным* значениям независимого переменного соответствует всегда два *различных* значения функции, то такое значение x найдется только одно.

Итак, каждому значению y между c и d соответствует одно и только одно значение $x = x'$ такое, что выполнено свойство (27.15).

Закон этого соответствия и будет обратной функцией. Обозначим ее через $\varphi(y)$. В самом деле, практически по определению,

$$\varphi(y) = x' \quad (27.16)$$

или

$$f[\varphi(y)] = y. \quad (27.17)$$

Итак, существование обратной функции и ее однозначность доказаны. Остается доказать ее непрерывность.

Пусть ε — произвольно мало, y_0 — произвольное число между c и d и пусть, далее, $\varphi(y_0) = x'_0$. Опишем около точки x'_0 по числовой оси x отрезок длины 2ε :

$$[x'_0 - \varepsilon, x'_0 + \varepsilon]. \quad (27.18)$$

При необходимости, величину ε выберем столь малой, чтобы точки $x'_0 - \varepsilon$ и $x'_0 + \varepsilon$ находились на отрезке $[a, b]$.

Если $x'_0 = a$, то берем отрезок

$$[x'_0, x'_0 + \varepsilon]; \quad (27.19)$$

если $x'_0 = b$, то берем отрезок

$$[x'_0 - \varepsilon, x'_0]. \quad (27.20)$$

Пусть $f(x'_0 - \varepsilon) = y_1$ и $f(x'_0 + \varepsilon) = y_2$. Так как $f(x)$ — (монотонно) возрастающая функция, то

$$y_1 < y_0 < y_2. \quad (27.21)$$

Возьмем теперь τ столь малым, чтобы при $|h| < \tau$ точки вида $y_0 + h$ находились на отрезке $[y_1, y_2]$. Тогда значения функции $\varphi(y)$ для вот этих значений y будут лежать на отрезке (27.18), т.е.

$$|\varphi(y + h) - \varphi(y)| < \varepsilon. \quad (27.22)$$

Теперь доказана не только непрерывность функции $\varphi(y)$ на отрезке $[c, d]$, но и вся теорема полностью.

Теорию непрерывных функций «в целом» (т.е. их глобальное изучение) можно продолжить. Но теорем, перечисленных и до-

казанных выше, уже вполне достаточно для плодотворного анализа.

Задача из исторического прошлого.

Двое отправились одновременно из города A на станцию железной дороги B , отстоящую на расстоянии 120 верст. Первый приехал в B на

$$(\sqrt{2}-1)^2 \cdot (6+\sqrt{32})$$

часов раньше прихода поезда, а второй опоздал на

$$\sqrt{3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^{-3}}$$

часов, так как он в каждый час проезжал на столько верст менее первого, сколько единиц в большем из двух положительных корней системы уравнений:

$$3x^2 - 2xy = 40,$$

$$2x^2 + 7xy = 60.$$

Определить скорость каждого путешественника.

Ответ. 12 вер., 8 вер. в час.

III. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

28. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл

Введенное выше понятие непрерывности функции одной переменной на множестве является, как будет показано ниже, более слабым понятием, чем вскоре вводимое понятие дифференцируемости функции. Но предыдущая глава тем и хороша, что и понятие непрерывности, и понятие бесконечно малой величины (функции) позволит в некотором смысле «сконструировать» понятие дифференцируемости функции как в отдельной взятой точке, так и на множестве.

То, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, можно эквивалентным образом переписать в том виде, что разность (она, безусловно, является функцией)

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) \quad (28.1)$$

бесконечно мала при $x \rightarrow a$.

Это выражение называется *приращением функции $f(x)$ в точке $x = a$* и обозначается как $\Delta f(x)$.

В частности, выражение

$$\alpha(x) = x - a \quad (28.2)$$

(то есть приращение функции $f(x) = x$) называется приращением (независимого) аргумента и обозначается как Δx .

Можно заметить, что

$$x = x - a + a = a + \Delta x, \quad (28.3)$$

а

$$\Delta f(x) = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a). \quad (28.4)$$

Определение 28.1. Линейная функция от приращения аргумента (само приращение «привязано» к точке a) $g(\Delta x) = c\Delta x$ называется *дифференциалом функции $f(x)$ в точке a* , если

$$\Delta f(x) \sim c\Delta x \text{ при } \Delta x \rightarrow 0. \quad (28.5)$$

Это значит, что

$$\Delta f(x) = c\Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad (28.6)$$

где

$$\beta(\Delta x) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \quad (28.7)$$

а $c \in R$ — некоторая действительная постоянная.

Дифференциал функции $f(x)$ в точке x обозначается как $df(x)$.

При этом, если у функции существует дифференциал в точке, то такая функция называется *дифференцируемой в данной точке*.

Легко заметить, что $dx = \Delta x$.

Здесь имеется некоторая игра слов. На самом деле заметить, что $dx = \Delta x$, вовсе нелегко (в принципе, с философской точки зрения), поэтому для математической ясности примем последнее равенство по определению.

Определение 28.2. Постоянная в выражении для дифференциала

$$c = \frac{df}{dx} \quad (28.8)$$

называется *производной функции $f(x)$ в точке $x = a$* . Этот факт часто обозначают так:

$$c = f'(a) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}. \quad (28.9)$$

Исходя из этих двух определений в случае, когда дифференциал функции существует, мы можем записать соотношение:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c. \quad (28.10)$$

В принципе, этот факт нужно доказывать, но и в данном месте мы примем его как очевидное мнемоническое правило для вычисления производной функции.

Заметим, что для функции одной переменной ее дифференцируемость в точке и существование производной в данной точке — эквивалентные понятия. В принципе, данный факт очевиден и выводится из определения дифференциала и производной.

Как будет показано ниже, для функций многих переменных это не всегда так. Там может сложиться такая ситуация, при которой будут существовать производные функции многих переменных по каждой переменной в отдельности, а функция при этом дифференцируема не будет.

Во многих учебниках сначала вводят понятие производной, а затем — дифференциала, как некоего линейного отображения. Как видно, мы выбираем второй путь, который, на мой взгляд, кажется более логичным и фундаментальным.

С понятием производной функции одной переменной естественным образом связано такое геометрическое понятие, как касательная к графику функции.

$$y = f(x), \quad (28.11)$$

в точке с координатами $(a, f(a))$ называется прямая, проходящая через эту точку с угловым коэффициентом R , равным пределу углового коэффициента $R(\Delta x)$ секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ при $x \rightarrow a$ (т.е. при $\Delta x \rightarrow 0$).

Таким образом, геометрически понятие производной можно проинтерпретировать следующим образом:

производная $f'(a)$ функции $f(x)$ в точке $x = a$ равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(a, f(a))$.

Данный раздел носит вводный характер, но на его результатах будет базироваться целый раздел классического анализа — дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Задача из исторического прошлого.

Число лет среднего брата среднепропорционально между числами лет старшего и младшего братьев, а q лет тому назад число лет старшего брата равнялось сумме лет среднего и младшего братьев.

Определить, сколько лет каждому брату, зная, что средний брат старше младшего n годами, причем q и n определяются из системы уравнений:

$$2q^2 + 3n^2 = 7nq,$$

$$5n^2 - 8q^2 = 5nq + 50.$$

Ответ. 45, 30, 20 лет.

29. Производная функции, ее смысл в различных задачах. Правило нахождения производной и дифференциала

В предыдущем разделе была дана важная геометрическая интерпретация производной функции одной переменной, которая может быть задана в виде графика на некотором множестве.

Данный раздел построен достаточно конструктивно и, хотя не содержит каких-либо фундаментальных теорем, может рассматриваться в качестве малого справочника по правилам вычисления производных функций одной переменной и, в частности, основных элементарных функций.

Наряду с геометрической интерпретацией не менее важное значение имеет также ее интерпретация механическая.

Если t является текущим временем, а $S(t)$ — путем, пройденным материальной точкой на прямой за время $t - t_0$, где t_0 — некоторая начальная точка отсчета времени, то величина

$$\Delta S(t) \Big|_{t=a} = S(a + \Delta t) - S(a) \quad (29.1)$$

есть *путь*, пройденный материальной точкой за время от a до $a + \Delta t$.

Частное же

$$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t} \Big|_{t=a} = \frac{S(a + \Delta t) - S(a)}{\Delta t} \quad (29.2)$$

является *средней скоростью* при движении за отрезок времени $[a, a + \Delta t]$.

Нетрудно догадаться, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} \Big|_{t=a} \quad (29.3)$$

— (*мгновенная*) *скорость* материальной точки в момент времени $t = a$.

Наверняка в школьном курсе механики данные понятия уже вводились.

А теперь перечислим и поясним основные правила дифференцирования функции одной переменной в точке. Как уже упоминалось, данные правила можно рассматривать в качестве малого справочника по данному вопросу.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x , а $c \in \mathbb{R}$ — некоторая вещественная постоянная. Тогда:

$$1) (cf(x))' = cf'(x).$$

Данное и следующие два свойства очевидны, и доказательство их мы предоставляем читателю.

$$2) \text{ Если } f(x) = \text{const, то } f'(a) = 0.$$

$$3) (f(x) + g(x))' \equiv f'(x) + g'(x).$$

$$4) (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ (правило Лейбница)}.$$

Доказательство. Составим приращение произведения функции в точке x :

$$\Delta f(x)g(x) = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x).$$

Разделим на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f(x)g(x))}{\Delta x} = \\ & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (29.4)$$

При этом, в силу дифференцируемости каждого из сомножителей, рассмотрим два следующих представления:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x), \quad (29.5)$$

$$\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x). \quad (29.6)$$

Продолжим равенство (29.4). В силу (29.5), (29.6) справедливо равенство:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[\Delta f(x) + f(x)][\Delta g(x) + g(x)] - f(x)g(x)}{\Delta x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x) \Delta g(x) + \Delta f(x) g(x) + \Delta g(x) f(x) + f(x) g(x) - f(x) g(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x) \Delta g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x) g(x) + \Delta g(x) f(x)}{\Delta x}, \quad (29.7)
 \end{aligned}$$

если, конечно, существуют пределы каждого из слагаемых в последней строке.

Прежде всего заметим, что в силу, например (29.5), выполнено следующее равенство:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0. \quad (29.8)$$

Тогда:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x) \Delta g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = 0 \cdot g'(x) = 0, \quad (29.9)$$

поскольку, как только что показано, пределы обоих сомножителей существуют.

Кроме того,

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x) g(x) + \Delta g(x) f(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} f(x) \right\} = \\
 &= f'(x) g(x) + g'(x) f(x), \quad (29.10)
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

$$5) \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = - \frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Данное свойство выводится из следующего:

$$6) \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{fg' - fg'}{g^2} \quad (\text{все — в точке } x).$$

Данное свойство доказывается более громоздко, чем свойство 4), но аналогично ему.

В дальнейшем в нашей деятельности потребуется следующая «таблица производных основных элементарных функций».

Итак, переходим к производным элементарных функций.

$$x' = 1. \quad (29.11)$$

Доказательство.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1. \quad (29.12)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad (29.13)$$

Данное свойство (так же, как и два следующих) удобнее доказывать, зная теорему о производной обратной функции. А пока рекомендуется их запомнить.

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (29.14)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (29.15)$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \quad (29.16)$$

Доказательство.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \varphi(x, \Delta x) - x^n}{\Delta x}. \quad (29.17)$$

При этом выполнено простое свойство:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, \Delta x)}{\Delta x} = 0, \quad (29.18)$$

поскольку функция $\varphi(x, \Delta x)$ в силу биннома Ньютона является полиномом по Δx степени, большей двух. Поэтому при делении ее на Δx получится функция-полином, степени, не меньшей 1. Следовательно, свойство (29.18) выполнено.

Далее, очевидно,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \varphi(x, \Delta x) - x^n}{\Delta x} &= \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, \Delta x)}{\Delta x} = \\ &= nx^{n-1} + 0 = nx^{n-1}, \end{aligned} \quad (29.19)$$

что и требовалось.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \quad (29.20)$$

Пока данное правило дифференцирования предлагается запомнить.

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}. \quad (29.21)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (29.22)$$

Последние два свойства также удобнее доказывать, зная теорему о производной обратной функции. А пока рекомендуется их запомнить (впрочем, как и следующее).

$$(e^x)' = e^x. \quad (29.23)$$

$$(\sin x)' = \cos x. \quad (29.24)$$

Доказательство. Необходимо вычислить

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}. \quad (29.25)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \sin(x + \Delta x) - \sin x &= 2 \sin\left(\frac{(x + \Delta x) - x}{2}\right) \cos\left(\frac{(x + \Delta x) + x}{2}\right) = \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right), \end{aligned} \quad (29.26)$$

Тогда равенство (29.25) перепишется в виде

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1, \quad (29.27)$$

пользуясь свойством первого замечательного предела. Свойство доказано.

Аналогично через известные формулы тригонометрии может быть доказано и следующее правило:

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (29.28)$$

Следующие два свойства выводятся из двух предыдущих, применяя правила дифференцирования произведения функций и их частного.

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (29.29)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (29.30)$$

Задача из исторического прошлого.

Купили на 29 рублей два сорта товара, второго двумя фунтами более, чем первого, заплатив за каждый фунт первого сорта на

$$(\sqrt{5,5} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}) \times \sqrt{2}$$

руб. дороже второго сорта. Если бы второго сорта купили одним фунтом менее, а первого сорта более на число фунтов, равное большему корню системы уравнений:

$$x^2 - xy = 6, \quad xy - y^2 = 2,$$

то вся покупка обоилась бы семью рублями дороже. Сколько купили каждого сорта товара и по какой цене?

Ответ. 5 фун. по 3 руб.; 7 фун. по 2 руб. за фунт.

30. Производная сложной и обратной функций.

Инвариантность формы дифференциала.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

В данном разделе, подобно как и для непрерывных функций, приводятся и доказываются одни из основных теорем дифференциального исчисления функции одной переменной.

Сначала приведем теорему о дифференцировании сложной функции, в результате чего будет выведено правило дифференцирования таких функций.

Теорема 30.1. Если функция $\varphi(t)$ дифференцируема в точке $t = a$ и $\varphi'(a) = \alpha$, а данная функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = \varphi(a)$ и $f'(\varphi(a)) = \beta$, то сложная функция

$$g(t) = f(\varphi(t)) \quad (30.1)$$

дифференцируема в точке $t = a$ и

$$g'(t) = \beta \cdot \alpha. \quad (30.2)$$

Доказательство. Пусть $y = f(x)$. Требуется найти производную от функции

$$y = f(\varphi(t)) \quad (30.3)$$

по независимому переменному t ; мы обозначим ее через y'_t .

Поскольку

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (30.4)$$

то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x + A \quad (30.5)$$

(где A стремится к нулю одновременно с Δx и с Δt) и

$$\Delta y = y'_x \Delta x + A \Delta x. \quad (30.6)$$

Заметим, что A определено для всякого значения Δx кроме $\Delta x = 0$, и поэтому последнее равенство имеет смысл только при Δx , отличном от нуля. Но поскольку

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} A = 0, \quad (30.7)$$

то естественно приписать A значение, равное нулю, когда Δx равно нулю. При этом условии полученное выражение имеет смысл при всех значениях Δx .

Разделив теперь Δy на Δt , получим следующее:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = y'_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + A \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (30.8)$$

и, переходя к пределу, имеем:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'_x \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} A \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (30.9)$$

Отсюда

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t. \quad (30.10)$$

В другой записи, гораздо более наглядной, последнюю формулу можно переписать как

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}. \quad (30.11)$$

Формула (30.2) доказана.

Обычно опускают значок внизу при обозначении производной, взятой по одному независимому переменному (в данном случае t).

Только что доказанную теорему можно прочесть следующим образом:

производная функции от функции (сложной функции) по независимому переменному равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную от промежуточного аргумента по независимому переменному.

Перейдем теперь к теореме о производной обратной функции, в результате чего будет выведено правило дифференцирования обратной функции.

Теорема 30.2. Если функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет обратную функцию $g(y)$, определенную на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, то если x_0 — внутренняя точка отрезка $[a, b]$, а $y_0 = f(x_0)$, $g(y_0) = x_0$, и y_0 — внутренняя точка отрезка с концами $f(a)$ и $f(b)$, и в точке x_0 функция $f(x)$ имеет отличную от нуля производную $f'(x_0) \neq 0$, то в точке y_0 функция $g(y)$ имеет производную, равную

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (30.12)$$

Доказательство. Итак, f и g — две взаимно обратные функции. По определению таких (взаимно обратных) функций имеем:

$$f[g(x)] = x. \quad (30.13)$$

Дифференцируя обе части равенства (30.13) по правилу нахождения производной от сложной функции, получаем:

$$f'[g(x)]g'(x) = 1. \quad (30.14)$$

Отсюда

$$g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}. \quad (30.15)$$

Нетрудно проверить, что в первоначальных обозначениях это означает, что если $y_0 = f(x_0)$, то и выполнено равенство (30.12). Теорема доказана.

Перефразируем правило нахождения производной обратной функции следующим образом:

производная от обратной функции g равна единице, деленной на величину производной от прямой функции, в которую вместо независимого переменного подставлена функция g .

«Вернем некоторые долги» по доказательствам правил вычисления производных некоторых элементарных функций. Заметим, что в каждом правиле нужно строго проверять условия только что доказанной теоремы. Мы лишь укажем механизм возникновения правил дифференцирования:

$$1) \ y = \ln x, \text{ значит } x = e^y; \ y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

$$2) \ y = \arcsin x, \text{ значит, } x = \sin y; \ y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ (здесь перед корнем берется знак «плюс», поскольку функция } y = \arcsin x \text{ там, где она определена, — возрастающая).}$$

$$3) \ y = \arccos x, \text{ значит, } x = \cos y; \ y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ (здесь перед корнем оставляется знак «минус», поскольку функция } y = \arccos x \text{ там, где она определена, — убывающая).}$$

$$4) \ y = \operatorname{arctg} x, \text{ значит } x = \operatorname{tg} y; \ y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$5) \ y = \operatorname{arctg} x, \text{ значит } x = \operatorname{ctg} y; \ y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

6) $y = x^\alpha$ при любом действительном α . Справедливо тождество: $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$. Вычислим производную от обеих частей этого тождества: $\frac{1}{x^\alpha} (x^\alpha)' = \frac{\alpha}{x}$. Отсюда: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

7) $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$. Выведем корректно.

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}. \quad (30.16)$$

Вместо Δx формально введем новую переменную α , положив

$$a^{\Delta x} - 1 = \alpha. \quad (30.17)$$

Тогда имеем:

$$\Delta x = \log_a (\alpha + 1), \quad (30.18)$$

или, переходя от системы логарифмов при основании a к системе логарифмов при основании e (натуральных):

$$\Delta x = \frac{\ln(\alpha + 1)}{\ln a}. \quad (30.19)$$

Искомая производная принимает тогда вид:

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x \alpha \ln a}{\ln(\alpha + 1)}. \quad (30.20)$$

Кроме того, из равенства (30.17) следует, что если $\Delta x \rightarrow 0$, то и $\alpha \rightarrow 0$. Далее можно написать, что:

$$(a^x)' = a^x \ln a \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\alpha} \ln(\alpha + 1)} = a^x \ln a \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (30.21)$$

В силу непрерывности логарифмической функции

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln(\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} = \ln \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} = \ln e, \quad (30.22)$$

и поэтому

$$(a^x)' = a^x \ln a \frac{1}{\ln e} = a^x \ln a. \quad (30.23)$$

Итак, искомое правило дифференцирования выведено. В частности,

$$(e^x)' = e^x. \quad (30.24)$$

Следующая теорема утверждает факт сохранения вида (первого) дифференциала в результате применения сложной функции.

Теорема 30.3 (об инвариантности формы первого дифференциала). Если

$$df = c_1 dx \quad (30.25)$$

— дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = a$,

$$d\varphi = c_2 dt \quad (30.26)$$

— дифференциал функции $\varphi(t)$ в точке $t = \alpha$, и $\varphi(\alpha) = a$, то

$$c_1 d\varphi = c_1 c_2 dt \quad (30.27)$$

— дифференциал функции $g(t) = f(\varphi(t))$ в точке $t = \alpha$.

Эта теорема целиком и полностью следует из теоремы о дифференцировании сложной функции.

Математический смысл ее состоит в том, что по теореме 30.1 (при дифференцировании сложной функции) соответствующие производные перемножаются, а поэтому дифференциал сложной функции остается линейным отображением с коэффициентом, как раз и равным данному произведению производных. В этом и состоит *инвариантность дифференциала*.

На языке линейной алгебры можно произнести мнемоническое правило: линейное отображение от одной переменной от линейного отображения скрытой (независимой) переменной сам является линейным отображением.

Считаю необходимым произнести еще одно правило:

дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал того аргумента, по которому взята производная. Т.е. выражение дифференциала справедливо при всяком выборе независимого переменного.

Следующая теорема учит дифференцировать функции, заданные параметрически.

Теорема 30.4. Если функция $f(x)$ задана параметрически, то есть

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [0, 1], \quad (30.28)$$

и в каждой точке отрезка $[0, 1]$ выполнено строгое неравенство $\varphi'(t) > 0$ (или $\varphi'(t) < 0$), то

$$f'_x(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (30.29)$$

Доказательство. По условию теоремы $y = f(x)$. Поскольку функция задана параметрически, вычислим $y'_t = \psi'(t)$. По теореме о дифференцировании сложной функции имеем:

$$\psi'(t) = y'_t(t) = f'_x(\varphi(t))\varphi'(t), \quad (30.30)$$

а, значит, если, для определенности $\varphi'(t) > 0$, то, разделив на последнюю величину, получим окончательное доказательство теоремы.

Как мнемонически получается только что выведенная формула? Ответ — из следующей *формальной* строки:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{\psi'}{\varphi'}. \quad (30.31)$$

Но формула (30.31) — лишь для повышения интуитивного понимания, поскольку она в общем случае не верна.

Задача из исторического прошлого.

Капитал 1000 рублей разделен на две части, и каждая часть отдана в рост, соответственно, на столько месяцев, сколько в ней было сотен рублей, и при том одна под столько процентов, сколько единиц в большем положительном корне уравнения:

$$x^3 - 5x^2 - 36x + 180 = 0,$$

а другая — сколько единиц в корне уравнения

$$\sqrt{\sqrt{z^2 + 11} - z} = \sqrt{z - 4}.$$

Определить каждую часть капитала, зная, что процентных денег получено всего 23 рубля.

Ответ. 400 руб. и 600 руб.

31. Точки экстремума функции. Теорема Ферма

Производная функции, пусть даже и одной переменной, имеет множество приложений, но одно из главных — нахождения минимальных и максимальных значений данной функции.

По аналогии с возрастающими и убывающими числовыми последовательностями можно дать ряд следующих определений.

Определение 31.1. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, а $x_0 \in (a, b)$. Говорят, что $f(x)$ *возрастает в точке* $x = x_0$, если в некоторой окрестности этой точки $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$.

Говорят, что функция $f(x)$ *убывает в точке* $x = x_0$, если в некоторой окрестности этой точки $f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x > x_0$.

Определение 31.2. Функция $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *(строгий) локальный максимум (минимум)*, если $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$) верно

для всех точек из некоторой окрестности точки x_0 за исключением ее самой.

Определение 31.3. Функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ локальный экстремум, если в этой точке функция $f(x)$ имеет локальный максимум или минимум.

Теорема (Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $x_0 \in (a, b)$, и x_0 — точка экстремума функции $f(x)$. Тогда либо производная $f'(x_0)$ не существует, либо $f'(x_0) = 0$.

Заметим, что точки, в которых (полная) производная данной функции обращается в нуль, называются *критическими*.

Таким образом, по теореме Ферма, все точки экстремума являются критическими точками. Обратное, как будет показано ниже, не верно.

Доказательство теоремы Ферма. Пусть, для определенности, функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум. По определению это означает, что можно найти такое $\delta > 0$, что, если

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad (31.1)$$

и $x \neq x_0$, то

$$f(x) - f(x_0) < 0. \quad (31.2)$$

Следовательно, при изменении x в указанном интервале отношение

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (31.3)$$

имеет разные знаки при $x > x_0$ и при $x < x_0$. Действительно, очевидны следующие неравенства:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \text{ если } x < x_0, \quad (31.4)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0, \text{ если } x > x_0. \quad (31.5)$$

Обозначим разности $x - x_0$ через Δx и $f(x) - f(x_0)$ через Δy . Рассмотрим следующий предел (если, конечно, он существует):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (31.6)$$

Если $\Delta x \rightarrow 0$, а x остается меньше x_0 , то

$$f'(x_0) \geq 0; \quad (31.7)$$

если же $\Delta x \rightarrow 0$, а x остается больше x_0 , то

$$f'(x_0) \leq 0. \quad (31.8)$$

Итак, нами показано, что если в точке, где функция имеет максимум, существует производная, то

$$f'(x_0) = 0, \quad (31.9)$$

что и доказывает теорему.

Можно привести простой пример, когда функция имеет локальный максимум, но не имеет в нем производной:

$$y = f(x) = -|x|. \quad (31.10)$$

Задача из исторического прошлого.

Торговец купил на 40 рублей товара, которого часть, а именно, число фунтов, удовлетворяющее уравнению:

$$\sqrt{2x} - \sqrt{x-4} = 3,$$

при перевозке испортилась. Несмотря на то, продав каждый фунт остального товара по цене, превосходящей цену, им самим заплаченную, на

$$\frac{\sqrt{5}[(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2]}{2\sqrt{0,2}},$$

копеек, получил 2 рубля прибыли.

Сколько фунтов товара купил торговец?

Ответ. 50 фун.

32. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, их применение

Начнем раздел с теоремы, которая имеет важный наглядный геометрический смысл.

Теорема 32.1 (Ролля). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , и при этом $f(a) = f(b)$ (рис. 32.1), то существует такое $x \in (a, b)$, что

$$f'(x) = 0. \quad (32.1)$$

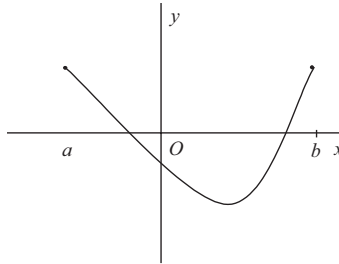


Рис. 32.1

Доказательство. В принципе, достаточно доказать теорему для случая $f(a) = f(b) = 0$, поскольку более общий случай сводится к последнему заменой функции $f(x)$ на $f(x) - f(a)$.

Итак, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, значит, существует точка $x_1 \in [a, b]$, в которой $f(x)$ имеет максимум, и точка $x_2 \in [a, b]$, в которой $f(x)$ имеет минимум (это — достиженность максимального и минимального значений).

Если $x_1 = x_2$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a, b]$, а значит, $f'(x) = 0$ во всех точках отрезка $[a, b]$, и теорема доказана.

Если $x_1 \neq x_2$, то либо $f(x_1)$, либо $f(x_2)$ не равны $f(a) = f(b)$.

Та точка из x_1 и x_2 , для которой равенство неверно, является внутренней точкой отрезка $[a, b]$, а также точкой локального экстремума (поскольку рассматриваемая функция дифференцируема во всех внутренних точках). Тогда по теореме Ферма или $f'(x_1)$, или $f'(x_2)$ равны нулю. Теорема доказана.

Если функция $f(x)$ задана некоторым аналитическим выражением, например, с помощью конечной комбинации элементарных функций, то вполне актуальны следующие две задачи:

А) Найти значение функции $f(x)$ при заданном значении $x = a$.

Б) Найти значения, предельные для этой функции, как на бесконечности, так и при x , стремящемся к таким значениям, при

которых аналитическое выражение, которым функция задана, теряет смысл.

Решения обеих задач основаны на приложении теоремы Коши (а на самом деле ее более частного варианта — теоремы Лагранжа).

Теорема 32.2 (Лагранжа о формуле конечных приращений). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что:

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b). \quad (32.2)$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы сводится к теореме Ролля. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = (b - a)[f(x) - f(a)] - (x - a)[f(b) - f(a)]. \quad (32.3)$$

Ясно, что построенная функция $F(x)$ непрерывна на отрезке и дифференцируема на интервале. Более того, функция $F(x)$ обращается в нуль при $x = a$ и $x = b$. Поэтому по теореме Ролля существует такое значение c , лежащее в интервале (a, b) , что

$$F'(c) = 0. \quad (32.4)$$

Честно подсчитав производную функции $F(x)$

$$F'(x) = (b - a)f'(x) - [f(b) - f(a)] \quad (32.5)$$

в точке $x = c$ и приравняв ее к нулю, получим выводимую формулу для конечных приращений. Теорема Лагранжа доказана.

Данную теорему хотелось бы перефразировать следующим образом:

отношение приращения функции к приращению аргумента равно производной от заданной функции, вычисленной при некотором значении аргумента, заключенном между начальным и наращенный его значением.

Следующая теорема по сути дела обобщает теорему Лагранжа, но их доказательства полностью аналогичны.

Теорема 32.3 (Коши). Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) , при этом $g'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$, а также $g(a) \neq g(b)$, то на интервале (a, b) найдется точка c такая, что

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (32.6)$$

Доказательство. Данная формула называется, кстати, *формулой Коши*.

Доказательство аналогично доказательству теоремы Лагранжа. Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]. \quad (32.7)$$

Очевидно, эта функция дифференцируема, и ее производная равна

$$F'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)]. \quad (32.8)$$

Нетрудно подсчитать, что функция $F(x)$ при $x = a$ и $x = b$ имеет равные значения:

$$f(a)g(b) - g(a)f(b). \quad (32.9)$$

Поэтому существует такое значение c , лежащее в интервале (a, b) , что

$$F'(c) = 0, \quad (32.10)$$

т.е.

$$f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0. \quad (32.11)$$

Используя теперь все условия теоремы Коши, приходим к справедливости самой формулы Коши. Теорема доказана.

Задача из исторического прошлого.

Лавочник купил несколько стаканов за 1,8 рубля. Так как из них

$$\frac{(\sqrt{21}-1) \cdot \sqrt{1+\sqrt{21}}}{2\sqrt{2}}$$

разбилось, то, чтобы не получить убытка, он остальные должен был продавать дороже, каждый стакан на столько копеек, сколько единиц содержит значение у, обращающее трехчлен

$$\sqrt{5y+1} - \sqrt{5y-6} - 1$$

в нуль.

Сколько стаканов купил лавочник?

Ответ. 20 стак.

33. Правило Лопиталя

Теорема Коши, доказанная в предыдущем разделе, часто помогает находить предельные значения функций.

Но при вычислении этих предельных значений могут возникнуть некоторые неопределенности. Рассмотрим далее две классические задачи на раскрытие возможных неопределенных выражений.

Теорема 33.1 (первое правило Лопиталя). Пусть:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на некотором интервале $(a - \delta_1, a)$ для некоторого $\delta_1 > 0$;

2) существуют пределы (слева), и выполнены равенства:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} g(x) = 0; \quad (33.1)$$

3) производные $f'(x), g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a - \delta_1, a)$ для некоторого $\delta_1 > 0$;

4) существует предел (слева)

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (конечный или бесконечный).}$$

Тогда существует предел (слева) $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и выполнено равенство:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (33.2)$$

Доказательство. В силу условия 2), доопределим наши две функции в точке a , а именно:

$$f(a) = g(a) = 0. \quad (33.3)$$

Выберем $\delta_2 < \delta_1$. Тогда на отрезке $[a - \delta_2, a]$ мы находимся в условиях недавно доказанной теоремы Коши. Действительно, необходимая непрерывность и дифференцируемость двух функций имеется, кроме того, по условию 3) для любого $x \in [a - \delta_2, a]$ выполнено неравенство $g(x) \neq g(a)$.

Тогда, по теореме Коши, на отрезке $\forall x \in [a - \delta_2, a]$ существует значение $c \in [a - \delta_2, a]$ такое, что

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad (33.4)$$

(т.е. переменная x приближается к значению a слева). В силу (33.3) равенство (33.4) запишется проще:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (33.5)$$

Если $x \rightarrow a - 0$, то и c тоже стремится к a , так как значение c всегда лежит на интервале $(a - \delta_2, a)$. Поэтому, если существует предел (слева)

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad (33.6)$$

то

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (33.7)$$

А вот теперь, в силу свойства 4), равенство (33.7) легко преобразуется в искомое равенство (33.2). Теорема доказана.

Следствие 1. В теореме 33.1 условие $x \rightarrow a - 0$ и интервалы вида $(a - \delta_1, a)$ можно заменить на условие $x \rightarrow a + 0$ и интервалы вида $(a, a + \delta_1)$. При этом вычисление пределов слева перейдет в вычисление пределов справа.

Объединяя в окрестностном смысле теорему 33.1 и предыдущее следствие 1, верно

Следствие 2 (первое правило Лопиталья). Пусть:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на некотором интервале $(a - \delta, a + \delta)$, дифференцируемы на множестве $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ при некотором значении $\delta > 0$;

2) существуют следующие пределы и выполнены равенства:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0; \quad (33.8)$$

3) производные $f'(x)$, $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$.

4) существует следующий предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (конечный или бесконечный).}$$

Тогда существует предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и выполнено равенство:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (33.9)$$

Перефразируя первое правило Лопиталя, можно заметить, что:

если две функции обращаются в нуль в одной и той же точке и имеют конечные производные, не обращающиеся в нуль одновременно в достаточно малой окрестности этой точки, то предельное значение их отношения в данной точке равно пределу отношения их производных при стремлении к данной точке, если только этот предел существует.

Второе правило касается исследования отношения двух функций в бесконечно удаленной точке, хотя идеологически оба правила раскрытия неопределенностей аналогичны.

Сразу же сформулируем второе правило раскрытия неопределенности для двустороннего предела (аналогично предыдущему следствию 2).

Теорема 33.2. (второе правило Лопиталя). Пусть:

- 1) функции $f(x)$, $g(x)$ определены и дифференцируемы на множестве $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ при некотором значении $\delta > 0$;
- 2) производные $f'(x)$, $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$;
- 3) выполнены равенства:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty; \quad (33.10)$$

- 4) существует следующий предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (33.11)$$

Тогда существует предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и выполнено равенство:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (33.12)$$

Доказательство. Прямо применять теорему Коши при значении $x = a$ мы не можем, так как выполнено свойство 3). Поэтому выберем значения x_0 , близкое к a , и x , находящееся между x_0 и a . Теперь видно, что мы находимся в условиях теоремы Коши (более подробное объяснение этого аналогично объяснению из теоремы 33.1):

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad (33.13)$$

где $a < x < c < x_0$ или $x_0 < c < x < a$; при этом пользуемся условием 2) доказываемой теоремы.

Полученное равенство (33.13) можно записать следующим образом:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (33.14)$$

Деля обе части на второй множитель

$$\frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}, \quad (33.15)$$

получим:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}. \quad (33.16)$$

Существующий предел в условии 4) теоремы обозначим через r . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что из неравенства

$$|x - a| < \delta \quad (33.17)$$

будет следовать неравенству

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - r \right| < \varepsilon. \quad (33.18)$$

Выбрав такое значение δ , фиксируем теперь окончательно точку x_0 так, чтобы

$$|x_0 - a| < \delta. \quad (33.19)$$

Так как $a < x < c < x_0$ (или $x_0 < c < x < a$), то значение $|c - a|$ во всяком случае меньше δ , а потому

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - r \right| < \varepsilon \quad (33.20)$$

или

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = r + \theta\varepsilon, \quad (33.21)$$

где $|\theta| < 1$.

Пусть теперь $x \rightarrow a$; так как выполнено условие 3), то

$$\frac{g(x_0)}{g(x)} \rightarrow 0, \quad \frac{f(x_0)}{f(x)} \rightarrow 0, \quad (33.22)$$

а потому дробь

$$\frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \quad (33.23)$$

стремится к 1 при $x \rightarrow a$. Значит, можно взять $\delta_1 < \delta$ столь малым, чтобы имело место неравенство

$$\left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon \quad (33.24)$$

при $|x - a| < \delta_1$. Отсюда получаем следующее:

$$\frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1 + \theta_1\varepsilon \quad (33.25)$$

при $|x - a| < \delta_1$, где $|\theta_1| < 1$.

Теперь из (33.16), (33.21), (33.25) следует, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (r + \theta\varepsilon)(1 + \theta_1\varepsilon) \quad (33.26)$$

при $|x - a| < \delta_1$.

Поэтому

$$\frac{f(x)}{g(x)} = r + \varepsilon(\theta + \theta_1 r + \theta\theta_1\varepsilon) < r + \varepsilon(1 + r + 1) = r + \varepsilon(2 + r), \quad (33.27)$$

или

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - r \right| < c_1\varepsilon \quad (33.28)$$

при $|x - a| < \delta_1$, где c_1 — постоянная величина. Так как значение ε сколь угодно мало, то и величина $c_1\varepsilon$ может быть сделана сколь угодно малой, и последнее неравенство доказывает теорему.

Только что доказанную теорему прочитаем следующим наглядным образом:

предельное значение отношения двух функций, где и числитель, и знаменатель неограниченно возрастают по абсолютной величине при стремлении независимого переменного к некоторой точке, равно отношению производных данных функций при условии, что эти производные существуют, конечны и не обращаются в нуль в достаточно малой окрестности данной точки, и что предел отношения производных данных функций существует.

Задача из исторического прошлого.

Два капитала, из которых один состоял из стольких тысяч рублей, сколько единиц в корне уравнения:

$$\sqrt{2(\sqrt{14-x}\sqrt{0,4})(4\sqrt{3,5+x}\sqrt{1,6})} = (x+11)^{-1} \cdot \sqrt{(x+11)^3},$$

а другой в

$$(3\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{81}) \cdot (3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9} + 4) \cdot (\sqrt[3]{3} - \sqrt{2})$$

раз больше, по завещанию отца должны быть разделены между детьми поровну. Так как, однако, до раздела наследства двое из наследников умерли, то каждый из оставшихся получил на 2000 рублей больше, чем первоначально предполагалось.

Сколько было наследников в момент завещания?

Ответ. 7.

34. Производные и дифференциалы высших порядков

Как указано ранее, если функция (одной независимой переменной) $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b) , то каждой точке $x \in (a, b)$ можно сопоставить некоторое число $f'(x)$, которое и называется производной функции $f(x)$.

Если производная тоже имеет производную, то эта производная называется первой производной от первой производной или *второй производной функции* $f(x)$ и обозначается как

$$f''(x) = (f'(x))'. \quad (34.1)$$

Аналогичным образом определяется третья, четвертая и все последующие производные (функции одной независимой переменной, если, конечно, эти производные существуют):

$$f'''(x) = (f''(x))', \dots, f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'. \quad (34.2)$$

Теорема 34.1 (формула Лейбница). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют n -е производные в данной точке, то в этой же точке справедливо следующее тождество:

$$\begin{aligned} (uv)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)} = \\ &= \sum_{m=0}^n C_n^m u^{(m)} v^{(n-m)}, \end{aligned} \quad (34.3)$$

где

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n. \quad (34.4)$$

Доказательство. По индукции. При $n = 1$ теорема справедлива. Предположим, что она справедлива для любого $k \leq n$. Докажем, что она справедлива и для $k = n + 1$.

Действительно,

$$\begin{aligned} (uv)^{(n+1)} &= \left(\sum_{m=0}^n C_n^m u^{(m)} v^{(n-m)} \right)' = u^{(n+1)}v + [u^{(n)}v' + nu^{(n-1)}v'] + [nu^{(n-1)}v'' + \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'''] + \dots + u'v^{(n)} + uv^{(n+1)} = \\ &= u^{(n+1)}v + (n+1)u^{(n)}v' + \frac{n(n+1)}{2}u^{(n-1)}v'' + \dots + uv^{(n+1)} = \\ &= \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m u^{(m)} v^{(n+1-m)}, \end{aligned} \quad (34.5)$$

что и требовалось доказать.

(В последней формуле квадратными скобками специально выделены подобные члены.)

Пусть теперь функция $f(x)$ одной независимой переменной дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда у нее есть дифференциал

$df(x) = f'(x)dx$ в каждой точке рассматриваемого интервала.

Зафиксируем значение приращения аргумента $dx = h$.

Тогда $df(x)$ можно рассматривать как функцию от x на интервале (a, b) . Если эта функция дифференцируема, то дифференциал имеет вид:

$$d(f'(x)h) = f''(x)h^2 = f''(x)dx^2 \quad (34.6)$$

(это верно лишь при фиксированном h , поскольку, вообще говоря, $d(dx) = d^2x$).

Это выражение называется *вторым дифференциалом* и обозначается следующим образом:

$$d^2f(x), \quad (34.7)$$

то есть

$$d^2f(x) = f''(x)dx^2. \quad (34.8)$$

Аналогично можно определить

$$\begin{aligned} d^3f(x) &= d(d^2f(x)) = f'''(x)dx^3, \dots, d^n f(x) = \\ &= d(d^{(n-1)}f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n. \end{aligned} \quad (34.9)$$

Теперь мы можем записать выражение для производной:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}. \quad (34.10)$$

В силу формулы (34.3) можно написать выражение для дифференциала порядка n :

$$\begin{aligned} d^n(uv) &= ud^{(n)}v + C_n^1 du d^{n-1}v + C_n^2 d^2u d^{n-2}v + \dots \\ &\dots + C_n^k d^k u d^{n-k}v + \dots + d^n u \cdot v. \end{aligned} \quad (34.11)$$

При замене переменной $x \mapsto y$ выражение первого дифференциала остается неизменным (*инвариантным*):

$$\begin{aligned} df(x) &= df(x(y)) = dg(y) = \\ &= \frac{df(x(y))}{dx} \frac{dx}{dy} dy = \frac{dg(y)}{dy} dy = g'(y)dy, \end{aligned} \quad (34.12)$$

где

$$g(y) = f(x(y)). \quad (34.13)$$

Этого не скажешь о втором (третьем и т.д.) дифференциале (т.е. дифференциалы высших порядков — *неинвариантны* относительно замены независимой переменной).

Задача из исторического прошлого.

К резервуару приделаны два крана. Через первый кран вся вода из наполненного резервуара может вытечь 6 минутами скорее, чем через второй кран, так как в каждую минуту через него выливается 3 ведрами более.

Определить, через сколько минут каждый кран порознь опорожняет резервуар, если известно, что число ведер, вмещаемых резервуаром, состоит из двух слагаемых v и u , определяемых из уравнений:

$$\sqrt{v} = \frac{u}{5} + 2,$$

$$\sqrt{v} + \sqrt{0,2u} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}(\sqrt{5} - 1)(7 + 3\sqrt{5})}{2\sqrt{2}(\sqrt{5} - 3)^{-2}}.$$

Ответ. 8 мин., 14 мин.

35. Формула Тейлора с остаточным членом общего вида в формах Пеано, Лагранжа и Коши.

Разложение некоторых основных элементарных функций по формуле Маклорена. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений

Среди элементарных функций наиболее простыми являются полиномы (т.е. многочлены). В самом деле, вычисление значения полинома не представляет затруднений, а вот, например, вычисление значения натурального логарифма или квадратного корня в произвольной точке создает значительные трудности.

Поэтому естественно возникает вопрос о приближенном представлении данной функции в виде полинома. Этому и посвящен данный раздел.

Рассмотрим функцию $f(x)$ (не полином), имеющую все производные до $(n + 1)$ -го порядка включительно в окрестности некоторой точки a , и составим для нее следующее выражение:

$$f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a). \quad (35.1)$$

Выражение (35.1) является полиномом, но оно не равно функции $f(x)$, так как $f(x)$ не есть полином. Если мы все-таки приравняем выражение (35.1) к функции $f(x)$, то будет сделана некоторая ошибка, и для того, чтобы ее исправить, мы должны будем ввести еще новый член. Вот тогда мы получим точное равенство:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n. \quad (35.2)$$

Член R_n носит название *остаточного члена*. Он является, вообще говоря, функцией от x, a, n .

Выражение (35.2) будет представлять для нас интерес только в том случае, когда остаточный член мал по абсолютной величине, так как только при этом функция $f(x)$ хорошо приближенно представляется в виде полинома по формуле (35.1). Поэтому перед нами стоит основная задача — исследовать остаточный член.

Для начала запишем остаточный член в следующей форме:

$$R_n = \frac{(x-a)^p}{n!p} Q, \quad (35.3)$$

где p — некоторое натуральное число (это всегда возможно, так как при любом p можно определить соответствующее Q). Формула (35.2) переписывается как

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^p}{n!p} Q. \quad (35.4)$$

Теперь будем рассматривать в формуле (35.4) величины x и a как данные числа. Следовательно, Q будет иметь определенное числовое значение.

Для вычисления Q введем вспомогательную функцию $F(t)$, определенную следующим образом:

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1!} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \dots \\ \dots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^p}{n!p} Q, \quad (35.5)$$

в которой Q имеет значение, определенное формулой (35.4).

Найдем производную $F'(t)$ как функции одной переменной t :

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1!} f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) - \frac{(x-t)}{2!} f'''(t) + \\ + \frac{3(x-t)^2}{3!} f'''(t) - \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(IV)}(t) + \dots + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) - \\ - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{p(x-t)^{p-1}}{n!p} Q, \quad (35.6)$$

или, сократив,

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^{p-1}}{n!} Q. \quad (35.7)$$

Отсюда видно, что только что вычисленная производная существует, так как функция f , по предположению, имела $(n+1)$ -ю производную.

Если в выражении для $F(t)$ положить $t = x$, то получим $F(x) = 0$ и, кроме того, в силу равенства (35.4) имеем $F(a) = 0$. Следовательно, функция $F(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, и существует такое значение $t = c$, где c заключено где-то между a и x , что $F'(c) = 0$, т.е.

$$-\frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) + \frac{(x-c)^{p-1}}{n!} Q = 0, \quad (35.8)$$

или

$$\frac{(x-c)^{p-1}}{n!}[-(x-c)^{n-p+1}f^{(n+1)}(c)+Q]=0. \quad (35.9)$$

Первый множитель не равен нулю, так как $c \neq x$. Поэтому равен нулю второй множитель (в квадратных скобках), откуда и находим Q :

$$Q=(x-c)^{n-p+1}f^{(n+1)}(c). \quad (35.10)$$

Поэтому остаточный член формулы (35.2) запишется в следующем виде:

$$R_n=\frac{(x-a)^p}{n!p}(x-c)^{n-p+1}f^{(n+1)}(c). \quad (35.11)$$

Вспомним, что p — натуральное число. Соответствующим выбором p мы можем остаточный член привести к форме, удобной для применений.

Например, положим

$$p=n+1.$$

Тогда выражение

$$R_n=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \quad (35.12)$$

задает *остаточный член в форме Лагранжа*. А формула (35.11) задает *общий вид остаточного члена*. Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 35.1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема на интервале (x_0, x_1) и $a < b$ — произвольные две точки из этого интервала. Тогда существует постоянная $c \in (a, b)$ такая, что функция $f(x)$ на уменьшенном интервале представляется в виде (35.2) с остаточным членом в виде (35.12).

Замечание (остаточный член в форме Коши). Положим в формуле (35.11)

$$p=1.$$

Тогда получим *остаточный член в форме Коши*:

$$R_n=\frac{(x-a)(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c). \quad (35.13)$$

Отметим, что в формулах (35.12) и (35.13) числа c , вообще говоря, разные. Утверждается главное: такие числа на соответствующих интервалах существуют.

Отметим, что все отмеченные представления функции $f(x)$ данного раздела называются *формулами Тейлора* (с различными остаточными членами) в окрестности точки a .

При $a = 0$ формула Тейлора называется *формулой Маклорена*.

Из общего вида (35.11) остаточного члена можно сделать простой вывод о порядке малости самого остаточного члена. Нетрудно заметить, что он имеет порядок малости больший, чем $(x - a)^n$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 35.2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Рассмотрим для функции $f(x)$ многочлен Тейлора степени n

$$\begin{aligned} f_n(a, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \Delta x + \frac{f''(a)}{2!} (\Delta x)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (\Delta x)^n, \end{aligned} \quad (35.14)$$

где $\Delta x = x - a$.

Тогда, если функция $f(x)$ дифференцируема $(n - 1)$ раз в некоторой окрестности точки $x = a$ и существует высшая производная $f^{(n)}(a)$, то остаток удовлетворяет следующему уравнению:

$$r(x) = f(x) - f_n(a, x) = o((\Delta x)^n) \quad (35.15)$$

при $\Delta x \rightarrow 0$.

Рассмотрим теперь примеры применения формулы Маклорена.

$$1) f(x) = e^x.$$

Выполнено равенство:

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (35.16)$$

а также $f^{(n+1)}(x) = e^x$.

Тогда формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа примет вид:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (35.17)$$

$$2) f(x) = \sin x.$$

Выполнено равенство:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n + x\right), \quad (35.18)$$

а также

$$f^{(2k+1)}(\theta x) = \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2} + \theta x\right) = (-1)^k \cos \theta x.$$

Тогда формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа примет вид:

$$\begin{aligned} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \\ + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cos \theta x. \end{aligned} \quad (35.19)$$

Аналогичным образом можно получить, что

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cos \theta x. \quad (35.20)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\frac{1}{1+\theta x} \right)^{n+1}. \quad (35.21)$$

Формула Тейлора (Маклорена) может применяться для приближенных вычислений.

Например, вычислим число e с любой интересующей нас точностью. Следующую сумму, в зависимости от заданной точности, можно оборвать в любой момент:

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \quad (35.22)$$

Задача из исторического прошлого.

Определить двузначное число по следующим условиям: сумма квадратов чисел его единиц и десятков более самого числа на t и менее числа, написанного теми же цифрами, как и данное, но расположенными в обратном порядке, на величину n , где t и n суть корни уравнений:

$$\begin{aligned}\sqrt{2(m+n)} - \sqrt{m-n} &= 2, \\ \sqrt{18(m+n)} - 2\sqrt{m-n} &= 10.\end{aligned}$$

Ответ. 57.

36. Условия монотонности функции. Экстремумы функции, необходимое условие. Достаточные условия экстремума

Напомним, что функция $f(x)$ называется (строго) монотонно возрастающей на интервале (a, b) , если для любой пары значений x_1 и x_2 , принадлежащих рассматриваемому интервалу и связанных неравенством $x_1 < x_2$, будет иметь место неравенство

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Соответственно, если для любой пары значений x_1 и x_2 интервала (a, b) , связанных неравенством $x_1 < x_2$, всегда следует неравенство

$$f(x_1) > f(x_2),$$

то функция называется (строго) монотонно убывающей на данном интервале.

Напомним также, что можно употреблять термин «монотонная функция», понимая под этим или монотонно возрастающую, или монотонно убывающую функцию.

Если функция непрерывна и дифференцируема, то вопрос о ее возрастании или убывании решается достаточно легко.

Теорема 36.1. Дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ не убывает на (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ на интервале (a, b) .

Теорема 36.2. Дифференцируемая функция $f(x)$ (строго) монотонно возрастает на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ на (a, b) и $f'(x) \neq 0$ ни на каком отрезке $[c, d] \subset (a, b)$.

Аналогичные теоремы справедливы и для не возрастающих (строго) монотонно убывающих функций).

Одновременное доказательство теорем 36.1 и 36.2. Докажем сначала необходимость условия возрастания (не убывания). Пусть $f(x)$ — функция, возрастающая на интервале (a, b) . Рассмотрим отношение

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (36.1)$$

Для возрастающей функции числитель и знаменатель этой дроби имеют одинаковые знаки (необходимо только, чтобы точки x и $x + \Delta x$ принадлежали интервалу (a, b)). Поэтому

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > (\geq) 0, \quad (36.2)$$

а поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0. \quad (36.3)$$

Тем самым необходимость утверждения теоремы 36.1 и первой части теоремы 36.2 доказана. Докажем необходимость второй части теоремы 36.2.

Предположим, что функция $f(x)$ монотонно возрастает на интервале (a, b) , а ее производная $f'(x)$ равна нулю во всех точках некоторого отрезка $[c, d] \subset (a, b)$. Рассмотрим разность $f(x_1) - f(x_2)$, где $x_1, x_2 \in (a, b)$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2), \quad (36.4)$$

где точка c лежит между x_1 и x_2 , т.е. внутри отрезка $[c, d]$. Тогда, согласно предположению, $f'(c) = 0$ и, следовательно, $f(x_1) = f(x_2)$, что противоречит предположению о возрастании функции.

Перейдем теперь к доказательству достаточности.

Пусть $f'(x) \geq 0$ для всех значений x из интервала (a, b) .

Возьмем три значения этого интервала

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad (36.5)$$

и применим теорему Лагранжа два раза:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c_1), \text{ где } x_1 < c_1 < x_2, \quad (36.6)$$

$$f(x_3) - f(x_2) = (x_3 - x_2)f'(c_2), \text{ где } x_2 < c_2 < x_3. \quad (36.7)$$

Так как $f'(c_1) \geq 0$ и $f'(c_2) \geq 0$, то правые части двух последних равенств неотрицательны, и мы получаем:

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0, \quad f(x_3) - f(x_2) \geq 0 \quad (36.8)$$

или

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3). \quad (36.9)$$

Эти неравенства справедливы для любого x_2 , лежащего между x_1 и x_3 . Поэтому, если бы имело место равенство

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) \quad (36.10)$$

для всех таких x_2 , то это значило бы, что функция $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_3]$ — тождественная постоянная. Но тогда ее производная на этом отрезке была бы равна тождественно нулю, что противоречит условиям теоремы.

Следовательно, в выражении (36.9) хотя бы в одном месте должен быть знак неравенства. Достаточность условий обеих теорем также доказана.

Как отмечалось выше, при исследовании функций имеют большое значение так называемые максимальные и минимальные значения.

Автор счел необходимым повторить ряд определений, которые уже в несколько другой форме излагались выше.

Напомним, что функция $f(x)$ имеет (строгий) локальный максимум при $x = c$, если можно найти такую окрестность точки $x = c$, что в ней при $x \neq c$, всегда выполнено неравенство $f(x) \leq (<) f(c)$, иначе говоря, если можно найти такое $\delta > 0$, что при $c - \delta < x < c + \delta$ и $x \neq c$ имеет место неравенство $f(x) - f(c) \leq (<) 0$.

Функция $f(x)$ имеет (строгий) локальный минимум при $x = c$, если можно найти такую окрестность точки $x = c$, что в ней при $x \neq c$ всегда выполнено неравенство $f(x) \geq (>) f(c)$, иначе говоря, если можно найти такое $\delta > 0$, что при $c - \delta < x < c + \delta$ и $x \neq c$ имеет место неравенство $f(x) - f(c) \geq (>) 0$.

Максимумы и минимумы функции называются ее экстремумами.

Напомним, что необходимым условием экстремальности функции в точке является теорема Ферма, сформулированная в разделе 31.

Следующие теоремы несут некоторые необходимые видоизменения формулировок аналогичных утверждений, представленных ранее. Вообще говоря, следующие теоремы несут достаточные условия экстремума.

Теорема 36.3. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 , в которой $f'(x_0) = 0$ (так называемой *стационарной (критической) точки*). Тогда:

а) если $f'(x) > 0$ слева от x_0 и $f'(x) < 0$ справа от x_0 , то x_0 — точка строго локального максимума функции $f(x)$;

б) если $f'(x) < 0$ слева от x_0 и $f'(x) > 0$ справа от x_0 , то x_0 — точка строго локального минимума функции $f(x)$.

Доказательство. Предположим сначала, что знак меняется с «плюса» на «минус», т.е. $f'(x) > 0$ слева от x_0 и $f'(x) < 0$ справа от x_0 .

Рассмотрим разность $f(x) - f(x_0)$, к которой применим теорему Лагранжа о конечном приращении:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c). \quad (36.11)$$

Если $x < x_0$ ($x > x_0$), то и $c < x_0$ ($c > x_0$), так как по теореме Лагранжа значение c заключено между x и x_0 (x_0 и x). Поэтому $x - x_0 < 0$ ($x - x_0 > 0$) и $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$) (по предположению). Следовательно, $f'(c)(x - x_0) < 0$. Итак, если $x < x_0$ ($x > x_0$), то $f(x) - f(x_0) < 0$.

Объединяя все сказанное, можно утверждать, что для любого значения $x \neq x_0$, взятого внутри рассматриваемой окрестности точки x_0 , имеет место неравенство

$$f(x) - f(x_0) < 0, \quad (36.12)$$

что и означает, что при $x = x_0$ функция $f(x)$ достигает максимума.

Совершенно аналогично доказывается, что, если $f'(x) < 0$ слева от x_0 и $f'(x) > 0$ справа от x_0 , то x_0 — точка строго локального минимума функции $f(x)$.

Следующие теоремы дают достаточные условия наличия в критической точке локальных максимума или минимума.

Теорема 36.4. Пусть x_0 — критическая точка для функции $f'(x)$, т.е. $f'(x_0) = 0$ и существует $f''(x_0)$. Тогда:

1) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка строго локального максимума;

2) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка строго локального минимума.

Доказательство. Исследуем знак разности $f(x_0 + h) - f(x_0)$, применив теорему Лагранжа:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h), \quad (36.13)$$

где $0 < \theta < 1$.

Так как $f'(x_0) = 0$, то последнее равенство можно записать следующим образом:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h[f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0)] \quad (36.14)$$

или, умножая и деля правую часть на θh ,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \theta h^2 \frac{f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0)}{\theta h}. \quad (36.15)$$

Множитель $\frac{f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0)}{\theta h}$, стоящий в правой части, имеет своим пределом при $\theta h \rightarrow 0$ (а, значит, и при $h \rightarrow 0$) следующее значение второй производной при $x = x_0$:

$$\lim_{\theta h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0)}{\theta h} = f''(x_0). \quad (36.16)$$

Так как вторая производная $f''(x_0)$ по условию теоремы существует и не равна нулю, то

$$\frac{f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0)}{\theta h}$$

будет иметь такой же знак, как и $f''(x_0)$, если только h достаточно мало по абсолютной величине.

Возвращаясь к равенству (36.15), видно, что в правой его части стоят три множителя θ , h^2 и $\frac{f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0)}{\theta h}$. Множители θ , h^2 положительны, а множитель $\frac{f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0)}{\theta h}$, как мы только что показали, имеет такой же знак, как и $f''(x_0)$. Поэтому вся правая часть равенства (36.15) имеет такой же знак, как и $f''(x_0)$, если h достаточно мало по абсолютной величине. А это значит, что существует $\delta > 0$, что если $|h| < \delta$, то $f(x_0 + h) - f(x_0)$ имеет знак $f''(x_0)$. Поэтому, если $f''(x_0) > 0$, то $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$; если же $f''(x_0) < 0$, то и $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$. Теорема доказана.

Перепарафразировуем только что доказанную теорему:

тип критической точки функции зависит от знака второй производной данной функции в этой точке. Если это знак «плюс», то критическая точка — строгий локальный минимум функции, если это знак «минус» — строгий локальный максимум.

Если вторая производная равна нулю в данной точке экстремума (критической, стационарной) точки, то ее возможная принадлежность к локальным максимуму или минимуму зависит от высших производных данной функции в критической точке (если, конечно, производные высших порядков в данной точке существуют).

Следующая теорема как раз и имеет дело с таким исследованием типа критической точки с помощью производных функции высших порядков. Для этого воспользуемся формулой Тейлора.

Теорема 36.5. Пусть функция $f(x)$ $(2k - 1)$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , а также существует непрерывная производная данной функции порядка $2k$ ($k \geq 1$) в точке x_0 . При этом выполнена серия следующих равенств:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0, f^{(2k)}(x_0) \neq 0. \quad (36.17)$$

Тогда, если

$f^{(2k)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума,

а если

$f^{(2k)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума.

Доказательство. Развернем разность $f(x_0 + h) - f(x_0)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots \\ &\dots + \frac{h^{2k-1}}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(x_0) + \frac{h^{2k}}{(2k)!} f^{(2k)}(x_0 + \theta h). \end{aligned} \quad (36.18)$$

В силу условий доказываемой теоремы последнее равенство запишется следующим образом:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^{2k}}{(2k)!} f^{(2k)}(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1. \quad (36.19)$$

В силу непрерывности высшей ненулевой производной данной функции в точке x_0 можно найти сколь угодно малое $\delta > 0$, что для всех h , удовлетворяющих условию $|h| < \delta$, значения $f^{(2k)}(x_0 + h)$ и $f^{(2k)}(x_0)$ имеют один и тот же знак и при этом $f^{(2k)}(x_0 + h) \neq 0$.

А так как $|\theta h| < |h| < \delta$, то и $f^{(2k)}(x_0 + \theta h)$ и $f^{(2k)}(x_0)$ имеют один и тот же знак.

Следовательно,

$$f^{(2k)}(x_0 + \theta h) \neq 0. \quad (36.20)$$

Поскольку число $2k$ — четное, то первый множитель $\frac{h^{2k}}{(2k)!}$ в правой части равенства (36.19) будет положителен, каков бы ни был знак h . Поэтому и вся правая часть равенства (36.19) имеет такой же знак, как и множитель $f^{(2k)}(x_0 + \theta h)$, или такой же знак, как величина $f^{(2k)}(x_0)$.

Таким образом, мы получаем следующее:

- 1) $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$, если $f^{(2k)}(x_0) < 0$,
- 2) $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$, если $f^{(2k)}(x_0) > 0$

при всех значениях h , удовлетворяющих неравенству $|h| < \delta$, а это, по определению максимума и минимума, означает, что функция $f(x)$ достигает в точке x_0 максимума в первом случае и минимума во втором случае. Теорема доказана.

Возникает вопрос: а если первая высшая производная, которая не равна нулю в рассматриваемой критической точке x_0 , — нечетного порядка, будет ли данная критическая точка точкой локального экстремума?

Предположим, что первая высшая производная, которая не равна нулю в критической точке, — порядка $(2k + 1)$. Тогда множитель h^{2k+1} имеет разные знаки при h положительном и h отрицательном. Множитель же $f^{(2k+1)}(x_0 + \theta h)$, как мы уже удостоверились, сохраняет знак (если, конечно, $|h| < \delta$). Поэтому разность $f(x_0 + h) - f(x_0)$ имеет разные знаки при h положительных и при h отрицательных.

В этом случае экстремума вообще нет.

Все, что было выше, касалось локальных экстремумов. А вот как искать глобальные максимум и минимум (пока только лишь из критических точек, минуя так называемые условные экстремумы)? Первое, что приходит в голову, надо перебрать все точки экстремумов следующим достаточно простым образом.

В случае, когда функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема нужное количество раз на рассматриваемом отрезке, для нахождения наибольшего и наименьшего ее значений (пока только из критических точек) на целом отрезке нужно найти все стационарные (критические) точки, проверить их на экстремальность и выбрать соответствующие им наибольшее (наименьшее) значения функции (если все они существуют).

Задача из исторического прошлого.

Имеются два сплава золота и серебра; в одном количества этих металлов находятся в отношении

$$\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{3}\sqrt{2}}{\sqrt[3]{50}} : \frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}}},$$

а в другом — в отношении меньшего к большему из двух таких положительных чисел, разность которых 2, а разность их кубов 218. Сколько следует взять от каждого сплава, чтобы получить 52 лота нового сплава, в котором количества золота и серебра находились бы в отношении 21:31?

Ответ. 16 л.; 1 фун. 4 лот.

37. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба

Всякая прямая, не параллельная оси y , разбивает плоскость Oxy на две области, из которых одна содержит бесконечную часть положительной полуоси Ox , а другая — бесконечную часть отрицательной полуоси Ox . Мы будем говорить, что первая область лежит *выше*, вторая — *ниже* рассматриваемой прямой.

В данном разделе будем рассматривать только такие точки кривой $y = f(x)$, в которых существует касательная и при этом не параллельная оси Oy .

Назовем рассматриваемую кривую *выпуклой* в окрестности данной точки, если в этой окрестности кривая лежит ниже касательной. Если же в окрестности данной точки кривая лежит выше касательной, то назовем ее *вогнутой*.

Следующие определения некоторым образом корректируют данные выше наглядные определения выпуклости и вогнутости. Кроме того, они распространяют введенные только что новые понятия на целые интервалы.

Определение 37.1. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх* на интервале (a, b) , если ее график лежит под касательной к этой функции в любой точке данного интервала (рис. 37.1).

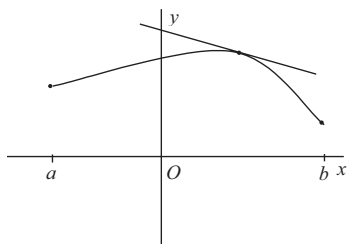


Рис. 37.1

То есть, если $x_0 \in (a, b)$ — произвольная точка, то $f_1(x) \geq f(x)$ $\forall x \in (a, b)$, где

$$f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (37.1)$$

— линейная функция, задающая график касательной к $f(x)$ в точке x_0 .

Определение 37.2. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз* на интервале (a, b) , если ее график лежит над касательной к этой функции в любой точке данного интервала (рис. 37.2).

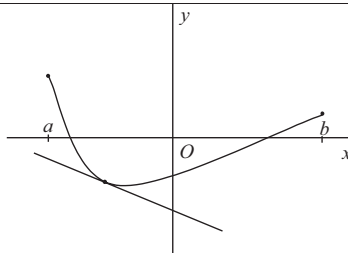


Рис. 37.2

То есть, если $x_0 \in (a, b)$ — произвольная точка, то $f_1(x) \leq f(x) \forall x \in (a, b)$.

Теорема 37.1. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную на всем интервале (a, b) , а также на нем у нее есть вторая производная. Тогда:

а) Если на всем интервале (a, b) для функции $f(x)$ выполнено свойство

$$f''(x) < 0, \quad (37.2)$$

то функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале (a, b) .

б) Если на всем интервале (a, b) для функции $f(x)$ выполнено свойство

$$f''(x) > 0, \quad (37.3)$$

то функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b) .

Доказательство. Итак, $y = f(x)$ — уравнение кривой, M — рассматриваемая точка на ней, абсцисса которой равна c .

Допустим, что MN — касательная к кривой $y = f(x)$ в точке M , и P — точка кривой, имеющая абсциссу $c + h$, N — точка касательной, имеющей ту же абсциссу. Обозначим через η ординату точки N на касательной (рис. 37.3).

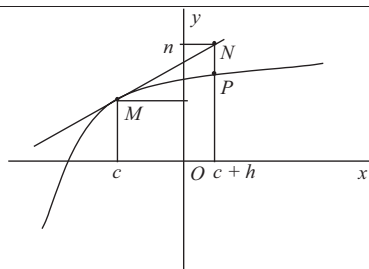


Рис. 37.3

Если существует такая окрестность точки M , что во всех ее точках всегда $y < \eta$, то кривая выпукла (вверх), если же $y > \eta$, то кривая выпукла (вниз) или вогнута.

Рассмотрим разность ординат $y - \eta$ при $x = c + h$. Справедливо следующее равенство:

$$\eta = f(c) + hf'(c), \quad (37.4)$$

поэтому разность $y - \eta$ можно представить в виде:

$$y - \eta = f(c + h) - [f(c) + hf'(c)] = f(c + h) - f(c) - hf'(c). \quad (37.5)$$

По условиям теоремы, применим к разности $f(c + h) - f(c)$ теорему Лагранжа о конечном приращении, после чего получим:

$$y - \eta = hf'(c + \theta h) - hf'(c),$$

где $0 < \theta < 1$,
или

$$y - \eta = h[f'(c + \theta h) - f'(c)]. \quad (37.6)$$

Разделим и умножим правую часть на θh и тогда получим:

$$y - \eta = \theta h^2 \frac{f'(c + \theta h) - f'(c)}{\theta h}. \quad (37.7)$$

В силу условий теоремы,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c + \theta h) - f'(c)}{\theta h} = f''(c) \neq 0.$$

Поэтому можно утверждать, что при h , достаточно малом по абсолютной величине, знак дроби $\frac{f'(c + \theta h) - f'(c)}{\theta h}$ будет таким же, как и знак $f''(c)$.

Теперь возвратимся к разности $y - \eta$, которая равна произведению трех сомножителей, два из которых положительны. Поэтому знак данной разности совпадает со знаком дроби $\frac{f'(c + \theta h) - f'(c)}{\theta h}$, знак которой, в свою очередь, совпадает со знаком $f''(c)$. Далее, в принципе, очевидно. Теорема доказана.

Перейдем к более подробному изучению случая, когда кривая в любой близости рассматриваемой точки расположена по обе стороны касательной, или, иначе говоря, когда кривая пересекает свою касательную.

Определение 37.3. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) (имеет на нем конечную производную), то точка x_0 , лежащая на касательной к функции $f(x)$, из интервала (a, b) называется *точкой перегиба* $f(x)$, если существует некоторая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 такая, что и в правой полуокрестности $(x_0, x_0 + \delta)$, и в левой полуокрестности $(x_0 - \delta, x_0)$ функция $f(x)$ выпукла, но направление выпуклости справа и слева разное (рис. 37.4).

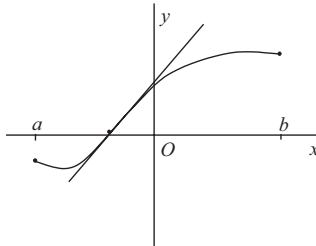


Рис. 37.4

Следующая теорема дает необходимый признак наличия у функции точки перегиба.

Теорема 37.2. Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале (a, b) и x_0 — точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Поскольку исследуемая функция $f(x)$ дважды дифференцируема на указанном интервале (a, b) , то на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ значение $f''(x_0)$ имеет строго отрицательный (положительный) знак, а на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ — строго положительный (отрицательный) знак. Так как вторая производная — непрерывная функция, то $f''(x_0) = 0$. Теорема доказана.

Для того чтобы найти точки перегиба, прежде всего заметим, что условие дважды непрерывной дифференцируемости можно несколько ослабить.

Действительно, если $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной на некотором интервале, содержащем точку x_0 , и имеет в нем всюду, кроме, быть может, точки x_0 , вторую производную, не равную нулю, то, по теореме 37.1, можно утверждать, что в точке перегиба вторая производная или не существует, или равна нулю.

Достаточные условия перегиба выражаются следующей теоремой.

Теорема 37.3. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на множестве $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, а величина $f''(x)$ имеет на этом множестве разные знаки при $x < x_0$ и при $x > x_0$. Тогда, если вторая производная существует и $f''(x_0) = 0$, то точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.

Доказательство. Предположим для определенности, что вторая производная меняет знак с «плюса» на «минус», т.е. при $x < x_0$ имеем $f''(x_0) > 0$, а при $x > x_0$, наоборот, $f''(x_0) < 0$. Тогда, сохраняя те же обозначения, которые были введены в теореме 37.1, будем иметь следующее:

$$y - \eta = h[f'(c + \theta h) - f'(c)], \quad (37.8)$$

где $0 < \theta < 1$.

Применяя еще раз теорему Лагранжа, получим, что

$$y - \eta = \theta h^2 f''(c + \theta_1 h), \quad (37.9)$$

где $0 < \theta_1 < \theta < 1$.

Заметим, что при h отрицательном выполнено неравенство $c + \theta_1 h < c$, а при h положительном — $c + \theta_1 h > c$. Поэтому по условиям теоремы при $h < 0$ вторая производная $f''(c + \theta_1 h)$ имеет знак

«плюс», а при $h > 0$ — знак «минус». Стало быть, левее рассматриваемого значения $y - \eta > 0$ и кривая лежит над касательной, а правее его — $y - \eta < 0$ и кривая лежит под касательной. Следовательно, мы имеем точку перегиба.

Аналогичное рассуждение приводит нас к такому же результату, если смена знака происходит с «минуса» на «плюс». Теорема доказана.

Далее, если функция допускает разложение по формуле Тейлора, то точки перегиба часто можно исследовать принципиально проще, чем это было указано выше.

Теорема 37.4. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) , $f''(x_0) = 0$ и существует третья производная $f'''(x_0) \neq 0$, то точка x_0 — точка перегиба.

Данная теорема выделена по той причине, что она описывает типичный случай существования у функции точки перегиба, но она является частным случаем следующей теоремы, после доказательства которой будет верна и теорема 37.4.

Теорема 37.5. Если функция $f(x)$ дифференцируема $2k$ раз на $[a, b]$ и существует непрерывная производная $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$, а $f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(2k)}(x_0) = 0$, то x_0 — точка перегиба.

Доказательство. Сохраним все обозначения, принятые выше.

По-прежнему рассмотрим разность $y - \eta$, где $y = f(x_0 + h)$, а $\eta = f(x_0) + hf'(x_0)$. Развернем величину $y = f(x_0 + h)$ по формуле Тейлора, тогда:

$$y = f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{2k}}{(2k)!} f^{(2k)}(x_0) + \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1. \quad (37.10)$$

Поэтому

$$y - \eta = \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{2k}}{(2k)!} f^{(2k)}(x_0) + \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(x_0 + \theta h). \quad (37.11)$$

Отсюда мы делаем заключение, что разложение $y - \eta$ по степеням h начинается с члена не ниже, чем второй степени. Но по условию теоремы равенство (37.11) можно переписать как

$$y - \eta = \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(x_0 + \theta h). \quad (37.12)$$

Поскольку производная $f^{(2k+1)}(x)$ непрерывна, существует $\delta > 0$ такое, что величина $f^{(2k+1)}(x_0 + h)$ имеет тот же знак, что и $f^{(2k+1)}(x_0)$ для всех $|h| < \delta$. Так как $|\theta h| < |h|$, то при $|h| < \delta$ знак величины $f^{(2k+1)}(x_0 + \theta h)$ тот же, что и знак $f^{(2k+1)}(x_0)$.

Так как $2k + 1$ — нечетное число, то каково бы ни было h , знак разности $y - \eta$ меняется со знаком h , и поэтому кривая расположена по обе стороны касательной. Имеем в этом случае точку перегиба. Теорема доказана.

Задача из исторического прошлого.

Найти дробь по следующим условиям:

- 1) знаменатель дроби на 1 более числителя;
- 2) если к числителю и знаменателю придать по столько единиц, сколько их содержится в большем корне квадратного уравнения с одним неизвестным, у которого произведение корней 6, а сумма их 5, то получится новая дробь, произведение которой на искомую равно выражению:

$$\frac{7(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{20(2 - \sqrt[3]{15})(2 + \sqrt[3]{15})}.$$

Ответ. $\frac{4}{5}$.

38. Асимптоты функции

Поведению функции на бесконечности — его так называемому «поведению вдаль», или асимптотическому поведению, — и посвящен данный раздел. Он, в принципе, имеет достаточно важное прикладное значение.

Определение 38.1. Прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой функции* $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если остаток

$$r(x) = f(x) - kx - b \rightarrow 0 \quad (38.1)$$

при $x \rightarrow +\infty$.

Аналогично прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой функции* $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, если остаток

$$r(x) = f(x) - kx - b \rightarrow 0 \quad (38.2)$$

при $x \rightarrow -\infty$.

Следующая теорема дает метод отыскания возможных асимптот для функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Совершенно аналогично может быть сформулирована и доказана теорема об асимптоте функции $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$.

Теорема 38.1. Прямая $y = kx + b$ является асимптотой функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$.

Доказательство. По определению асимптоты, прямая, заданная на плоскости уравнением $y = kx + b$, является асимптотой функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - b] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - kx - b}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} \right] - k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - 0 - k = 0, \end{aligned} \quad (38.3)$$

а это и означает необходимое и достаточное выполнение условия 1) теоремы.

Далее, прямая, заданная на плоскости уравнением $y = kx + b$, является асимптотой функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - b] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] - b = 0, \quad (38.4)$$

а это и означает необходимое и достаточное выполнение условия 2) теоремы. Теорема доказана.

Задача из исторического прошлого.

В двух садах посажены деревья рядами, в каждом ряду поровну. Отношение числа деревьев первого сада к числу деревьев второго равно отношению большего корня уравнения:

$$x^2\sqrt{x} - 5x\sqrt[4]{9x} = 108$$

к положительному значению y , выведенному из пропорции:

$$3(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) : \frac{y + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{y + 2\sqrt{3}}{2} : 2(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{3}).$$

Если в первом саду вынуть по одному дереву из каждого ряда, то число вынутых деревьев как раз достанет, чтобы засадить ими целый ряд во втором саду, и тогда в первом саду останется деревьев на 6 штук более, чем во втором.

Определить, сколько было рядов и сколько всех деревьев в каждом саду, зная, что если бы число рядов в первом саду, а также число деревьев каждого ряда во втором саду увеличить на 1, то в обоих садах было бы 105 всех деревьев.

Ответ. 54 дер., 36 дер., по 6 ряд.

39. Общая схема исследования функции и построения ее графика

В данном (относительно коротком) разделе выделим схему исследования функций одной переменной, подводя итоги обширному теоретическому материалу, представленному в предыдущих разделах.

Итак, пусть дана числовая функция $f(x)$ одной независимой переменной x , заданной на некотором множестве числовой прямой (это множество может и совпадать со всей числовой прямой). Относительно полная схема исследования таких функций следующая:

- 1) Найти область определения функции $f(x)$.
- 2) Учесть различные особенности функции (четность, периодичность, знакопеременность). Найти пересечения графика с осями координат.

3) Отметить значения функции на границе области определения и в точках разрыва. Найти вертикальные асимптоты.

4) Найти (в том числе наклонные) асимптоты.

5) Определить участки монотонности. Определить экстремумы.

6) Найти промежутки выпуклости и точки перегиба.

7) Отобразить перечисленные особенности функции при построении ее графика.

Конечно, не надо педантично следовать этому плану. Иногда бывает удобно переставить пункты исследования, а иногда некоторые из этих пунктов становятся очевидными после исследования других.

Пример. Исследовать функцию

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \quad (39.1)$$

и построить ее график.

Решение. Область определения функции (39.1) — вся числовая прямая, за исключением точки $x = 0$.

Функция не является периодической. Но она является нечетной, поскольку

$$f(-x) = \frac{x^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x} = -f(x). \quad (39.2)$$

При $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ данная функция положительна, а при $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ — отрицательна.

Ось абсцисс ($y = 0$) функция (39.1) пересекает в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Ось ординат ($x = 0$) нашей функцией не пересекается.

Поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 - 1}{x} = -\infty, \end{aligned} \quad (39.3)$$

то возле вертикальной асимптоты $x = 0$ у этой функции имеется разрыв второго рода, при этом стремление с разных сторон асимптот к бесконечности знакопеременное.

Наклонная асимптота задается уравнением

$$y = x, \quad (39.4)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = +1 = k, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0 = l \end{aligned} \quad (39.5)$$

(здесь уравнение асимптоты в общем виде таково: $y = kx + l$).

Производная рассматриваемой функции всегда положительна:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} > 0. \quad (39.6)$$

Видно, что на всей области определения функция (39.1) возрастает. Таким образом, экстремумов она не имеет.

Ее вторая производная знакопеременна:

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}. \quad (39.7)$$

Таким образом, слева от оси ординат наша функция выпукла вниз (вогнута), а справа от оси ординат — выпукла вверх.

График функции, заданной уравнением (39.1), можно изобразить на рис. 39.1.

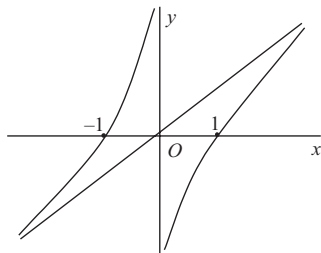


Рис. 39.1

Задача из исторического прошлого.

В бассейне проведены две трубы; через первую вода в него вливается, а через вторую — вытекает. Если бы в пустой бассейн открыть последовательно первую трубу на t часов, а вторую на n часов, то наполнилось бы $\frac{2}{11}$ бассейна; если же, наоборот,

рот, первую трубу открыть на n часов, а вторую на m часов, то наполнится весь бассейн.

Во сколько часов пустой бассейн наполнится водою, если открыть обе трубы вместе, когда известно, что m и n суть двузначные числа, имеющие следующие свойства:

1) число десятков n равно корню квадратному из числа его единиц;

2) число единиц m одной больше числа единиц n ;

3) если цифру единиц n поставить на место цифры десятков m и наоборот, а затем составившиеся новые числа сложить, то в сумме получится 66.

Ответ. 33 часа.

40. Вектор-функция скалярного аргумента.

Понятие кривой, гладкая кривая.

Касательная к кривой, кривизна кривой.

Радиус кривизны. Главная нормаль. Бинормаль

Данный раздел некоторым образом «перекликается» с соответствующими разделами главы 1 (которая посвящена линейной алгебре и аналитической геометрии).

Определений вектор-функций, в зависимости от потребностей задач, можно дать, вообще говоря, достаточно много. В данном разделе ограничимся следующим.

Определение 40.1. (Трехмерная) вектор-функция $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ скалярного аргумента t — это функция, ставящая в соответствие каждому значению аргумента t из области определения одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений вектора $\mathbf{v}$.

В частности, в прямоугольных декартовых координатах имеем:

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{e}_1 + v_y(t)\mathbf{e}_2 + v_z(t)\mathbf{e}_3.$$

Определение 40.2. Непрерывной кривой в 3-мерном евклидовом пространстве называется геометрическое множество точек, коор-

динаты которых удовлетворяют системе следующих параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), -\infty \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq +\infty, \\ z = z(t) \end{cases} \quad (40.1)$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывные числовые функции действительной переменной t на всей области определения.

Рассмотрим такую кривую C , заданную на евклидовой плоскости следующими уравнениями:

$$x = x(t), y = y(t). \quad (40.2)$$

Определение 40.3. Касательной к кривой C в ее точке

$$P_1 = (x_1 = x(t_1), y_1 = y(t_1)) \quad (40.3)$$

называется прямая, являющаяся предельным положением секущей, проходящей через точку P_1 плоскости и через не совпадающую с ней точку P_2 данной кривой при стремлении P_2 к P_1 .

Как было доказано (в главе 1), уравнение касательной имеет в точке (40.3) следующий параметрический вид:

$$x = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t_1} (t - t_1) + x_1; \quad y = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t_1} (t - t_1) + y_1. \quad (40.4)$$

Кривая имеет единственную касательную в каждой регулярной точке (x_1, y_1) кривой. Напомним, что под регулярностью кривой в окрестности точки (40.3) в данном случае достаточно понимать одновременную дифференцируемость функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ в достаточно малой окрестности точки $t = t_1$.

Хотя можно дать и другое определение регулярности.

Определение 40.4. Точка (x_1, y_1) кривой *регулярна*, если при некотором выборе параметра t функции $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка, не равные нулю одновременно, в некоторой достаточно малой окрестности точки t_1 .

Следующее определение специфично именно для главы 2, посвященной дифференциальному исчислению функции одной переменной.

Кривая, все точки которой регулярны, называется *гладкой кривой* (так называемой гладкости 1, поскольку в данном случае рассматриваются лишь первые производные).

Определение 40.5. *Нормалью к кривой в регулярной точке $P_1(x_1, y_1)$ называется прямая, проходящая через точку P_1 и перпендикулярная к касательной в точке P_1 .*

Для гладких кривых нормали к ним существуют во всех точках гладкости, что и объясняет корректность определения 40.5.

Рассмотрим такие гладкие кривые, заданные параметрически, на плоскости, у которых функции $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные второго порядка.

Определение 40.6. *Кривизной R кривой в точке P_1 называется выражение*

$$R = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}^3}, \quad (40.5)$$

где все производные берутся при $t = t_1$ (здесь точкой обозначена производная по t).

В силу достаточной гладкости рассматриваемой кривой определение 40.6 корректно.

Величина

$$\frac{1}{R} \quad (40.6)$$

называется радиусом кривизны кривой в точке P_1 .

Для пространственной кривой C (заданной в 3-мерном евклидовом пространстве) определение касательной дается аналогично.

Определение 40.7. *Кругом (окружностью) кривизны кривой C в точке P_1 называется предельное положение некоторой окружности, проходящей через точку P_1 и две некоторые соседние точки кривой P_2 и P_3 при стремлении P_2 и P_3 к P_1 .*

Плоскость этой окружности называют *соприкасающейся плоскостью кривой C в точке P_1* ; она содержит касательную к кривой C в точке P_1 (например, для пространственных кривых).

Определение 40.8. *Главной нормалью кривой C в точке P_1 называется направленная прямая, идущая из точки P_1 в центр соприкасающейся окружности.*

Определение корректно, поскольку главная нормаль перпендикулярна касательной.

Определение 40.9. *Бинормалью кривой C в точке P_1 называется направленная прямая, проходящая через точку P_1 и образующая вместе с положительной касательной и главной нормалью правую систему декартовых прямоугольных осей.*

В данном случае *положительная касательная* — это луч (кусочек касательной), соответствующий возрастанию параметра t вдоль кривой.

Итак, данный раздел посвящен важным определениям, которые в принципе можно было бы вводить в общем курсе дифференциальной геометрии.

Задача из исторического прошлого.

Некто, будучи должен по двум векселям, причем валюта первого на

$$\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right) \frac{(10b)^2}{2\sqrt{a^4 - a^2b^2}}$$

рублей более валюты второго, уплатил по первому 450 рублей, а по второму — 288 руб. раньше срока, сделав коммерческий учет обоих векселей по одной и той же таксе процентов, при том первого векселя на столько месяцев до срока, сколько единиц в большем корне, а второго — сколько единиц в меньшем корне системы уравнений:

$$xy - y^2 = 54,$$

$$x^2 - xy = 135.$$

Под сколько процентов сделан учет?

Ответ. 8%.

IV. Интегральное исчисление функций одной переменной

В данной главе переходим к изложению «обратной теории к теории дифференцирования функции одной переменной», а именно, к интегральному исчислению таких функций.

41. Первообразная. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства

Определение 41.1. Функция $F(x)$ называется *точной первообразной* функции $f(x)$ на некотором множестве, если для любого x из данного множества выполняется равенство

$$F'(x) = f(x). \quad (41.1)$$

Теорема 41.1. Если функция $f(x)$ определена (и непрерывна) на интервале (a, b) , а $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две ее точные первообразные, тогда для некоторого $c \in R$ и для любого $x \in (a, b)$ выполняется равенство

$$F_1(x) - F_2(x) = c, \quad (41.2)$$

то есть произвольные две точные первообразные любой функции отличаются на константу.

Доказательство. Пусть дана функция $f(x)$ и две ее точные первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Рассмотрим разность

$$F_1(x) - F_2(x) \quad (41.3)$$

и обозначим ее через $\psi(x)$. Тогда по правилу дифференцирования

$$\psi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x). \quad (41.4)$$

В силу условий выполнено следующее тождество:

$$\psi'(x) \equiv 0. \quad (41.5)$$

Пусть x_1 и x_2 — два произвольных значения x (из рассматриваемого интервала). Тогда по теореме Лагранжа о конечном приращении получим:

$$\psi(x_1) - \psi(x_2) = \psi'(\eta)(x_1 - x_2), \quad (41.6)$$

где $x_1 < \eta < x_2$. Но $\psi'(\eta) \equiv 0$, следовательно, $F_1(x) = F_2(x)$, что и требовалось.

Определение 41.2. Непрерывная функция $F(x)$ называется *первообразной функции $f(x)$* на интервале (a, b) , если в каждой точке этого интервала, за исключением, быть может, конечного числа точек этого интервала, верно равенство

$$F'(x) = f(x). \quad (41.7)$$

Теорема 41.2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a, b) , то для некоторого числа $c \in R$ выполняется: $F_1(x) - F_2(x) = c, \forall x \in (a, b)$.

Доказательство. Поскольку число точек, в которых не выполнено равенство (41.7), конечно, разбиваем интервал (a, b) на конечное число интервалов, в каждом из которых равенство (41.7) выполнено. Далее, на каждом из «внутренних» интервалов применяем теорему 41.1. Тем самым теорема 41.2 доказана.

Итак, показано, что если известна одна (точная) первообразная функции, то любую другую (точную) первообразную получить достаточно легко. В связи с этим актуально следующее

Определение 41.3. Для некоторой функции $f(x)$ набор всех ее первообразных функций на этом интервале называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx. \quad (41.8)$$

Здесь $f(x)$ — подынтегральная функция, а $f(x)dx$ — подынтегральное выражение.

Из теоремы 41.2 следует, что если $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + c. \quad (41.9)$$

Так как, если $F'(x) = f(x)$, то определен дифференциал первообразной

$$dF(x) = f(x)dx, \quad (41.10)$$

поэтому справедливы следующие простые равенства:

$$\begin{aligned} \int dF(x) &= F(x) + c; \\ d\left(\int f(x)dx\right) &= dF(x) = f(x)dx; \\ \left(\int f(x)dx\right)'_x &= f(x)dx. \end{aligned} \quad (41.11)$$

Отметим некоторые свойства неопределенного интеграла.

1) Равенство

$$\int f(x)dx = \int g(x)dx \quad (41.12)$$

эквивалентно одному из нижеследующих равенств:

$$а) \left(\int f(x)dx\right)' = \left(\int g(x)dx\right)'.$$

Доказательство. Если выполнено равенство (41.12), то, очевидно, выполнено свойство а). Обратно, если производные двух функций равны, то их первообразные отличаются на константу, которая и определяет класс первообразных, называемый неопределенным интегралом.

$$б) d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(\int g(x)dx\right).$$

Доказательство. Если выполнено равенство (41.12), то, очевидно, выполнено свойство б). Обратно, если дифференциалы двух функций равны, то их первообразные отличаются на константу, которая и определяет класс первообразных, называемый неопределенным интегралом.

Два других свойства доказываются аналогично.

$$в) f(x) = g(x),$$

$$г) f(x)dx = g(x)dx.$$

Данные свойства справедливы для всех точек интервала (a, b) за исключением, быть может, конечного их числа.

$$2) \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Доказательство. Это свойство следует из теоремы о дифференцируемости суммы дифференцируемых функций.

$$3) \int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \quad \alpha \in R.$$

Доказательство. Это свойство следует из теоремы о дифференцируемости функции, полученной умножением на действительное число другой дифференцируемой функции.

Задача из исторического прошлого.

На два одинаковой величины пальто куплено драпу и заплачено по 13,5 руб. На первое пальто пошло драпу более на

$$\left[\frac{\sqrt[12]{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{7}{9}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{1,5} \cdot \sqrt[6]{7}}} \right]^3,$$

так как драп, купленный на это пальто, был уже, и поэтому аришин его обошелся дешевле аришина драпу, купленного на второе пальто, на столько рублей, сколько единиц в корне того уравнения, которое получим, если приравняем 3-м многочлен, на который необходимо помножить

$$\sqrt[3]{2x} + 2,$$

чтобы исключить из него иррациональность.

Сколько аришин драпу пошло на каждое пальто?

Ответ. $3\frac{3}{8}$ ариш., 3 ариш.

42. Табличные интегралы.

Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Предыдущий раздел дает нам возможность находить интегралы от некоторых функций методом обращения формул дифференцирования. А именно, мы предъявим следующие равенства, для проверки которых достаточно показать, что дифференциалы правых частей равны подынтегральным выражениям:

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1. \quad 2) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c.$$

$$3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, a \neq 1. \quad 8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$$

$$4) \int e^x dx = e^x + c. \quad 9) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c.$$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + c.$

10) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + c.$

6) $\int \cos x dx = \sin x + c.$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c.$

12) $\int \ln x dx = x \ln x - x + c.$

Получим также важное правило замены переменной или формулу интегрирования с помощью введения нового переменного.

Пусть $F(x)$ — первообразная функция для функции $f(x)$ и $x = \varphi(u)$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int dF(x) = \int dF[\varphi(u)] = \\ &= \int F'[\varphi(u)] \varphi'(u) du = \int f[\varphi(u)] \varphi'(u) du. \end{aligned} \quad (42.1)$$

Или, окончательно:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(u)] \varphi'(u) du, \quad (42.2)$$

где $x = \varphi(u)$ — дифференцируемая функция от u , определенная на некотором интервале так, что множество значений $\{\varphi(u)\}$ принадлежит интервалу (a, b) .

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^2 + 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2 + 1} \stackrel{u=x^2}{=} \frac{1}{2} \int \frac{du}{u + 1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |1 + u| + c = \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c. \end{aligned} \quad (42.3)$$

Получим еще один важный метод нахождения первообразных (так называемое *правило интегрирования по частям*).

Пусть даны функции $u(x)$ и $v(x)$. Тогда:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (42.4)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} d\left(\int u dv\right) &= d\left(\int uv' dx\right) = uv' dx = u dv, \\ d\left(uv - \int v du\right) &= d(uv) - d\left(\int v du\right) = \\ &= u dv + v du - d\left(\int vu' dx\right) = \end{aligned}$$

$$= u dv + v du - v u' dx = u dv + v du - v du = u dv . \quad (42.5)$$

Итак,

$$d\left(\int u dv\right) = d\left(uv - \int v du\right) \quad (42.6)$$

и, следовательно, правило интегрирования по частям выведено.

Пример.

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int 1 \cdot dx = x \ln x - x + c . \quad (42.7)$$

Задача из исторического прошлого.

Стрелок за каждый удачный выстрел получил столько копеек, сколько сделал удачных выстрелов, а за каждый неудачный выстрел заплатил столько копеек, сколько сделал неудачных выстрелов. Всех выстрелов он сделал столько, сколько единиц в большем корне уравнения:

$$\sqrt{\sqrt{5x+6}} = \sqrt{0,2x+2},$$

и получил

$$\frac{\sqrt[3]{9} \left(\sqrt[3]{9} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2} - 9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{3}} \right)}{5}$$

рублей.

Определить, сколько стрелок сделал удачных и сколько неудачных выстрелов.

Ответ. 16 и 4.

43. Многочлены. Теорема Безу.

Основная теорема алгебры.

Разложение многочлена

с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители

Поскольку стало необходимым нахождение первообразной для дробно-рациональных и иррациональных функций, мы вынуждены частично вернуться в классический курс алгебры многочленов и доказать ряд соответствующих теорем, которые впо-

следствии помогут нам искать первообразные достаточно сложных элементарных функций, сводя, например, их к сумме функций, первообразные которых находятся более просто или вообще являются табличными.

Определение 43.1. *Многочленом относительно переменных* $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется сумма конечного числа членов вида

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}, \quad (43.1)$$

где $a \neq 0$, $k_i \in N_0 = N \cup \{0\}$, $i = 1, \dots, n$. Наибольшее значение суммы $k_1 + \dots + k_n$ в каком-либо из членов называется *степенью многочлена*.

Пусть $F(x)$ — многочлен степени N , $f(x)$ — многочлен степени n и $n < N$. Тогда, если $A_0, a_0 \neq 0$, то частное $F(x)/f(x)$ может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0x^N + A_1x^{N-1} + \dots + A_N}{a_0x^n + \dots + a_n} \equiv (b_0x^{N-n} + \dots + b_{N-n}) + \frac{r(x)}{f(x)}, \quad (43.2)$$

где $r(x)$ — многочлен степени, меньшей n , называемый *остатком* (при делении одного многочлена на другой).

Доказательство последнего факта можно получить, применив метод деления «столбиком» одного многочлена на другой. При этом мы всегда попадаем в ситуацию, когда действительно степень остатка становится меньше n , после чего, собственно, сам механизм деления прекращается.

Теорема 43.1 (Безу). Остаток, получаемый при делении любого многочлена $f(x)$ на $(x - c)$, равен значению $f(c)$ многочлена $f(x)$ в точке c .

Доказательство. Допустим, что мы разделили многочлен $f(x)$ на $(x - c)$ следующим образом:

$$\frac{f(x)}{x - c} = A(x) + \frac{r}{x - c}, \quad (43.3)$$

при этом, в силу разложения (43.2), r — число (многочлен нулевой степени), а $A(x)$ — многочлен степени, на единицу меньшей, чем степень многочлена $f(x)$.

Умножим формально равенство (43.3) на одночлен $x - c$, тогда получим:

$$f(x) = A(x)(x - c) + r, \quad (43.4)$$

и равенство (43.4) уже справедливо для любого x .

Подставляя в равенство (43.4) вместо x значение c , удостоверяемся в справедливости теоремы Безу, которую можно считать доказанной.

Следствие. Если c — корень многочлена $f(x)$, то справедливо представление:

$$f(x) = A(x)(x - c). \quad (43.5)$$

Следующую фундаментальную теорему (основную теорему алгебры) обычно рассматривают в теории функций комплексного переменного (см. главу 12).

Теорема 43.2 (основная теорема алгебры). Каждый многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет n комплексных нулей с учетом их кратности.

Данная глава не рассчитана на доказательство данной теоремы.

Пользуясь следствием из теоремы Безу, нетрудно доказать следующее конструктивное утверждение.

Теорема 43.3. Каждый действительный или комплексный многочлен $f(x)$ степени n может быть единственным образом представлен в виде произведения коэффициента при старшем члене и n линейных множителей $(x - a_i)$ следующим образом:

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (x - a_1)^{(n_1)} \dots (x - a_k)^{(n_k)}, \quad (43.6)$$

где $a_1, \dots, a_k$ — корни многочлена $f(x)$ с соответствующими кратностями $(n_1), \dots, (n_k)$ ($(n_1) + \dots + (n_k) = n$).

Доказательство. Рассмотрим общий случай — когда многочлен $f(x)$ имеет комплексные коэффициенты. По основной теореме алгебры существуют k различных чисел $a_1, \dots, a_k$, которые являются корнями многочлена $f(x)$ с соответствующими кратностями $(n_1), \dots, (n_k)$. По следствию из теоремы Безу (а точнее, применяя его (n_1) раз, для начала) справедливо следующее представление:

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (x - a_1)^{n_1} B_1(x), \quad (43.7)$$

где $B_1(x)$ — многочлен степени $n - (n_1)$.

Далее, применяем (n_2) раза следствие из теоремы Безу к многочлену $B_1(x)$, поскольку a_2 , в силу формулы (43.7), является и его корнем. И т.д.

Видно, что всего после применения следствия из теоремы Безу n раз к многочлену $f(x)$ (для каждого его корня следствие применяется (nj) раз, $j = 1, \dots$) получаем искомое представление (43.6). Теорема доказана.

Замечание. Если многочлен $f(x)$ имеет действительные коэффициенты, то, как известно, у него могут быть комплексно сопряженные корни (см. также главу 12 по теории функций комплексного переменного). Но в этом случае первоначально исследуемый многочлен можно разложить в произведение линейных одночленов, соответствующих действительным (пусть даже кратным) корням, и одночленов квадратичных, соответствующим комплексно сопряженным (пусть опять же кратным) корням, но уже с действительными коэффициентами.

В самом деле, если $a_k + i\omega_k$ и $a_k - i\omega_k$ — комплексно сопряженные корни многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то пара множителей $(x - (a_k + i\omega_k))$ и $(x - (a_k - i\omega_k))$, соответствующая данной паре комплексно сопряженных корней, может быть объединена в действительный квадратный множитель $(x - a_k)^2 + (\omega_k)^2$.

Задача из исторического прошлого.

Хозяйка, нуждаясь в определенном запасе пшеничной муки, купила в первый раз только половину требуемого ею количества, а во второй раз — $\frac{1}{3}$ остатка и еще столько фунтов, сколько единиц в корне уравнения,

$$\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1} = 4$$

и заплатила за все 1 руб. 96 коп. Так как затем мука вздорожала на 2 коп. за фунт, то остальное она купила за такое число копеек, которое представляется суммой двух слагаемых, имеющих следующие свойства: произведение их равно 80, а сумма их квадратов равна 164.

Сколько всего муки купила хозяйка?

Ответ. 30 фун.

44. Разложение рациональных дробей на простейшие

Теорема, доказываемая в этом разделе, впоследствии поможет находить первообразные от любых рациональных функций.

В силу последнего замечания из предыдущего раздела представим некоторый действительный многочлен $G(x)$ степени n в следующем виде:

$$G(x) = (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots \dots (x - x_k)^{m_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{u_1} \dots (x^2 + p_lx + q_l)^{u_l}. \quad (44.1)$$

Теорема 44.1. Пусть дана вещественная правильная несократимая дробь $\frac{F(x)}{G(x)}$ с коэффициентом при старшем члене знаменателя (без ограничения общности) $a_0 = 1$, при этом, по условию, степень многочлена $F(x)$ меньше степени числителя.

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{G(x)} = \\ = \frac{F(x)}{(x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{u_1} \dots (x^2 + p_lx + q_l)^{u_l}}. \end{aligned} \quad (44.2)$$

Тогда ее можно единственным образом представить в виде следующей суммы дробей:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{F(x)}{G(x)} = & \frac{A_0}{(x-x_1)^{m_1}} + \frac{A_1}{(x-x_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{A_{m_1-2}}{(x-x_1)^2} + \frac{A_{m_1-1}}{x-x_1} + \\
& + \frac{B_0}{(x-x_2)^{m_2}} + \frac{B_1}{(x-x_2)^{m_2-1}} + \dots + \frac{B_{m_2-2}}{(x-x_2)^2} + \frac{B_{m_2-1}}{x-x_2} + \\
& + \frac{C_0}{(x-x_3)^{m_3}} + \frac{C_1}{(x-x_3)^{m_3-1}} + \dots + \frac{C_{m_3-2}}{(x-x_3)^2} + \frac{C_{m_3-1}}{x-x_3} + \\
& \dots + \frac{L_0}{(x-x_k)^{m_k}} + \frac{L_1}{(x-x_k)^{m_k-1}} + \dots + \frac{L_{m_k-2}}{(x-x_k)^2} + \frac{L_{m_k-1}}{x-x_k} + \\
& + \frac{M_0x + N_0}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1-1}} + \dots + \frac{M_{\mu_1-1}x + N_{\mu_1-1}}{x^2 + p_1x + q_1} + \\
& + \frac{P_0x + Q_0}{(x^2 + p_2x + q_2)^{\mu_2}} + \frac{P_1x + Q_1}{(x^2 + p_2x + q_2)^{\mu_2-1}} + \dots + \frac{P_{\mu_2-1}x + Q_{\mu_2-1}}{x^2 + p_2x + q_2} + \\
& \dots + \frac{T_0x + R_0}{(x^2 + p_lx + q_l)^{\mu_l}} + \frac{T_1x + R_1}{(x^2 + p_lx + q_l)^{\mu_l-1}} + \dots + \frac{T_{\mu_l-1}x + R_{\mu_l-1}}{x^2 + p_lx + q_l},
\end{aligned} \right\} \quad (44.3)$$

где все коэффициенты — действительные числа.

Дроби, стоящие в правой части равенства, называются *элементарными (простейшими)* дробями.

Доказательство. Заметим, что требование теоремы о том, что числитель и знаменатель не имеют общих корней, не является искусственным, поскольку в противном случае, в силу следствия из теоремы Безу, одночлены, соответствующие общим корням, можно будет формально сократить.

Представим дробь $\frac{F(x)}{G(x)}$ в виде

$$\frac{F(x)}{(x-x_1)^m \Phi(x)}, \quad (44.4)$$

где $\Phi(x)$ — полином, взаимно простой с $(x-x_1)^m$, так как он не имеет корня $x = x_1$. Тогда заданная дробь может быть представлена в форме

$$\frac{F(x)}{(x-x_1)^m \Phi(x)} = \frac{A(x)}{(x-x_1)^m} + \frac{B(x)}{\Phi(x)}, \quad (44.5)$$

где многочлен $A(x)$ степени меньше, чем m_1 , многочлен $B(x)$ степени ниже, чем степень многочлена $\Phi(x)$.

Пользуясь формулой Тейлора для полинома, разложим многочлен $A(x)$ по степеням $(x-x_1)$:

$$A(x) = A(x_1) + \frac{A'(x_1)}{1!}(x-x_1) + \frac{A''(x_1)}{2!}(x-x_1)^2 + \dots + \frac{A^{(m-1)}(x_1)}{(m-1)!}(x-x_1)^{m-1} \quad (44.6)$$

(конечно, некоторые из коэффициентов

$$A(x_1), A'(x_1), A''(x_1), \dots, A^{(m-1)}(x_1)$$

могут быть равны нулю).

Введя теперь обозначения:

$$A(x_1) = A_0, \frac{A'(x_1)}{1!} = A_1, \dots, \frac{A^{(m-1)}(x_1)}{(m-1)!} = A_{m-1}, \quad (44.7)$$

получим:

$$A(x) = A_0 + A_1(x-x_1) + A_2(x-x_1)^2 + \dots + A_{m-1}(x-x_1)^{m-1}. \quad (44.8)$$

Подставляя разложение многочлена $A(x)$ в формулу (44.5), получим:

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{(x-x_1)^m \Phi(x)} &\equiv \frac{A_0}{(x-x_1)^m} + \frac{A_1}{(x-x_1)^{m-1}} + \dots \\ &\dots + \frac{A_{m-2}}{(x-x_1)^2} + \frac{A_{m-1}}{x-x_1} + \frac{B(x)}{\Phi(x)}, \end{aligned} \quad (44.9)$$

т.е. выделилась первая строчка формулы (44.3).

Теперь мы представим дробь $\frac{B(x)}{\Phi(x)}$ в виде $\frac{B(x)}{(x-x_2)^{m_2} \Psi(x)}$ и, изменяя аналогичным образом предыдущие рассуждения, получим дроби, стоящие во второй строчке формулы (44.3). После этого (если многочлен $Q(x)$ имеет комплексные корни) останется еще слагаемое — дробь вида $\frac{U(x)}{V(x)}$, где

$$V(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{\mu_2} \dots (x^2 + p_r x + q_r)^{\mu_r}. \quad (44.10)$$

Представим эту дробь в виде

$$\frac{U(x)}{V(x)} \equiv \frac{U(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1} X(x)}. \quad (44.11)$$

Так как полином $X(x)$ не имеет корней, равных корням полинома $x^2 + p_1x + q_1$, то $(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}$ и $X(x)$ — взаимно простые, а то-

гда, применяя рассуждения, аналогичные вышеизложенным, дробь $\frac{U(x)}{V(x)}$ единственным образом представляется в виде

$$\frac{U(x)}{V(x)} \equiv \frac{K(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}} + \frac{R(x)}{X(x)}, \quad (44.12)$$

где степень многочлена $K(x)$ меньше, чем степень многочлена $(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}$, т.е. меньше $2\mu_1$.

Для разложения величины $\frac{K(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}}$ на элементарные дроби поступим следующим образом. Делим многочлен $K(x)$ на $x^2 + p_1x + q_1$, тогда получим:

$$K(x) = K_0(x)(x^2 + p_1x + q_1) + M_0x + N_0, \quad (44.13)$$

и, следовательно,

$$\frac{K(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}} \equiv \frac{K_0(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1-1}} + \frac{M_0x + N_0}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}}. \quad (44.14)$$

Делим теперь многочлен $K_0(x)$ на $x^2 + p_1x + q_1$, получим:

$$K_0(x) = K_1(x)(x^2 + p_1x + q_1) + M_1x + N_1. \quad (44.15)$$

Подставляя это выражение в (44.14), будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{K(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}} \equiv \\ & \equiv \frac{K_1(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1-2}} + \frac{M_0x + N_0}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1-1}}. \end{aligned} \quad (44.16)$$

Продолжаем подобное же деление до тех пор, пока в числителе не получится полином первой степени; тогда:

$$\begin{aligned} & \frac{K(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}} \equiv \frac{M_0x + N_0}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}} + \\ & + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1-1}} + \dots + \frac{M_{\mu_1-1}x + N_{\mu_1-1}}{x^2 + p_1x + q_1}, \end{aligned} \quad (44.17)$$

и, следовательно,

$$\frac{U(x)}{V(x)} \equiv \frac{M_0x + N_0}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}} + \dots + \frac{M_{\mu_1-1}x + N_{\mu_1-1}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{R(x)}{X(x)}. \quad (44.18)$$

Продельвая аналогичные вычисления с дробью $\frac{R(x)}{X(x)}$, мы, после l раз примененных рассуждений, изложенных выше, получим остальные строчки требуемого разложения. Теорема полностью доказана.

Коэффициенты построенного разложения можно найти следующими методами:

1) Если все $m_k = 1$ (тогда корни x_k называются *простыми*), то

$$A_k = \frac{F(x_k)}{Q'(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (44.19)$$

Данное правило становится верным после умножения его на $Q(x)$ и дифференцирования полученного тождества в точке x_k .

2) Можно умножить обе части равенства (44.3) на многочлен $f(x)$ и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного равенства.

3) Можно умножить обе части равенства (44.3) на многочлен $f(x)$ и последовательно дифференцировать полученное равенство необходимое количество раз, находя в процессе этого коэффициенты разложения.

Задача из исторического прошлого.

Некто купил сукна и бархата. Цена аришина бархата превосходила цену аришина сукна на

$$\frac{(4 - \sqrt{-1}) \cdot (2 + \sqrt{-1}) - (1 + \sqrt{-1})^2}{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - 2(1,6 - \sqrt{6})}$$

рублей, а число аришин бархата было менее числа аришин сукна на столько, сколько единиц в корне уравнения:

$$x^3 - 16x^{3/2} = 297.$$

Сколько аришин и по какой цене куплено сукна и бархата, если известно, что, продав сукно по цене бархата, получится 128 руб., а продав бархат по цене сукна — 21 руб.?

*Ответ. Сукна 16 ариш. по 3 р., или $14\frac{2}{5}$ ариш. по $3\frac{8}{9}$ р.,
барх. 7 ариш. по 8 р., или $5\frac{2}{5}$ ариш. по $8\frac{8}{9}$ р.*

45. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций

При построении данного раздела нам поможет раздел предыдущий. Вообще, этот раздел можно рассматривать как продолжение выписывания «табличных» интегралов, начатое в предыдущих разделах.

Проведем классификацию по нахождению первообразных важных классов различных элементарных функций.

1) *Интегрирование многочленов:*

$$\begin{aligned} \int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) dx = \\ = a_0 x + \frac{1}{2} a_{n-1} x^2 + \frac{1}{3} a_{n-2} x^3 + \dots + \frac{1}{n+1} a_0 x^{n+1} + c. \end{aligned} \quad (45.1)$$

2) *Интегрирование рациональных дробей.*

В силу предыдущего раздела, интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию некоторого определенного числа простейших дробей:

$$\int \frac{dx}{(x-x_1)^m} = \begin{cases} \frac{1}{(m-1)(x-x_1)^{m-1}} + c, & m \neq 1; \\ \ln|x-x_1| + c, & m = 1. \end{cases} \quad (45.2-1)$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\omega} + c. \quad (45.2-2)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{((x-e)^2 + \omega^2)^{m+1}} = \\ = \frac{x-e}{2m\omega^2((x-e)^2 + \omega^2)^m} + \frac{2m-1}{2m\omega^2} \int \frac{dx}{((x-e)^2 + \omega^2)^{m+1}}. \end{aligned} \quad (45.2-3)$$

Более общо,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^n dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = \\ = -\frac{x^{n-1}}{(2m-n-1)a(ax^2 + bx + c)^{m-1}} + \frac{(n-1)c}{(2m-n-1)a} \int \frac{x^{n-2} dx}{(ax^2 + bx + c)^m} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{(m-n)b}{(2m-n-1)a} \int \frac{x^{n-1} dx}{(ax^2 + bx + c)^m}, \quad (45.3)$$

при этом $n \neq 2m-1$, $n \in N_0$, $m \in N$.

3) *Интегрирование функций, сводящихся к рациональным с помощью замены переменных.*

а) Если подынтегральная функция $f(x)$ — рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, то полагают $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, так что

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}; \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}; \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}. \quad (45.4)$$

б) Если подынтегральная функция $f(x)$ — рациональная функция от $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, то полагают $u = \operatorname{th} \frac{x}{2}$, так что

$$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2}; \quad dx = \frac{2du}{1-u^2}. \quad (45.5)$$

в) Если подынтегральная функция $f(x)$ — рациональная функция от x , и либо от $\sqrt{1-x^2}$, либо от $\sqrt{x^2-1}$, либо от $\sqrt{x^2+1}$, то задача сведется к случаю а) или б), если сделать подстановку, соответственно, $x = \cos v$, $x = \operatorname{ch} v$, или $x = \operatorname{sh} v$.

г) Если $f(x)$ — рациональная функция от x , и либо от $\sqrt{x^2+1}$, либо от $\sqrt{x^2-1}$, то можно положить, соответственно, $u = x + \sqrt{x^2 \pm 1}$, тогда:

$$x = \frac{1}{2} \left(u \mp \frac{1}{u} \right), \quad \sqrt{x^2 \pm 1} = \frac{1}{2} \left(u \pm \frac{1}{u} \right), \quad dx = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{u^2} \right) du. \quad (45.6)$$

д) Если $f(x)$ — рациональная функция от x и от $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, то задача сведется к случаю в) (или г)) при подстановке

$$v = \frac{2ax + b}{\sqrt{|4ac - b^2|}}, \quad \text{т.е.} \quad x = \frac{\sqrt{|4ac - b^2|} v - b}{2a}, \quad (45.7)$$

$$4ac - b^2 \neq 0, \quad a \neq 0.$$

е) Если $f(x)$ — рациональная функция от x и от $u = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, и $ad - bc \neq 0$, то в качестве новой переменной берут u .

ж) Если $f(x)$ — рациональная функция от x , а также $\sqrt{ax+b}$ (и $\sqrt{cx+d}$), $a \neq 0$, то в качестве новой переменной можно взять

$$u = \sqrt{ax+b}. \quad (45.8)$$

з) Интегралы от функций вида $x^n e^{ax}$, $x^n \ln x$, $x^n \sin x$, $x^n \cos x$ ($n \neq -1$); $\sin^n x \cos^m x$ ($n + m \neq 0$), $e^{ax} \sin^n x$, $e^{ax} \cos^n x$ вычисляются с помощью интегрирования по частям.

Задача из исторического прошлого.

Ученикам раздавали тетрадки. Если каждому дать по столько тетрадок, сколько было всех учеников, то неостанется тетрадок число, равное меньшему корню, а если каждому дать по:

$$\frac{2(\sqrt{-5} + \sqrt{-3})^2 \cdot (\sqrt{15} - 4) \cdot (\sqrt{-3} + \sqrt{-1}) \cdot (1 - \sqrt{3})}{(7 + 5\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{-2} - \sqrt{-1})^3}$$

тетрадок, то останется лишнее число, равное большему корню уравнений:

$$y^2 - 2x^2 = 5xy - 8x^2 = 18.$$

Скольким ученикам раздавали тетрадки?

Ответ. 9 учен.

46. Определенный интеграл, его свойства

Вычисление неопределенного интеграла тесно связано с вычислением первообразной функции. Понятие же интеграла определенного идеологически связано с более глубокими понятиями, чем дифференцирование, хотя, как будет показано, нахождение первообразной помогает вычислить сам определенный интеграл.

Пусть на отрезке $[a, b]$, $a < b$, для простоты задана непрерывная действительная функция $y = f(x)$, хотя, например, следующее определение не требует, вообще говоря, непрерывности данной функции.

Определение 46.1. Допустим, что функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n отрезков точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (46.1)$$

Выберем в каждом из подотрезков произвольную (так называемую *отмеченную*) точку ξ_i ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$). *Интегральной суммой (Римана)* называется сумма

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (46.2)$$

Значение интегральной суммы (46.2) зависит, вообще говоря, от разбиения отрезка $[a, b]$ и выбора отмеченных точек.

Определение 46.2. Если для любого разбиения отрезка $[a, b]$ существует предел интегральной суммы (46.2) при стремлении к нулю длины наибольшего отрезка данного разбиения (*диаметра разбиения*):

$$\max_i (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0, \quad (46.3)$$

то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a, b]$. Предел этой суммы

$$I = \lim_{\max_i (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (46.4)$$

называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$.

Этот предел обозначается как $I = \int_a^b f(x) dx$.

Данное определение означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что при любом разбиении отрезка $[a, b]$ на отрезки длины, меньшей, чем δ :

$$\max_i (x_i - x_{i-1}) < \delta, \quad (46.5)$$

и при любом выборе промежуточных (отмеченных) точек ξ_i верно следующее равенство:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon. \quad (46.6)$$

При всем этом функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой* (по Риману) на отрезке $[a, b]$. Величины a и b называются, соответственно, *нижним и верхним пределами интегрирования*, отрезок $[a, b]$ — отрезком интегрирования, функция $f(x)$ — подынтегральной функцией, символ $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, буква x — переменной интегрирования.

Теорема 46.1 (Коши). Функция $f(x)$, непрерывная на данном отрезке, интегрируема по Риману на этом отрезке.

Доказательство. Рассмотрим две произвольные последовательности (состоящие впоследствии из диаметров разбиений) чисел $\{\delta_n\}$ и $\{\delta_n''\}$ таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n' = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n'' = 0, \quad (46.7)$$

и две произвольные же последовательности соответствующих им интегральных сумм:

$$\{S_n^{(\delta_n')}\}, \quad (46.8)$$

$$\{S_n^{(\delta_n'')}\}. \quad (46.9)$$

Если мы докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(\delta_n')} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(\delta_n'')}, \quad (46.10)$$

то, по определению интеграла Римана, теорема Коши будет доказана.

Итак, из двух записанных последовательностей (46.8) и (46.9) составим одну (общую):

$$S_1^{(\delta_1')}, S_1^{(\delta_1'')}, S_2^{(\delta_2')}, S_2^{(\delta_2'')}, \dots, S_n^{(\delta_n')}, S_n^{(\delta_n'')}, \dots \quad (46.11)$$

Тогда последовательности (46.8) и (46.9) будут подпоследовательностями новой последовательности (46.11).

Перенумеруем эту последовательность снова и обозначим ее через

$$\{S_n^{(\delta_n)}\}. \quad (46.12)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу непрерывности рассматриваемой функции, существует такое $\eta > 0$, что если (диаметры соответствующих разбиений) $\delta' < \eta$ и $\delta'' < \eta$, то будет иметь место неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^m f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon. \quad (46.13)$$

Возьмем N столь большим, чтобы $\delta_n < \eta$, если $n > N$, а тогда соответствующие два разбиения удовлетворяют неравенству:

$$|S^{(\delta_n)} - S^{(\delta_m)}| < \varepsilon, \quad (46.14)$$

если только $n > N$ и $m > N$.

Отсюда следует, что наша последовательность интегральных сумм удовлетворяет условиям критерия Коши сходимости последовательности, а тогда она имеет некоторый предел I .

Но последовательности (46.8) и (46.9) были лишь подпоследовательностями для последовательности (46.12), поэтому они имеют тот же предел. Теорема доказана.

Теперь отметим некоторые свойства определенного интеграла, вытекающие из его определения.

1) Предположим, что все рассматриваемые в данном пункте определенные интегралы существуют. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \left(\Rightarrow \int_a^a f(x)dx = 0 \right) \quad (46.15)$$

(кососимметричность интеграла).

В правой части равенства стоит интеграл по отрезку $[a, b]$, интегральные суммы которого отличаются от интегральных сумм интеграла, стоящего в левой части, тем, что разность $x_i - x_{i-1}$ отрицательна, поскольку разбиение отрезка $[a, b]$ идет от точки b к точке a . Поэтому интегральная сумма и меняет знак. В частности, интегральная сумма по отрезку $[a, a]$ (т.е. по одной точке) равна нулю.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (46.16)$$

(аддитивность интеграла).

Пусть для простоты точка c — внутренняя точка отрезка $[a, b]$ (более общий случай будет следовать из формулы Ньютона–Лейбница). Тогда, очевидно, сумма пределов интегральных сумм одной и той же функции по каждому из отрезков, составляющих всеобъемлющий отрезок $[a, b]$, равна пределу интегральной суммы данной функции по всеобъемлющему отрезку $[a, b]$. При этом

разбиение всеобъемлющего отрезка $[a, b]$ состоит из объединения разбиений каждого из отрезков.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \quad (46.17)$$

Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что для каждой из функций $f(x)$, $g(x)$, а также их суммы $f(x) + g(x)$ (поскольку, по условию, все они — интегрируемы по Риману) достаточно взять одно и то же разбиение.

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx. \quad (46.18)$$

Данное свойство доказывается аналогично предыдущему, поскольку для двух функций $f(x)$ и $\alpha f(x)$ достаточно взять одно и то же разбиение. Последние два свойства характеризуют определенный интеграл как линейный функционал на пространстве функций, интегрируемых по Риману.

2) Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)dx, \quad (46.19)$$

или, иначе говоря:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (46.20)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_a^b d(uv) &= \int_a^b (uv)' dx = \int_a^b (uv' + u'v) dx = \\ &= \int_a^b uv' dx + \int_a^b u'v dx = \int_a^b u dv + \int_a^b v du, \end{aligned} \quad (46.21)$$

поэтому

$$\int_a^b u dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du, \quad (46.22)$$

но, поскольку

$$\int_a^b d(uv) = (uv) \Big|_a^b, \quad (46.23)$$

следовательно, формула (46.20) доказана.

Это правило называется правилом интегрирования по частям.

3) Если функция $x = x(u)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[\inf_{u \in [\alpha, \beta]} x(u), \sup_{u \in [\alpha, \beta]} x(u)]$, то:

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(u)] \frac{dx}{du} du. \quad (46.24)$$

Это свойство будет доказано в следующем разделе, когда будет выведена формула Ньютона–Лейбница.

4) Если интегралы существуют, то из $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a, b]$ следует, что

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (46.25)$$

5) Если $|f(x)| \leq C$ на отрезке $[a, b]$, то из существования интеграла $\int_a^b f(x) dx$ вытекает существование интеграла $\int_a^b |f(x)| dx$ и

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq C(b-a).$$

Два последних свойства следуют из теоремы о том, что если две последовательности сходятся и их общие члены связаны неравенством, то и пределы обеих последовательностей будут связаны соответствующим нестрогим неравенством. При этом и для функции $f(x)$, и для функции $g(x)$ достаточно взять одно и то же разбиение отрезка $[a, b]$.

Задача из исторического прошлого.

Купец распродал все бывшее у него полотно в 2 дня по разным ценам и выручил всего $33\frac{1}{3}$ руб. Если бы в первый день он продавал полотно по цене, по которой продавал во второй день, то выручил бы за него

$$\sqrt[3]{3375}$$

руб., а если бы во второй день продавал полотно по цене, по которой продавал в первый день, то выручил бы за него $17\frac{1}{2}$ руб.

Сколько купец продал полотна в каждый день, если известно, что во второй день он продал более, чем в первый, на столько аршин, сколько единиц в большем корне уравнения:

$$\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} = 2?$$

Ответ. 26 арш., 35 арш.

47. Формула Ньютона—Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов

Формула Ньютона—Лейбница является основным соотношением в интегральном исчислении функций одного переменного.

Теорема 47.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и если существует первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) \Big|_a^x = F(x) - F(a). \quad (47.1)$$

При этом

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x). \quad (47.2)$$

Доказательство. Рассмотрим разность значений первообразной функции

$$F(b) - F(a)$$

и напомним следующее тождество:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [F(x_1) - F(a)] + \\ &+ [F(x_2) - F(x_1)] + \dots + [F(x_i) - F(x_{i-1})] + \dots \\ &\dots + [F(b) - F(x_{n-1})], \end{aligned} \quad (47.3)$$

где, как и в предыдущем разделе,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (47.4)$$

К каждой из разностей, стоящих в квадратных скобках, применим теорему Лагранжа о конечном приращении:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F'(c_1)(x_1 - a) + \\ &+ F'(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \dots \\ &\dots + F'(c_n)(b - x_{n-1}), \end{aligned} \quad (47.5)$$

где

$$a < c_1 < x_1, x_1 < c_2 < x_2, \dots, x_{i-1} < c_i < x_i, x_{n-1} < c_n < b. \quad (47.6)$$

Так как $F'(x) = f(x)$, то последнее равенство может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= f(c_1)(x_1 - a) + \\ &+ f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \dots \\ &\dots + f(c_n)(b - x_{n-1}), \end{aligned} \quad (47.7)$$

т.е. правая часть является интегральной суммой.

Пусть теперь диаметр построенного разбиения стремится к нулю, а, следовательно, n стремится к бесконечности. Тогда правая часть этого равенства должна иметь пределом величину $\int_a^b f(x)dx$, а левая часть не зависит от n . Поэтому

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \quad (47.8)$$

Далее, рассмотрим нашу функцию на отрезке $[a, x]$ с переменным правым концом, при этом $[a, x] \subset [a, b]$. Тогда справедлива формула:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt. \quad (47.9)$$

Поскольку $F'(x) = f(x)$, то

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x), \quad (47.10)$$

и теорема полностью доказана.

Теперь докажем свойство 3) предыдущего раздела, для этого сохраним уже принятые ранее обозначения.

Действительно, рассмотрим две функции от u :

$$\psi(u) = \int_{x(\alpha)}^{x(u)} f(x)dx \quad \text{и} \quad \varphi(u) = \int_{\alpha}^u f[x(u)]x'(u)du \quad (47.11)$$

и найдем от них производные:

$$\begin{aligned}\psi'(u) &= \frac{d}{du} \int_{x(\alpha)}^{x(u)} f(x) dx = \\ &= \left[\frac{d}{dx(u)} \int_{x(\alpha)}^{x(u)} f(x) dx \right] \left[\frac{dx(u)}{du} \right] = f[x(u)]x'(u); \quad (47.12)\end{aligned}$$

$$\varphi'(u) = \frac{d}{du} \int_{\alpha}^u f[x(u)]x'(u) du = f[x(u)]x'(u) \quad (47.13)$$

(по формуле Ньютона—Лейбница).

Видно, что обе введенные функции имеют одну и ту же производную, значит, они отличаются на постоянную величину:

$$\varphi(u) - \psi(u) = C. \quad (47.14)$$

Но при $u = \alpha$ имеем:

$$\psi(\alpha) = \int_{x(\alpha)}^{x(\alpha)} f(x) dx = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f[x(u)]x'(u) du = 0, \quad (47.15)$$

а поэтому $C = 0$.

Полагая теперь $u = \beta$, имеем: $\varphi(\beta) = \psi(\beta)$ или

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(u)] \frac{dx}{du} du, \quad (47.16)$$

что и требовалось доказать.

Задача из исторического прошлого.

Два пешехода, встретившись, узнали, что первый из них прошел

$$\sqrt[3]{13824} \text{ верст,}$$

а второй столько верст, сколько единиц в корне уравнения:

$$3\sqrt[3]{x} = \sqrt{3x}.$$

Но если бы первый проходил в каждый час верстой меньше, а второй шел меньше времени, чем в действительности на

$$\left(\frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt{30}} \right)^{-1}$$

часов, то они прошли бы равные расстояния.

Определить, сколько проходил каждый пешеход в час, если известно, что второй проходил в час верстой меньше.

Ответ. 4 вер., 3 вер.

48. Геометрические и механические приложения определенного интеграла

Понятие определенного интеграла имеет многочисленные приложения в естествознании, экономических и даже гуманитарных науках. Но самые естественные его приложения — это приложения к некоторым задачам геометрии и механики.

В данном разделе мы не сможем полностью перечислить все многообразие приложений понятия определенного интеграла в геометрии и механике. Ограничимся лишь следующими.

Более того, мы не будем слишком скрупулезно выводить ключевые формулы, поскольку надеемся, что интуиция читателя после его ознакомления с материалами данной главы позволит ему самому убедиться в правильности имеющихся утверждений.

Таким образом, данный раздел можно воспринимать как некоторое справочное руководство по приложениям понятия определенного интеграла в геометрии и механике, при этом везде будут отмечены главные идеи доказательств и выводов формул.

1. Длина кривой.

Пусть на двумерной плоскости через параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (48.1)$$

$t \in [t_1, t_2]$, задана непрерывная кривая C .

Если кривая гладкая, то длина любой ее дуги конечна и вычисляется так: если $A = (x_1, y_1) = (x(t_1), y(t_1))$, $B = (x_2, y_2) = (x(t_2), y(t_2))$ — соответственно, начало и конец дуги, то длина этой дуги равна

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (48.2)$$

Действительно, что стоит под интегралом? Величина скорости пробега точки вдоль построенной кривой от начала до конца от начального момента времени t_1 до конечного момента времени t_2 .

В частности, если кривая на плоскости задана в виде графика функции $y = f(x)$, то последняя формула приобретает следующий вид:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (48.3)$$

Действительно, в качестве параметра t можно взять переменную x и получить искомую формулу.

2. Пусть дана *криволинейная трапеция*, ограниченная сверху и снизу кривыми $f_2(x)$ и $f_1(x)$ ($a \leq x \leq b$). Тогда ее *площадь равна* (рис. 48.1)

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (48.4)$$

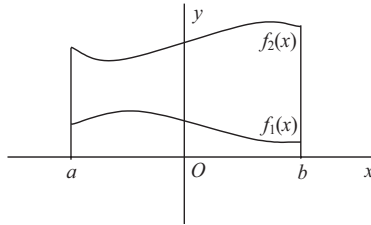


Рис. 48.1

Геометрически данная формула напрямую следует из определения определенного интеграла.

3. *Объем и площадь боковой поверхности тела (вращения).*

Пусть функция $y = f(x)$ задана в виде графика на отрезке $[a, b]$. Поворачиваем мысленно данный график функции вокруг оси x . Получим, таким образом, некоторую поверхность вращения, боковая поверхность которой определяется линией графика данной функции, а в основаниях поверхности вращения лежат два круга радиусов $f(a)$ и $f(b)$ (рис. 48.2).

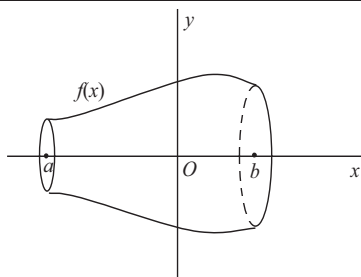


Рис. 48.2

Тогда объем такого тела вращения представляет собой сумму объемов элементарных цилиндров. Элементарный объем в точке x равен $\pi f^2(x) \Delta x$.

Тогда объем тела вращения может быть представлен в виде

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (48.5)$$

Если, к примеру, тело вращения заполнено средой, плотность которой равна $\rho(x)$, то можно определить массу образованного таким образом тела:

$$m = \pi \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx. \quad (48.6)$$

Что касается площади боковой поверхности тела вращения, то, как нетрудно догадаться, ее можно вычислить по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b y(x) ds, \quad (48.7)$$

где ds — элементарная длина дуги, которая в составе линии — графика функции $y(x)$ — вращается вокруг оси x . При этом $2\pi y(x)$ — длина окружности (после вращения линии графика функции) с абсциссой x .

Но нам уже известно (см. выше), что

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (48.8)$$

Тогда окончательно имеем:

$$S = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (48.9)$$

Не должно вызывать затруднение и написание последней формулы в случае, когда вращаемая линия задана параметрически (как в (48.1)):

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \quad (48.10)$$

при этом выполнены равенства $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Определенный интеграл также применяется в механике и физике для нахождения статических моментов и центра тяжести плоской фигуры, для нахождения механической работы, в задачах на суммирование бесконечно малых элементов.

Задача из исторического прошлого.

Двое взялись исполнить некоторую работу в $\sqrt[5]{46656}$ дней.

Во сколько дней каждый из них отдельно мог бы исполнить ту же работу, если известно, что для этого один из них требует на

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{6} + 1)$$

дней более другого?

Ответ. 10 дн.; 15 дн.

49. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.

Признаки сходимости несобственных интегралов. Понятие сингулярных интегралов

В данном разделе вводится понятие так называемых *несобственных интегралов*. Если ранее мы вычисляли определенный интеграл по (конечному) отрезку от функций непрерывных (которые, стало быть, являлись ограниченными), или, в конце концов, от функций, интегрируемых по Риману, то теперь при некоторых условиях сможем вычислять интегралы либо по неограниченной области числовой прямой (это может быть или

числовой луч, или вся числовая прямая), либо по конечному (полу)интервалу, при приближении к концам которого подынтегральная функция неограниченно возрастает.

Соответственно, определенные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^a f(x)dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad (49.1)$$

называют *несобственными интегралами первого (I) рода*.

Интегралы же от неограниченных на отрезке функций

$$\int_a^b f(x)dx \quad (49.2)$$

называют *несобственными интегралами второго (II) рода*.

Формализуем только что приведенные рассуждения.

Определение 49.1. Если $a \in R$ и для любого $b > a$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, $F(b) = \int_a^b f(x)dx$, и в случае, когда при $b \rightarrow +\infty$ существует предел

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b), \quad (49.3)$$

то он I называется *несобственным интегралом первого рода* от функции $f(x)$ на промежутке (числовом луче) $[a, +\infty)$ и обозначается как $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Аналогичным образом определяется $\int_{-\infty}^a f(x)dx$, как предел

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x)dx. \quad (49.4)$$

Несобственный интеграл (по всей числовой прямой) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ определяется следующим образом. Если для некоторого конечного значения a на числовой прямой существуют два несобственных интеграла $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то существует *несобственный интеграл по всей числовой оси*, и выполнено равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx. \quad (49.5)$$

Отметим еще одно интересное свойство несобственных интегралов. Предположим, что мы находимся в условиях определения 49.1.

Тогда для любого конечного значения b числового луча $[a, +\infty)$ справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx. \quad (49.6)$$

Доказательство. Первое слагаемое левой части равенства (49.6) не является несобственным интегралом, поэтому, по условию, он сходится. Сходится при этом и второе слагаемое левой части, поскольку, по условию, существует предел

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_b^u f(x)dx = \int_b^{+\infty} f(x)dx. \quad (49.7)$$

Составим сумму

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^u f(x)dx = \int_a^u f(x)dx. \quad (49.8)$$

Последнее равенство справедливо потому, что в нем ни один интеграл не является несобственным. Переходя в последнем равенстве к пределу при $u \rightarrow +\infty$, который существует, получаем искомое равенство (49.6).

Следующая теорема аналогична критерию Коши наличия предела функции в точке.

Теорема 49.1. Несобственный интеграл первого рода $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0$ такой, что $\forall a_1, a_2 > N$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx \right| < \varepsilon. \quad (49.9)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию верхнего предела:

$$F(u) = \int_a^u f(x)dx. \quad (49.10)$$

По теореме Коши–Больцано (теорема 23.1) предел функции $F(u)$ на бесконечности существует тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0$ такой, что $\forall a_1, a_2 > N$ выполняется неравенство

$$|F(a_1) - F(a_2)| < \varepsilon. \quad (49.11)$$

Но неравенство (49.11) совпадает с неравенством (49.9), поскольку выполнено свойство аддитивности для определенного интеграла. Но, по определению, существование предела функции $F(u)$ на бесконечности и означает сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Теорема доказана.

Следующая теорема позволяет оценивать несобственные интегралы сверху через другой несобственный интеграл.

Теорема 49.2. Если $\forall x \in [a, +\infty)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq g(x)$, и несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \quad (49.12)$$

сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, при этом выполнены неравенства

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx. \quad (49.13)$$

Доказательство. Для любого $x \in [a, +\infty)$ справедливы неравенства

$$f(x) \leq |f(x)| \leq g(x). \quad (49.14)$$

Тогда для любого достаточно большого u справедливы другие неравенства:

$$\int_a^u f(x) dx \leq \int_a^u |f(x)| dx \leq \int_a^u g(x) dx, \quad (49.15)$$

где все определенные интегралы не являются несобственными.

Устремим теперь $u \rightarrow +\infty$ и получим неравенство (49.13), пользуясь свойствами пределов функций. Теорема доказана.

Определение 49.2. Несобственный интеграл I рода $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ абсолютно сходится, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Определение 49.3. Несобственный интеграл I рода $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ условно сходится, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится.

Следующие две теоремы указывают на достаточные условия сходимости несобственного интеграла, подынтегральная функция которого является произведением других функций (*признаки Дирихле и Абеля*).

Прежде чем их доказывать, сформулируем и докажем три вспомогательные теоремы, имеющие самостоятельный интерес. Поскольку они напрямую используются при доказательстве признаков Дирихле и Абеля, автор решил поместить их в данный раздел, а не в два предыдущих.

Первая вспомогательная теорема уже обсуждалась в предыдущих разделах.

Теорема 49.3 (Больцано о промежуточном значении непрерывной функции). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке

$[a, b]$, при этом $f(a) \neq f(b)$ (для определенности $f(a) = A < B = f(b)$). Тогда для любого числа C , находящегося между $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $\eta \in (a, b)$ такая, что $f(\eta) = C$.

Доказательство. Фиксируем C и рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - C$, при этом $F(a) = A - C < 0$, $F(b) = B - C > 0$.

Тогда, очевидно, что существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $F(c) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 49.4 (обобщенная о среднем). Пусть функция $g(x) \geq 0$ определена и интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, а функция $f(x)$ ограничена на этом отрезке и

$$m = \inf_{[a,b]} f(x), \quad M = \sup_{[a,b]} f(x). \quad (49.16)$$

При этом предположим также, что произведение $f(x)g(x)$ также интегрируемо по Риману.

Тогда существует число μ такое, что $m \leq \mu \leq M$, причем выполнено следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx. \quad (49.17)$$

Если же функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует такая точка $c \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx. \quad (49.18)$$

Доказательство. Поскольку $g(x) \geq 0$, то на всем отрезке $[a, b]$ справедливо двойное неравенство:

$$mg(x) \leq \mu f(x)g(x) \leq Mg(x). \quad (49.19)$$

Далее, проинтегрируем данное неравенство по всему отрезку $[a, b]$:

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \mu \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx. \quad (49.20)$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то теорема очевидна. Если же $\int_a^b g(x)dx > 0$, то

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M, \quad (49.21)$$

т.е. существует число $\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$, удовлетворяющее условию

$m \leq \mu \leq M$ и такое, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$.

Если же функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_1) = M$ и $f(x_2) = m$. Поскольку $m \leq \mu \leq M$, то, в силу предыдущей теоремы Больцано о промежу-

точных значениях непрерывной функции, существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = \mu$, и тогда теорема доказана полностью.

Теорема 49.5 (о среднем). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ имеет непрерывные производные на данном отрезке, при этом всюду на нем выполнено неравенство $g'(x) \geq 0$ ($g'(x) \leq 0$).

Тогда существует точка $c \in [a, b]$ такая, что выполнено следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx. \quad (49.22)$$

Доказательство. Пусть для определенности $g'(x) \geq 0$. Введем обозначение: $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$. Очевидно, что $\Phi'(x) = f(x)$ и $\Phi(a) = 0$.

Применяя формулу интегрирования по частям, имеем:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b g(x)d\Phi(x) = \\ &= g(b)\Phi(b) - g(a)\Phi(a) - \int_a^b \Phi(x)g'(x)dx. \end{aligned} \quad (49.23)$$

Но, по условию, $g'(x) \geq 0$, а также функция $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, как и первая производная $g'(x)$.

Тогда по (предыдущей) обобщенной теореме 49.4 о среднем существует точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b \Phi(x)g'(x)dx = \Phi(c)\int_a^b g'(x)dx = \int_a^c f(x)dx[g(b) - g(a)]. \quad (49.24)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= g(b)\int_a^b f(x)dx - (g(b) - g(a))\int_a^c f(x)dx = \\ &= g(b)\left(\int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx\right) + \\ &+ g(a)\int_a^c f(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx. \end{aligned} \quad (49.25)$$

Теорема доказана.

Теорема 49.6 (признак Дирихле). Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, t]$, $\forall t > a$. Если $\forall x \in [a, +\infty)$ функция $F(x) = \int_a^x f(u)du$ ограничена (т.е. существует постоянная $K > 0$ такая, что $|F(x)| \leq K \forall x \geq a$), а функция $g(x)$ неотрицательна и, не возрастая, стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Тогда несобственный интеграл

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \quad (49.26)$$

сходится.

Доказательство. В силу (предыдущей) теоремы 49.5 о среднем для интеграла Римана, для любых $x'' > x' > a$ существует точка $c \in [x', x'']$ такая, что выполнено следующее равенство:

$$\int_{x'}^{x''} f(t)g(t)dt = g(x') \int_{x'}^c f(t)dt + g(x'') \int_c^{x''} f(t)dt. \quad (49.27)$$

В силу ограниченности функции $F(x)$ имеем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| \int_{x'}^c f(t)dt \right| &= |F(c) - F(x')| \leq 2K, \\ \left| \int_c^{x''} f(t)dt \right| &\leq |F(x'') - F(c)| \leq 2K. \end{aligned} \quad (49.28)$$

С другой стороны, поскольку существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon) > a$ такое, что

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4K} \quad (49.29)$$

для любого $x > N(\varepsilon)$. Но тогда из равенства (49.27) следует, что для любых $x'' > x' > N(\varepsilon)$ имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \left| \int_{x'}^{x''} f(t)g(t)dt \right| &\leq |g(x')| \cdot \left| \int_{x'}^c f(t)dt \right| + |g(x'')| \cdot \left| \int_c^{x''} f(t)dt \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{4K} \cdot 2K + \frac{\varepsilon}{4K} \cdot 2K = \varepsilon. \end{aligned} \quad (49.30)$$

Теперь уже сходимость несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ вытекает из критерия Коши сходимости для несобственных интегралов с бесконечными пределами (см. данный раздел выше). Теорема доказана.

Теорема 49.7 (признак Абеля). Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, t]$, $\forall t > a$. При этом интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а функция $g(x)$ неотрицательна, монотонна и ограничена сверху на $[a, +\infty)$ (т.е. существует постоянная $L > 0$ такая, что $|g(x)| \leq L \forall x \geq a$).

Тогда сходится несобственный интеграл

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx. \quad (49.31)$$

Доказательство. Вновь применяя теорему о среднем (см. данный раздел выше), получаем равенство (49.27). Поскольку несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то, в силу критерия Коши, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon) > a$ такое, что при $x'' \geq c \geq x' > N(\varepsilon) > a$ имеем следующие оценки:

$$\left| \int_{x'}^c f(t)dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \left| \int_c^{x''} f(t)dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2L}, \quad (49.32)$$

откуда, поскольку $|g(x)| \leq L \forall x \geq a$, получаем из (49.27) следующую оценку:

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(t)g(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \varepsilon. \quad (49.33)$$

В силу критерия Коши несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится. Теорема доказана.

Можно дать аналогичные определения и теоремы для несобственных интегралов второго рода.

Определение 49.4. Пусть функция $f(x)$ задана на полуинтервале $[a, b)$ и в левосторонней окрестности точки b не ограничена, при этом для любого α такого, что $a \leq \alpha < b$, функция $f(x)$ огра-

ничена и интегрируема на отрезке $[a, \alpha]$, а также существует левосторонний предел

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow b-0} \int_a^{\alpha} f(x) dx. \quad (49.34)$$

Тогда величина I называется *несобственным интегралом второго рода* от функции $f(x)$ на полуинтервале $[a, b)$.

Аналогичным образом можно определить и несобственный интеграл II рода с особой точкой a , при этом будет рассматриваться правосторонняя окрестность точки a .

Если же особая точка c лежит внутри отрезка $[a, b]$, то сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ определяется следующим образом. Если сходятся несобственные интегралы $\int_a^c f(x) dx$ и $\int_c^b f(x) dx$, то *сходится и несобственный интеграл* $\int_a^b f(x) dx$, при этом будет выполнено следующее равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (49.35)$$

Теорема 49.8. Интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall a_1, a_2 \in (b - \delta), a_1 < a_2$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx \right| < \varepsilon. \quad (49.36)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 49.1, при этом также используется теорема 23.1 Коши–Больцано, только уже не в бесконечно удаленной точке, а в правосторонней окрестности некоторой конечной точки числовой прямой.

Следующая теорема аналогична теореме 49.2.

Теорема 49.9. Если $\forall x \in [a, b)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ и интеграл $\int_a^b g(x) dx$ сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (49.37)$$

при этом выполнены неравенства:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b g(x)dx. \quad (49.38)$$

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 49.2, только соответствующие функции верхнего предела стремятся не к бесконечности, а слева к конечной точке числовой прямой.

Определение 49.5. Несобственный интеграл II рода $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Определение 49.6. Несобственный интеграл II рода $\int_a^b f(x)dx$ условно сходится, если он сходится, а интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ расходится.

Можно сформулировать для несобственных интегралов II рода признаки сходимости, аналогичные признакам Абеля и Дирихле.

Теорема 49.10 (признак Дирихле). Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, t]$, $\forall t > a, t < b$. Если $\forall x \in [a, b)$ функция $F(x) = \int_a^x f(u)du$ ограничена, а функция $g(x)$ неотрицательна на полуинтервале $[a, b)$ и, не возрастаая, стремится к бесконечности при $x \rightarrow b - 0$.

Тогда интеграл

$$I = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (49.39)$$

сходится.

Данная теорема доказывается совершенно аналогично теореме 49.3.

Теорема 49.11 (признак Абеля). Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, t]$, $\forall t > a, t < b$. При

этом интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а функция $g(x)$ неотрицательна, монотонна и ограничена сверху на $[a, b)$.

Тогда сходится несобственный интеграл

$$I = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (49.40)$$

Данная теорема доказывается совершенно аналогично теореме 49.7.

Можно сформулировать теорему о замене переменной интегрирования в несобственном интеграле, аналогичную теореме о замене переменной в интеграле Римана.

Задача из исторического прошлого.

На фабрике мужчина получил за работу:

$$(6 - 0,2\sqrt{-60})[(\sqrt{-8} - \sqrt{-18} + 4) - \\ - (\sqrt{-1/2} - \sqrt{-4/2}) + (5\sqrt{-0,6} - \sqrt{-5,4} + 2)]$$

рублей, а женщина, работая на столько дней меньше мужчины, сколько единиц в корне уравнения

$$2z^{4/3} - 5\sqrt[3]{z^2} = 12,$$

получила за работу

$$\sqrt[3]{10077,696}$$

рублей. Если бы мужчина работал столько дней, сколько женщина, и наоборот, то оба получили бы поровну.

Сколько дней работал мужчина, а сколько женщина?

Ответ. 32 дня и 24 дня.

V. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Данная глава посвящена возможному перенесению свойств дифференцирования функций одной переменной на функции нескольких переменных. При этом в результате данного перенесения многие результаты предыдущих глав становятся следствием более общей многомерной теории.

50. Пространство R^n . Множества в R^n : открытые, замкнутые, ограниченные, линейно связные, выпуклые. Компактность. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции. Промежуточные значения непрерывных функций на линейно связных множествах

Данный раздел по сути является некоторым (геометрическим) введением в дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

Определение 50.1. Пусть R^n — множество упорядоченных наборов из n действительных чисел (так называемое арифметическое (векторное) пространство (строк)). Его можно рассматривать как *линейное пространство над множеством действительных* (или, вообще говоря, *комплексных*) чисел R со следующими операциями:

$$\alpha x = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \quad \forall \alpha \in R; \quad (50.1)$$

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n). \quad (50.2)$$

При этом R^n — нормированное пространство с нормой

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \quad (50.3)$$

(о пространствах с нормой и ее свойствах см. главу 1).

Определение 50.2. *Открытым шаром с центром в точке $x \in R^n$ и радиусом $r > 0$ называется множество*

$$B_r(x) = \{y \in R^n: \rho(x; y) < r\}. \quad (50.4)$$

Здесь $\rho(x; y)$ — (евклидово) расстояние между точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$, вычисляемое, как следствие равенства (50.3), по следующему правилу:

$$\rho(x; y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}. \quad (50.5)$$

Замкнутым шаром с центром в точке $x \in R^n$ и радиусом $r > 0$ называется множество

$$B_r(x) = \{y \in R^n: \rho(x; y) \leq r\}. \quad (50.6)$$

Таким образом, замкнутый шар (50.6) является теоретико-множественным объединением открытого шара (50.4) и сферы с центром в точке $x \in R^n$ и радиусом $r > 0$:

$$\{y \in R^n: \rho(x; y) = r\}. \quad (50.7)$$

Определение 50.3. ε -окрестностью точки $x \in R^n$ называют открытое множество

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in R^n: \rho(x; y) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0. \quad (50.8)$$

На самом деле ε -окрестностью точки $x \in R^n$ разумно назвать любое открытое множество (см. ниже), содержащее точку $x \in R^n$. В данном определении (а также и во многих дальнейших) за такое открытое множество берется, в частности, некоторый открытый шар.

Проколотой ε -окрестностью точки $x \in R^n$ называют открытое множество

$$B'_\varepsilon(x) = \{y \in R^n: 0 < \rho(x, y) < \varepsilon\}. \quad (50.9)$$

Таким образом, любая проколотая окрестность точки $x \in R^n$ не содержит самой точки x .

Определение 50.4. Точка $x \in R^n$ называется *внутренней точкой* множества $E \subseteq R^n$, если существует некоторая ε -окрестность $B_\varepsilon(x) \subset E$; *внешней точкой* — если существует некоторая ε -окрестность $B_\varepsilon(x) \subset R^n \setminus E$; *граничной* — если для любой ε -окрестности $B_\varepsilon(x)$ выполнены следующие условия:

$$B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset, B_\varepsilon(x) \cap (R^n \setminus E) \neq \emptyset. \quad (50.10)$$

Таким образом, граничная точка — это та точка, которая не является ни внутренней, ни внешней.

Следующее определение подчеркивает двойственность между открытыми и замкнутыми множествами из R^n .

Определение 50.5. Подмножество из R^n *открыто*, если все его точки внутренние, и *замкнуто*, если его дополнение в R^n открыто.

Определение 50.6. Множество $E \subset R^n$ *ограничено*, если для некоторого r и некоторой точки x_0 существует окрестность $B_r(x_0) \supset E$.

Напомним определение *выпуклого множества*: множество называется *выпуклым*, если оно содержит все отрезки, соединяющие две любые свои точки.

Вариантов следующего определения существует несколько. Мы в случае пространства R^n ограничимся следующим.

Определение 50.7. *Компактом* (или *компактным множеством*) в R^n называется его любое ограниченное и замкнутое подмножество.

Определение 50.8. Множество в R^n называется *линейно связным*, если через любые две его точки можно провести непрерывную кривую, целиком принадлежащую этому множеству.

Далее будем рассматривать так называемые *действительные (однозначные) функции от n переменных* $f(x_1, \dots, x_n)$, т.е. такие отображения из R^n в R :

$$f: (x_1, \dots, x_n) \in R^n \rightarrow x \in R, \quad (50.11)$$

при которых каждой точке пространства R^n ставится в соответствие не более одного числа из R .

Дадим ряд определений, аналогичных соответствующим определениям из дифференциального исчисления функций одного переменного.

Напомним, что точка a из данного множества называется *предельной*, если в любой сколь угодно малой ее проколотой окрестности имеются точки из данного множества.

Пусть a — предельная точка области определения функции f .

Определение 50.9. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ *имеет предел*, равный A , при

$$x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow a = (a_1, \dots, a_n), \quad (50.12)$$

если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек x из проколотовой

δ -окрестности точки a выполнено неравенство:

$$|f(x_1, \dots, x_n) - A| < \varepsilon. \quad (50.13)$$

При этом проколотовую окрестность точки a — открытое множество — можно также определить как совокупность следующих условий:

$$|x_1 - a_1| < \delta, \dots, |x_n - a_n| < \delta, x \neq a. \quad (50.14)$$

Пишут

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ или } A = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, \dots, x_n). \quad (50.15)$$

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет предел, равный A , при

$$x_1, \dots, x_n \rightarrow +\infty,$$

если $\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(\varepsilon) > 0$ такое, что неравенство

$$|f(x_1, \dots, x_n) - A| < \varepsilon \quad (50.16)$$

выполнено при любых $x_1 > \Delta, x_2 > \Delta, \dots, x_n > \Delta$.

После определения предела вполне логично дать определение функции, непрерывной в точке.

Определение 50.10. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна в точке $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$, если

$$\exists \lim_{x \rightarrow x'} f(x) = f(x'). \quad (50.17)$$

Из последнего определения можно сделать важный вывод (полное доказательство которого автором в данной главе не предусматривается). Если на некотором линейно связном множестве задана непрерывная числовая функция, то она любую непрерывную кривую данного множества переводит в (линейно связный) интервал числовой прямой.

Теорема 50.1 (Вейерштрасса–Больцано). Если $E \subset R^n$ — линейно связное открытое множество, а $f(x_1, \dots, x_n)$ — действительнозначная непрерывная функция на E , то она принимает все промежуточные значения (то есть, если функция f принимает

некоторые значения A и B , то она принимает все промежуточные значения из отрезка $[A, B]$).

Схема доказательства. Поскольку функция f непрерывна на множестве E , которое линейно связно, то образ $f(M)$ некоторого подмножества M множества E является линейно связным (без доказательства). Поэтому для любых $A, B \in f(M)$ таких, что $A < B$ и для любого y , принадлежащего отрезку $[A, B]$, выполнено следующее свойство:

$$y \in f(M). \quad (50.18)$$

Таким образом, существует $x \in M$ такое, что $f(x) = y$.

Данный раздел не претендует на завершенность изложения таких общих топологических понятий, как открытость, замкнутость, ограниченность, линейная связность, выпуклость, компактность. Его цель — изложить элементарное введение в исследование перчисленных понятий как можно более доступным языком.

Задача из исторического прошлого.

Если к числителю искомой дроби придать, а от знаменателя вычесть положительный корень уравнения:

$$3z\sqrt[3]{z} - 7\sqrt[3]{z^2} = 20,$$

то получим обращенную дробь. Если же утроенную обращенную дробь помножить на сумму числителя со знаменателем, то в произведении окажется

$$\sqrt[3]{3652264}.$$

Определить искомую дробь.

Ответ. $\frac{3}{11}$.

51. Частные производные. Дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы дифференциала. Геометрический смысл частных производных и дифференциала.

Производная по направлению. Градиент

Ввиду повышения размерности всеобъемлющего пространства, определение дифференцируемости функции многих переменных в точке содержит определенные нюансы.

Определение 51.1. Функция f называется *дифференцируемой* в точке $x^0 \in R^n$, если в некоторой ее окрестности $B_\delta(x^0)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = L(\Delta x) + o(\|\Delta x\|), \quad \Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n). \quad (51.1)$$

При этом L — линейное непрерывное отображение из R^n в R (см. также главу 1), которое называется *дифференциалом функции f в точке $x^0 \in R^n$* (и обозначается $df(\Delta x)|_{x^0}$).

Частной производной $\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \right|_{x=x^0} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ функции $f(x)$ по переменной x_k в точке x^0 называется

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)}{h} \Big|_{x=x^0}, \quad (51.2)$$

если он существует.

Таким образом, частная производная функции многих переменных по x_k — это обыкновенная производная данной функции одного переменного x_k при фиксированных остальных.

Нетрудно также понять геометрический смысл дифференциала функции в точке — это, как и в случае функции одной переменной, *главная часть приращения данной функции* (линейно зависящая от ее приращений по каждой из независимой переменной).

Замечание 1. Полученное в силу определения 51.1 линейное отображение (дифференциал функции в точке) единственно в своем представлении.

Доказательство. Предположим противное, т.е. существуют два представления (51.1) приращения данной функции в точке x^0 :

$$f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = L_1(\Delta x) + o_1(\|\Delta x\|), \quad (51.3)$$

$$f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = L_2(\Delta x) + o_2(\|\Delta x\|), \quad L_1 \neq L_2. \quad (51.4)$$

Вычтем одно равенство из другого и получим следующее:

$$0 = (L_1 - L_2)(\Delta x) + o_3(\|\Delta x\|). \quad (51.5)$$

Разделим теперь последнее равенство на скалярную величину $\|\Delta x\|$ и устремим ее к нулю. Получим:

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{(L_1 - L_2)(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0 \quad (51.6)$$

для любого (векторного) приращения Δx аргумента данной функции.

Поскольку разность операторов $(L_1 - L_2)$ является ненулевым линейным оператором, у него существует ненулевой собственный вектор с ненулевым собственным значением. Тогда если выбрать (векторное) приращение Δx вдоль такого собственного вектора, то равенство (51.6) выполнено не будет. Противоречие. $L_1 = L_2$ и замечание доказано.

Замечание 2. Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке x^0 , то она непрерывна в ней.

Доказательство. Пусть для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ выполнено представление (51.1). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ будем искать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любых приращениях аргумента $\|\Delta x\|$, удовлетворяющих неравенству $\|\Delta x\| < \delta$, выполнялось бы неравенство

$$|f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)| = |L(\Delta x) + o(\|\Delta x\|)| \leq |L(\Delta x)| + |o(\|\Delta x\|)| < \varepsilon. \quad (51.7)$$

Действительно, поскольку $L(0) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\|\Delta x\| < \delta_1$ будет выполнено неравенство $|L(\Delta x)| < \frac{\varepsilon}{2}$; более того, в силу определения бесконечно малой функции, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_2(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\|\Delta x\| < \delta_2$ будет выполнено неравенство $|o(\|\Delta x\|)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Выбирая в качестве искомого $\delta(\varepsilon)$ минимум из $\delta_1(\varepsilon)$ и $\delta_2(\varepsilon)$, получаем искомую непрерывность данной функции. Замечание доказано.

Вспомним, что для функции одной переменной существование производной и дифференцируемость (в точке) — понятия эквивалентные. Для функции же нескольких переменных это несколько иначе, поскольку из существования ее частных производных по всем переменным не всегда следует ее дифференцируемость (в точке). Но всегда справедлива

Теорема 51.1. Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке x^0 , то она имеет в данной точке все частные производные $\frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0)$, $k = 1, \dots, n$, и верно следующее равенство:

$$df(\Delta x)|_{x^0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0) dx_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Запишем приращение функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в точке x^0 в направлении координатной оси x_k :

$$f(x^0 + \Delta x_k) - f(x^0) = L(\Delta x_k) + o(|h|), \quad \Delta x_k = (0, \dots, h, \dots, 0), \quad (51.8)$$

где величина h стоит в векторном приращении Δx_k на k -м месте.

Если мы разделим равенство (51.8) на h и перейдем к пределу при $h \rightarrow 0$, то слева получим частную производную $\frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0)$, а справа — численное значение коэффициента (представления линейного оператора L), стоящего перед h . Но $h = dx_k$ стоит на k -м месте в векторном приращении Δx . Теорема доказана.

Обратное утверждение справедливо при дополнительном предположении о непрерывности частных производных.

Теорема 51.2. Если числовая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет в некоторой окрестности точки $x^0 \in R^n$ непрерывные производные $\frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0)$, $k = 1, \dots, n$, то f дифференцируема в точке x^0 .

Доказательство. Для простоты выкладок докажем теорему для случая $n = 2$. Общий случай доказывается аналогично, хотя и более громоздко.

Итак, имеем функцию двух переменных $f = f(x, y)$. Пусть $x^0 = p_0 = (x_0, y_0)$ и $x = p = (x, y)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} f(p) - \frac{\partial}{\partial x_j} f(p_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (51.9)$$

при любом $p \in B_\delta(p_0)$, но

$$\begin{aligned} \Delta f(p_0) &\equiv f(x, y) - f(x_0, y_0) = \\ &= (f(x, y) - f(x, y_0)) + (f(x, y_0) - f(x_0, y_0)). \end{aligned} \quad (51.10)$$

Рассмотрим при фиксированном y_0 функцию $\varphi(z) = f(z, y_0)$ на отрезке $[x_0, x]$. Поскольку обыкновенная производная удовлетворяет условию $\varphi'(z) = \frac{\partial}{\partial x} f(z, y_0)$, то функция $\varphi(z)$ дифференцируема на отрезке $[x_0, x]$ и, в частности, непрерывна на нем. Поэтому к функции $\varphi(z)$ на данном отрезке $[x_0, x]$ применима теорема Лагранжа о конечном приращении.

Аналогично, полагая $\psi(z) = f(x_0, z)$, видим, что функция $\psi'(z) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, z)$ дифференцируема на отрезке $[y_0, y]$, в частности, непрерывна на нем и $\psi'(z) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, z)$, так что и к функции $\varphi(z)$ на данном отрезке $[y_0, y]$ применима теорема Лагранжа о конечном приращении.

Но тогда имеем следующее представление:

$$\begin{aligned} \Delta f(p_0) = & (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0 + \theta_1(y - y_0)) + \\ & + (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} f(x_0 + \theta_2(x - x_0), y_0), \end{aligned} \quad (51.11)$$

где $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2$.

Обозначим, далее,

$$p_1 = (x_0, y_0 + \theta_1(y - y_0)), p_2 = (x_0 + \theta_2(x - x_0), y_0) \in B_\delta(p_0). \quad (51.12)$$

Тогда из неравенства $|p_0 - p_i| < \delta$, $i = 1, 2$, в силу выбора $\delta(\epsilon) > 0$, имеем:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(p_2) - \frac{\partial}{\partial x} f(p_0) \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial y} f(p_1) - \frac{\partial}{\partial y} f(p_0) \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (51.13)$$

т.е.

$$\begin{aligned} \left| \Delta f(p_0) - [(y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} f(p_0) + (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} f(p_0)] \right| < \\ < \frac{\epsilon(|x - x_0| + |y - y_0|)}{2} < \epsilon |p_0 - p| \end{aligned} \quad (51.14)$$

для любого $p \in B_\delta(p_0)$, что и доказывает теорему.

Теорема 51.3 (о дифференцировании композиции отображений и об инвариантности дифференциала). Если функция

$$f(x_1, \dots, x_n): R^n \rightarrow R \quad (51.15)$$

дифференцируема в точке x^0 , а функция

$$x_k(t_1, \dots, t_m) = x_k(t): R^m \rightarrow R^n \quad (51.16)$$

— дифференцируема в точке t^0 , $k = 1, \dots, n$, и $x_k(t^0) = x_k^0$, т.е. $x(t^0) = x^0$, то прямое вычисление дифференциала композиции двух функций (которая становится дифференцируемой функцией в точке t^0)

$$f(x(t)): R^m \rightarrow R \quad (51.17)$$

в точке t^0

$$df(x(\Delta t))|_{t^0} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial t_j} f(x(t^0)) \Delta t_j, \quad (51.18)$$

и последовательное его вычисление

$$df(x(t))|_{t^0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0) dx_k(t)|_{t^0} \quad (51.19)$$

приводят к одному результату (*инвариантность дифференциала*).

Доказательство. Выпишем дифференциал функции (51.15):

$$df(\Delta x)|_{x^0} = df(x^0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0) dx_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0) \Delta x_k. \quad (51.20)$$

Прямое же вычисление дифференциала композиции двух функций (51.15) и (51.16) дает следующее:

$$\begin{aligned} df(x(\Delta t))|_{t^0} &= df(x(t^0)) = \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial t_j} f(x(t^0)) dt_j = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial t_j} f(x(t^0)) \Delta t_j. \end{aligned} \quad (51.21)$$

Дифференциал же функции (51.16) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} dx_k(\Delta t)|_{t^0} &= dx_k(t^0) = \\ &= \sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial t_s} x_k(t^0) dt_s = \sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial t_s} x_k(t^0) \Delta t_s, \quad k=1, \dots, n. \end{aligned} \quad (51.22)$$

Следовательно, равенство (51.20) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} df(\Delta x)|_{x^0} &= df(x^0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0) \left[\sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial t_s} x_k(t^0) dt_s \right] = \\ &= \sum_{s=1}^m \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0) \frac{\partial}{\partial t_s} x_k(t^0) \right] dt_s. \end{aligned} \quad (51.23)$$

Поменяем формально индекс s на индекс j . Получим:

$$df(x(\Delta t))|_{x^0} = df(x(t^0)) = \sum_{j=1}^m \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0) \frac{\partial}{\partial t_j} x_k(t^0) \right] dt_j. \quad (51.24)$$

Сравнивая (51.21) и (51.24), можно сделать вывод: для того чтобы представление дифференциала было инвариантным относительно независимых переменных (т.е. всегда имело вид, как в теореме 51.1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие тождества:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(x(t^0)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0) \frac{\partial}{\partial t_j} x_k(t^0), \quad j=1, \dots, m. \quad (51.25)$$

Более того, равенства (51.25) и задают формулы для частных производных *композиции* двух функций (51.17).

Следующая теорема некоторым образом касается геометрической интерпретации частных производных.

Теорема 51.4. Пусть определенная в некоторой окрестности точки x^0 функция $f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в данной точке и непрерывна в некоторой ее окрестности. Тогда, если определено уравнение поверхности, задаваемой (в виде *графика*), по следующей формуле:

$$y = x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n) \quad (51.26)$$

в пространстве R^{n+1} , то она в своей точке $(x^0, f(x^0))$ имеет касательную гиперплоскость, уравнение которой имеет следующий вид:

$$y = x_{n+1} = f(x^0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0) (x_k - x_k^0). \quad (51.27)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что последнее уравнение действительно задает плоскость, проходящую через точку $(x^0, f(x^0))$ данной поверхности. В точке $(x^0, f(x^0))$ разрежем ее гиперплоскостями, параллельными координатным и заданными

уравнениями $x_k = x_k^0$, $k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$. Таким образом, все перечисленные x_k становятся фиксированными, за исключением координатного направления x_j , вдоль которого функция f и меняется, становясь на время функцией одного переменного x_j .

Теперь становится очевидным, что угловым коэффициентом касательной прямой в точке x^0 к построенной функции одной переменной и равен частной производной $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x^0)$, а уравнение касательной прямой можно представить в виде

$$y = f(x^0) + \frac{\partial}{\partial x_j} f(x^0)(x_j - x_j^0). \quad (51.28)$$

Аналогичным образом остальные частные производные $\frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0)$, $k = 1, 2, \dots, n$ определяют соответствующие угловые коэффициенты наклона касательных прямых. Теперь, если *натянуть* плоскость (см. главу 1) на n вполне определенных касательных прямых в пространстве R^{n+1} , то получим касательную гиперплоскость к данной гиперповерхности в точке $(x^0, f(x^0))$.

Более того, в силу дифференцируемости справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} y - f(x^0) &= f(x) - f(x^0) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} f(x^0)(x_k - x_k^0) + o(\|x - x^0\|), \end{aligned} \quad (51.29)$$

которое задает семейство секущих плоскостей. При $x \rightarrow x^0$ данное уравнение и переходит в уравнение (51.27) касательной плоскости. Теорема доказана.

Арифметическое пространство R^n можно отождествить с линейным векторным пространством V^n , в котором координаты векторов равны соответствующей строке из n чисел, как элементов пространства R^n .

Определение 51.3. Производной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в точке x^0 по направлению вектора $u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n \cong V^n$, $\|u\| = 1$, называют предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + tu) - f(x^0)}{t} \quad (51.30)$$

(если он существует), который обозначают через $\frac{\partial f(x^0)}{\partial u}$.

В частности, производные по направлениям, совпадающим со стандартными декартовыми координатными осями x_k пространства R^n , и есть недавно введенные частные производные $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$

функции $f(x)$ в точке x^0 .

Теорема 51.5. Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке $x^0 \in R^n$, то для любого вектора $u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n \cong V^n$, $\|u\|=1$, существует производная по направлению данного вектора в точке x^0 .

Доказательство. Рассмотрим изменение аргумента вдоль вектора u : $x^0 + tu$. В силу дифференцируемости данной функции имеем ее следующее представление:

$$f(x^0 + tu) - f(x^0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k} \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k} t u_k + o(\|tu\|), \quad (51.31)$$

$$\Delta x = tu = (tu_1, \dots, tu_n).$$

Другими словами, поделив на t и устремив его к нулю, имеем:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial u} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k} u_k. \quad (51.32)$$

Справа стоит скалярное произведение векторов $\left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} \right)$

и u , поэтому правая часть вполне определена. Значит левая часть также корректно определена, что и доказывает теорему.

Следствие. Если существует производная функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по направлению вектора u , то она вычисляется по следующей формуле:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial u} = \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x}, u \right), \quad (51.33)$$

где справа записано $(\dots, \dots)$ — стандартное евклидово скалярное произведение в арифметическом пространстве $R^n \cong V^n$.

Определение 51.4. Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет в точке x^0 все частные производные, то вектор, составленный из частных производных

$$\left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} \right), \quad (51.34)$$

называется *градиентом данной функции в точке x^0* и обозначается как $\text{grad } f(x^0)$.

Поэтому имеем еще одну формулу для дифференцирования по направлению:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial u} = (\text{grad } f(x^0), u). \quad (51.35)$$

Необходимо заметить, что вышеприведенная формула (51.25) для частных производных композиции двух функций также может быть интерпретирована как скалярное произведение градиента функции f переменной x на вектор скорости кривой, параметризованной параметром t и проходящей через точку поверхности, заданной уравнением $y = f(x)$.

Задача из исторического прошлого.

Куплено на

$$\sqrt[3]{1728}$$

р. ситца. Если на те же деньги куплено его на столько аришин более, сколько их находится в ширине прямоугольного участка земли, содержащего 20 квадр. саж. и имеющего длину на 8 ариш. более ширины, то каждый аришин обошелся бы дешевле на число копеек, удовлетворяющее уравнению:

$$\frac{x^2 - \sqrt[3]{x^2}}{x + \sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}} = 2.$$

Сколько аришин ситца куплено?

Ответ. 50 ариш.

52. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора (с остаточным членом в форме Лагранжа)

Частные производные первого порядка от дифференцируемой функции нескольких переменных также являются вполне определенными функциями, вообще говоря, того же количества независимых переменных. Поэтому процедура нахождения одних частных производных от других частных производных данной функции представляется вполне естественной.

Определение 52.1. Если частные производные $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$, $k = 1, \dots, n$, определены в некоторой окрестности точки x^0 и существует частная производная $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$ в точке x^0 , то ее называют *второй частной производной по переменным x_i, x_j функции f в точке x^0* и обозначают $\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_j \partial x_i}$. Если $i = j$, то производную называют *числовой*, иначе — *смешанной*.

Следует заметить, что порядок дифференцирования функции важен, поскольку, вообще говоря, $\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_j \partial x_i} \neq \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j}$.

В последнем случае можно поставить знак равенства в том случае, если данная функция имеет вторые производные, непрерывные в некоторой окрестности точки x^0 .

Аналогично определяется понятие m -й частной производной при $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial^{m-1} f(x^0)}{\partial x_i \dots \partial x_j}. \quad (52.1)$$

Определение 52.2. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ m раз дифференцируема ($m \geq 2$) в точке x^0 , если в некоторой ее окрестности данная функция $(m - 1)$ раз дифференцируема, при этом все ее частные производные порядка $(m - 1)$ дифференцируемы в точке x^0 .

Если при этом все частные производные данной функции порядка m являются непрерывными функциями в точке x^0 , то го-

воят что данная функция непрерывно дифференцируема m раз в точке x^0 .

Если функция m раз (непрерывно) дифференцируема в каждой точке некоторой области, то говорят, что данная функция m раз (непрерывно) дифференцируема во всей области (пишут $f \in C^m$).

Определение 52.3. Если первый дифференциал $df(\Delta x)|_x = df(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) dx_k$ при фиксированном Δx рассматривать как функцию от x , которая дифференцируема в точке x^0 , то выражение

$$d[df(\Delta x)]|_{x^0}, \quad (52.2)$$

взятое при том же приращении Δx в точке x^0 , называется *вторым дифференциалом функции f в точке x^0* .

Если f дифференцируема в некоторой окрестности точки x^0 , и все вторые производные дифференцируемы в данной точке, то существует второй дифференциал

$$\begin{aligned} d[df(\Delta x)]|_{x^0} &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(x^0) dx_i\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x^0) dx_i\right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x^0) dx_i dx_j. \end{aligned} \quad (52.3)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть представление m -го дифференциала (в данном случае в координатной форме).

Введем далее некоторые необходимые обозначения, которые становятся ясными после формулировки трех последних определений:

$$\begin{aligned} k &= (k_1, k_2, \dots, k_n), \quad |k| = \sum_{i=1}^n k_i, \quad 0 \leq k_i \leq |k|, \quad k_i \in N_0, \quad i = 1, \dots, n, \\ k! &= k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!, \end{aligned}$$

$$D^k f(x) = \frac{\partial^{|k|} f(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n} f(x). \quad (52.4)$$

Заметим, что операторный символ D^k очень удобен, поскольку в правой части тождества (52.4) с одной стороны стоит ком-

позиция n операторов, а с другой стороны — это можно рассматривать как алгебраическое произведение, к которому применима формула бинорма Ньютона, полностью соответствующая формуле (правилу) Лейбница дифференцирования (перестановочного) произведения операторов или функций.

Лемма 52.1 (обобщение формулы бинорма Ньютона). Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, k — введенный выше индекс, при этом

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} = \prod_{i=1}^n x_i^{k_i}. \quad (52.5)$$

Тогда для любого $m \in N$ имеет место обобщенная формула Ньютона:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m &= \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k!} \cdot x^k = \\ &= \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = m} \frac{m!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}. \end{aligned} \quad (52.6)$$

Доказательство. Будем рассматривать однородные многочлены следующего вида:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = m} A_{k_1, k_2, \dots, k_n} \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}. \quad (52.7)$$

Если взять производную

$$\frac{\partial^m}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \dots \partial x_n^{l_n}} (l = (l_1, \dots, l_n), |l| = m) \quad (52.8)$$

от обеих частей тождества (4), то справедлива формула

$$m! = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = m} A_{k_1, k_2, \dots, k_n} \cdot \prod_{i=1}^n k_i \cdot (k_i - 1) \dots (k_i - l_i + 1) x_i^{k_i - l_i}, \quad (52.9)$$

причем, очевидно, справа сохраняются лишь те индексы k_i , для которых выполнены неравенства $k_i \geq l_i \forall i$. Но

$$m = \sum_{i=1}^n k_i = \sum_{i=1}^n l_i, \quad (52.10)$$

поэтому $k_i \leq l_i \forall i$, т.е. сохраняются лишь индексы $k_i = l_i \forall i$. Но тогда имеем следующее:

$$m! = A_{l_1, l_2, \dots, l_n} l_1! \dots l_n!, \quad (52.11)$$

т.е. $A_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \frac{m!}{(i_1! \dots i_n!)}$, откуда $A_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{m!}{k!}$, что и доказывает лемму.

Следствие. При $n = 2$ верно следующее разложение:

$$(x_1 + x_2)^m = \sum_{k_1 + k_2 = m} \frac{m!}{(k_1! k_2!)} \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} = \sum_{l=1}^m \frac{m!}{l! (m-l)!} \cdot x_1^l \cdot x_2^{m-l}. \quad (52.12)$$

Лемма 52.2. Пусть числовая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ p раз дифференцируема в некоторой δ -окрестности (шаре) $B_\delta(x^0)$ точки x^0 , и $x^0 + th \in B_\delta(x^0)$ так, что $t \in [0, 1]$, $h = (h_1, \dots, h_n)$ и $\|h\| < \delta$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(t) = f(x^0 + th)$. Тогда $\forall m \in N$ такого, что $1 \leq m \leq p$, имеет место следующая формула при всех $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} F(t) &= \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k!} h^k \cdot D^k f(x^0 + th) \equiv \\ &\equiv \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k_1! \dots k_n!} \cdot h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n} \cdot D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n} f(x^0 + th) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n h_j D_j \right)^m f(x^0 + th). \end{aligned} \quad (52.13)$$

Доказательство. Поскольку $f(x^0 + th) = f(x_1^0 + th_1, \dots, x_n^0 + th_n)$ и при этом функция $f(x)$ дифференцируема p раз в шаре $B_\delta(x^0)$, можно применить теорему о производной сложной функции одного переменного:

$$\frac{d}{dt} F(t) = \sum_{j=1}^n D_j f(x^0 + th) \cdot h_j \equiv \left(\sum_{j=1}^n h_j D_j \right) f(x^0 + th) \quad (52.14)$$

и вообще, для любого $m \in N$ такого, что $1 \leq m \leq p$, имеет место представление для высшей производной:

$$\frac{d^m}{dt^m} F(t) = \sum_{|k|=m} B_{k_1, \dots, k_n} \cdot h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n} \cdot D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n} f(x^0 + th). \quad (52.15)$$

Заметим при этом, что коэффициенты $B_{k_1, \dots, k_n}$ не зависят от вида функции $f(x)$, а поэтому их можно вычислить, беря в качестве функции $f(x)$, например, другую функцию $\varphi(x) = \exp\{x_1 + \dots + x_n\}$. Но тогда аналогичная вспомогательная функция для $\varphi(x)$ примет следующий вид:

$$\Phi(t) = \varphi(x^0 + th) = \exp\{(x_1^0 + \dots + x_n^0) + t(h_1 + \dots + h_n)\}. \quad (52.16)$$

Экспонента выбрана потому, что $D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n} \varphi(x) = \varphi(x)$, а поскольку функция $\varphi(x)$, по крайней мере, непрерывна в шаре $B_\delta(x^0)$, то, используя лемму 52.1 об обобщении формулы бинома Ньютона, в силу теоремы о производной сложной функции одной переменной, имеем следующее представление для высшей производной:

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} \Phi(t) &= \exp(x_1^0 + \dots + x_n^0) \cdot \frac{d^m}{dt^m} \exp\{t(h_1 + \dots + h_n)\} = \\ &= \exp\{(x_1^0 + \dots + x_n^0) + t(h_1 + \dots + h_n)\} = (h_1 + \dots + h_n)^m = \\ &= \varphi(x^0 + th) \cdot \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k_1! \dots k_n!} \cdot h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n} \equiv \\ &\equiv \sum_{|k|=m} B_{k_1, \dots, k_n} \cdot h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n} \cdot D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n} \varphi(x^0 + th) = \\ &= \varphi(x^0 + th) \cdot \sum_{|k|=m} B_{k_1, \dots, k_n} \cdot h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n}, \end{aligned} \quad (52.17)$$

откуда $B_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{m!}{k!}$. Лемма доказана.

(Идеи доказательства некоторых утверждений данного раздела принадлежат Н.И. Фельдману.)

Теорема 52.1 (формула Тейлора для числовой функции с остаточным членом в форме Лагранжа). Рассмотрим функцию $f(x)$ на открытой шаровой окрестности $B_\delta(x^0)$ точки x^0 . Пусть функция $f(x)$ $(p+1)$ раз дифференцируема в рассматриваемой окрестности при $p \geq 0$.

Тогда для любого сдвига $x^0 + h$, лежащего в $B_\delta(x^0)$, имеет место следующее представление:

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^n h_j D_j \right)^k f(x^0) + r_p(x^0, h), \quad (52.18)$$

при этом можно найти такое $\theta \in (0, 1)$, что

$$r_p(x^0, h) = \frac{1}{(p+1)!} \left(\sum_{j=1}^n h_j D_j \right)^{p+1} f(x^0 + \theta h). \quad (52.19)$$

Формула (52.19) задает остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа.

Доказательство. Аналогично доказательству вспомогательной леммы рассмотрим функцию $F(t) = f(x^0 + th)$, которая определена при любом $t \in [0, 1]$, при этом $F(0) = f(x^0)$, $F(1) = f(x^0 + h)$. В силу вспомогательной леммы, доказанной выше, справедливо следующее равенство:

$$F^{(k)}(t) = \left(\sum_{j=1}^n h_j D_j \right) f(x^0 + th), \quad k = 1, \dots, p, \quad (52.20)$$

а, следовательно,

$$F^{(k)}(0) = \left(\sum_{j=1}^n h_j D_j \right) f(x^0), \quad k = 1, \dots, p. \quad (52.21)$$

Поскольку функция $f(x)$ $(p + 1)$ раз дифференцируема в рассматриваемой окрестности, то, по крайней мере, функция $F(t)$ p раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$ и p раз дифференцируема на открытом интервале $(0, 1)$. Тогда, по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функций одной переменной, существует такое $\theta \in (0, 1) \subset (-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, что

$$F(t) = F(0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot F^{(k)}(0) t^k + \frac{t^{p+1}}{(p+1)!} F^{(p+1)}(\theta t), \quad (52.22)$$

а при $t = 1$ справедливо равенство

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^n h_j D_j \right)^k f(x^0) + r_p(x^0, h), \quad (52.23)$$

где остаток $r_p(x^0, h)$ определяется по формуле (52.19). Теорема доказана.

На самом деле при доказательстве этой теоремы использовался тот факт, что $B_\delta(x^0)$ — (выпуклый) шар с центром в точке x^0 . В принципе, этого всегда можно добиться, уменьшив по необходимости радиус δ шара $B_\delta(x^0)$.

Задача из исторического прошлого.

Два капитала, сумма которых 9000 руб., отданы в рост на простые проценты. По истечении года первый капитал принес прибыли

$$\sqrt{13824000}$$

рублей, а второй, отданный на

$$\left[\frac{10 - (\sqrt{-32} - \sqrt{-54})^2}{24}; \frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-20} + \sqrt{15}} \right].$$

% более, доставил в 100 раз более рублей процентных денег, чем сколько единиц в корне уравнения:

$$x^5 - 30x^2\sqrt{x} = 64.$$

Под сколько процентов был отдан в рост каждый капитал?

Ответ. 6% и 8%.

53. Отображение множеств из пространства R^n в пространство R^m . Непрерывные и дифференцируемые отображения

В предыдущих разделах мы фактически уже пользовались понятием отображений одного многомерного пространства в другое многомерное пространство, в частности, из R^n в R^m ; $m, n \geq 2$. В данном разделе мы лишь уточним технику обращения с такими отображениями.

Рассмотрим отображение

$$f: R^n \rightarrow R^m \quad (53.1)$$

двух арифметических пространств высших, вообще говоря, размерностей. В каждом из них задана, для простоты, евклидова норма (см. раздел 50). Норму в пространстве R^n будем обозначать через $\|\cdot\|_n$, а в R^m — соответственно, через $\|\cdot\|_m$.

Пусть задана некоторая область $G \subseteq R^n$.

Определение 53.1. Отображение $f: G \subseteq R^n \rightarrow R^m$ называется *непрерывным в точке* $x^0 \in G$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при любом $x \in G$, удовлетворяющем двойному неравенству

$$0 < \|x^0 - x\|_n < \delta, \quad (53.2)$$

выполнено условие

$$\|f(x^0) - f(x)\|_m < \varepsilon. \quad (53.3)$$

Уже из данного определения видно, насколько универсальна техника использования норм в соответствующих нормированных пространствах.

Перейдем теперь к определению понятия дифференцируемости отображения

$$f: G \subseteq R^n \rightarrow R^m \quad (53.4)$$

в точке $x^0 \in G$. Забегая вперед, отметим, что в этом случае дифференциал рассматриваемого отображения будет принадлежать линейному пространству $L(R^n, R^m)$ (непрерывных) отображений из R^n в R^m , размерность которого будет равна mn .

Здесь снова подметим, что арифметическое пространство R^n является как векторным пространством элементов $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, заданных в евклидовом каноническом базисе, так и «точечным» пространством (арифметических строк) $x = (x_1, \dots, x_n)$ (с как бы присоединенным пространством R^n). Но при этом уже имеет логический смысл запись $a + h = b$ для точки $b = \vec{b} \in R^n$, являющейся концом вектора $h = b - a$, лежащего в R^n с началом в точке a и концом в точке b .

Определение 53.2. Отображение (53.4) дифференцируемо в точке $x^0 \in G$, если существуют линейное (непрерывное) отображение $A \in L(R^n, R^m)$ и окрестность $U(x^0) \subset G \subset R^n$ такие, что

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + Ah + r(h) \|h\|_n, \quad (53.5)$$

для любого $x^0 + h \in U(x^0)$, где

$$\lim_{\|h\|_n \rightarrow 0} \|r(h)\|_m = 0, \quad (53.6)$$

при этом линейное отображение A называют *производной* (или *дифференциалом*) отображения f в точке $x^0 \in G$.

Принятая при этом запись: $A = Df(x^0)$ или $A = df(x^0)$.

Необходимо также заметить, что функция

$$r(h) = \frac{f(x^0 + h) - f(x^0) - Ah}{\|h\|_n} \quad (53.7)$$

определена единственным образом при $h \neq 0$. Будем считать, в силу (53.6), что r непрерывна в нуле, т.е. формально положим $r(0) = 0$.

Подчеркнем, что вектор h лежит в пространстве R^n и для точки $x^0 + h \in U(x^0) \subset G$ вектор $f(x^0 + h) - f(x^0)$ лежит в пространстве R^m .

Аналогичным образом может быть доказана теорема, аналогичная замечанию 1 раздела 51, о единственности производной, а также теорема о непрерывности дифференцируемого отображения.

Как видно, совершенно нетрудно и естественно можно переписать язык, использующийся в предыдущих разделах, на более общий язык нормированных пространств.

Задача из исторического прошлого.

Два путешественника, выехав одновременно из двух городов А и В друг другу навстречу, съехались в С, причем первый из них проехал на 60 верст более второго. Из С они продолжали путешествие каждый в свою сторону и доехали до городов, соответственно, в

$$\sqrt[3]{3375}$$

часов и в 22 часа 30 м., причем первый уменьшил часовую скорость езды на столько верст, сколько единиц в большем корне уравнения:

$$5\sqrt[5]{z^3} - 3\sqrt[10]{z^3} = 2,$$

а второй увеличил ее на

$$\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{-2})^2 (8 + \sqrt{-1536}) \sqrt{-1}}{(10\sqrt{-1} + \sqrt{-200})^3 \cdot (0,7 - \sqrt{0,5})}$$

верст.

Определить расстояние от А до В.

Ответ. 300 вер.

54. Неявные функции. Теоремы существования. Дифференцирование неявных функций

Как известно, способов задания функций бывает множество. Но чаще всего на практике встречается ситуация, когда аналитическое выражение, задающее некоторое отображение, настолько сложно, что понять, где аргумент данного отображения, а где образ данного аргумента при данном отображении, — не легко. Вот таким, так называемым *неявным отображениям* (функциям) и посвящен данный раздел.

Попутно попытаемся выяснить условия, при которых, к примеру, одно уравнение с несколькими переменными определяет однозначную функцию, т.е. определяет одну из этих переменных как функцию остальных

$$F(x, y) = 0. \quad (54.1)$$

Можно дать умозрительное определение: функция

$$y = f(x) \quad (54.2)$$

называется *неявной* , если она задана при помощи уравнения (54.1), неразрешенного относительно y . Но мы попробуем сделать это более строго на примере функции малого количества переменных.

Определение 54.1. Если функция двух переменных $F(x, y)$ задана на некотором подмножестве A плоскости, и существует такая функция одной переменной (54.2), определенная на множестве B числовой прямой x , содержащемся в проекции множества A на ось x , что для всех $x \in B$ имеет место включение $(x, f(x)) \in A$, и справедливо тождество $F(x, f(x)) = 0$, то f называется *неявной функцией* , определяемой уравнением (54.1).

Теорема 54.1. Пусть функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой прямоугольной окрестности

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y): |x_0 - x| < \xi, |y_0 - y| < \eta\} \quad (54.3)$$

точки (x_0, y_0) и при каждом фиксированном $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ строго монотонна по y на интервале $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$.

Тогда, если

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad (54.4)$$

то существуют окрестности $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 и $U(y_0)$

$= (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ точки y_0 такие, что для каждого $x \in U(x_0)$ имеется

и притом единственное решение $y \in U(y_0)$ уравнения (54.1). Это решение, являющееся функцией от x и обозначаемое формулой (54.2), непрерывно и проходит через точку (x_0, y_0) :

$$f(x_0) = y_0. \quad (54.5)$$

Теорема, в частности, утверждает, что при сделанных предположениях неявная функция (54.2), определяемая уравнением (54.1), существует и обладает тем свойством, что при условиях $x \in U(x_0), y \in U(y_0)$ равенства (54.1) и (54.2) равносильны.

Доказательство. Пусть для определенности функция $F(x, y)$ строго возрастает по y на интервале $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ при каждом фиксированном $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$, в частности, строго возрастает функция $F(x_0, y)$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ из интервала $(0, \eta)$. Поскольку $F(x_0, y_0) = 0$, то

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0 \quad (54.6)$$

при любом y из отрезка $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.

Поскольку функция $F(x, y)$ непрерывна на множестве $U(x_0, y_0)$ и $(x_0, y_0 - \varepsilon) \in U(x_0, y_0), (x_0, y_0 + \varepsilon) \in U(x_0, y_0)$, поэтому существует такое δ из интервала $(0, \xi)$, что в δ -окрестности точки $(x_0, y_0 - \varepsilon)$ выполняется неравенство $F(x, y) < 0$, а в δ -окрестности точки $(x_0, y_0 + \varepsilon)$ — неравенство $F(x, y) > 0$. В частности, при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ будут справедливы неравенства

$$F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, F(x, y_0 + \varepsilon) > 0. \quad (54.7)$$

Положим, далее, по определению

$$U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), U(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon). \quad (54.8)$$

Поскольку при фиксированном $x \in U(x_0)$ функция $F(x, y)$ переменной y непрерывна на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, то из условия (54.7), по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции, следует, что существует такое $y^* \in U(y_0)$, что $F(x, y^*) = 0$. В силу строгой монотонности функции $F(x, y)$ на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ по переменной y , указанное y^* единственно.

Таким образом, получено однозначное соответствие (однозначная функция) $x \rightarrow y^*, x \in U(x_0), y^* \in U(y_0)$, которое будем обозначать через $f: y^* = f(x)$.

Тогда для любого $x \in U(x_0)$ и $y^* = f(x)$ имеем:

$$F(x, y^*) = 0, y^* \in U(y_0), \quad (54.9)$$

причем точка y^* , обладающая этим свойством, единственна. Таким образом, существование и единственность искомой функции f доказаны.

По условию $F(x_0, y_0) = 0$, поэтому, в силу единственности функции f , имеем $f(x_0) = y_0$.

Заметим, что $\varepsilon > 0$ было зафиксировано произвольно при условии, что оно из интервала $(0, \eta)$ и что для него было найдено такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x_0 - x| < \delta$ вытекало включение $f(x) \in U(y_0)$, т.е. неравенство $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$, что и означает непрерывность функции f в точке x_0 . Теорема доказана.

Весьма удобные для приложений достаточные условия однозначной разрешимости уравнения (54.1) в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , для которой $F(x_0, y_0) = 0$, даются следующей теоремой.

Теорема 54.2. Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и имеет в этой окрестности частную производную $F_y(x, y)$, которая непрерывна в точке (x_0, y_0) .

Тогда, если

$$F(x_0, y_0) = 0, F_y(x_0, y_0) \neq 0, \quad (54.10)$$

то найдутся такие окрестности $U(x_0)$, $U(y_0)$, соответственно, точек x_0 и y_0 , что для каждого $x \in U(x_0)$ существует, и притом единственное, решение $y = f(x) \in U(y_0)$ уравнения (54.1). Это решение непрерывно всюду в окрестности $U(x_0)$ и $f(x_0) = y_0$.

Если дополнительно предположить, что функция F имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) частную производную $F_x(x, y)$, непрерывную в точке (x_0, y_0) , то функция $f(x)$ также имеет в точке x_0 производную, и для нее справедлива формула:

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \quad (54.11)$$

Доказательство. В силу условий теоремы существует прямоугольная окрестность

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y): |x_0 - x| < \xi, |y_0 - y| < \eta\} \quad (54.12)$$

точки (x_0, y_0) , в которой сама функция $F(x, y)$ непрерывна, а значения частной производной $F_y(x, y)$ имеют тот же знак, что и ее зна-

чение в точке (x_0, y_0) . Поэтому при каждом фиксированном $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ функция

$$\varphi(y) = F(x, y) \quad (54.13)$$

дифференцируема на интервале $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$, а ее производная $\varphi'(y) = F_y(x, y)$ сохраняет постоянный знак. Следовательно, функция $\varphi(y)$ строго монотонна на указанном интервале.

Таким образом, все условия предыдущей теоремы для функции $F(x, y)$ в построенной прямоугольной окрестности $U(x_0, y_0)$ выполнены. Поэтому существуют окрестности $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $U(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ и единственная функция (54.2), определенная в окрестности $U(x_0)$, такие, что при каждом $x \in U(x_0)$ имеют место включение $f(x) \in U(y_0)$ и равенство $F(x, f(x)) = 0$, причем функция f непрерывна в точке x_0 .

Поскольку для любой точки (x, y) , для которой $x \in U(x_0)$, $y \in U(y_0)$, существует ее прямоугольная окрестность $U(x, y)$, содержащаяся в следующей прямоугольной окрестности:

$$U_0(x_0, y_0) = \{(x, y): |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \varepsilon\}, \quad (54.14)$$

то для окрестности $U(x, y)$ также выполняются все условия предыдущей теоремы. Поэтому в силу единственности решения $f(x)$ уравнения (54.1) в окрестности $U_0(x_0, y_0)$ функция (54.2) непрерывна в каждой точке $x \in U(x_0)$.

Далее, в силу непрерывности частных производных F_x и F_y в точке (x_0, y_0) функция F дифференцируема в этой точке:

$$\begin{aligned} F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = \\ = F_x(x_0, y_0)\Delta x + F_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \end{aligned} \quad (54.15)$$

где

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0, \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \quad (54.16)$$

Возьмем в формуле (54.15) следующие значения приращения:

$$x_0 + \Delta x \in U(x_0), \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (54.17)$$

Тогда, поскольку $F(x, f(x)) = 0$, получим:

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = F(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) = 0, \quad (54.18)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} & \frac{\partial u_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1} & \frac{\partial u_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1} & \frac{\partial u_m}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial t_n} \end{pmatrix} \quad (54.23)$$

или, короче,

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial t_j} \right), \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n, \quad (54.24)$$

называется *матрицей Якоби* данной системы функций.

Если $m = n$, то определитель матрицы Якоби называется *определителем Якоби*, или *якобианом*, системы функций $u_1, \dots, u_n$ по переменным $t_1, \dots, t_n$ и обозначается следующим образом:

$$\frac{\partial(u_1, \dots, u_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)}. \quad (54.25)$$

Теорема 54.3. Если функции $F_i(x, y) = 0, i = 1, \dots, n$, непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ и

$$F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \Big|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0, \quad (54.26)$$

то существуют такие окрестности U_x и U_y точек $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ и $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$, соответственно, в пространствах R^m и R^n , что система уравнений (54.22) однозначно разрешима в окрестности (прямом произведении окрестностей) $U_x \times U_y$ точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ относительно переменных $y_1, \dots, y_n$. Иначе говоря, для любого $x \in U_x$ существует, и притом единственное, значение $y \in U_y$ такое, что

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (54.27)$$

Если

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_m), \end{cases} \quad x \in U_x, \quad (54.28)$$

— указанное решение, то все функции f_i , $i = 1, \dots, n$, непрерывно дифференцируемы на U_x и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$.

Задача из исторического прошлого.

У мастера два слитка золота. Каждый из них весит столько золотников, сколько единиц в пробе другого слитка (причем пробы выражаются целыми числами). Сплавивши эти два слитка, получается золото 70°. Если же от первого из них отрубить столько лотов, сколько единиц в большем корне уравнения:

$$x^2 - 5x - x\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0,$$

а от второго —

$$\sqrt[3]{42875}$$

золотников, и отрубленные куски сплавить, то получится золото 76,2°. Мастер нашел для себя более удобным составить сплав 72°.

Сколько он взял от каждого слитка, если по расчету, при погружении в воду, составленный им сплав теряет $3^{17}/_{76}$ золот., и если известно, что лигатурой золота было серебро? Удельный вес золота 19, а серебра 10.

Ответ. По 25 золот.

55. Функциональные определители.

Условия независимости системы функций

Данный раздел является фактическим следствием предыдущего, а именно: теоремы о необходимых или достаточных условиях независимости системы функций прямым образом опираются на теорему о неявной функции.

Определение 55.1. Пусть на открытом множестве $G \subseteq R^n$ заданы непрерывно дифференцируемые функции

$$y_i = \varphi_i(x), \quad i = 1, \dots, m, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in G. \quad (55.1)$$

Если существует открытое множество D в пространстве $R^{m-1}\{y_1, \dots, y_{m-1}\}$ и непрерывно дифференцируемая на D функция $\Phi(y_1, \dots, y_{m-1})$ такие, что в любой точке $x \in G$ выполняются условия

$$(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)) \in D, \quad \Phi(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)) = \varphi_m(x), \quad (55.2)$$

то функция $\varphi_m(x)$ называется *зависимой на множестве G от функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$* .

Определение 55.2. Если среди функций системы (55.1) есть функция, зависимая от остальных на множестве G , то эта система называется *зависимой на множестве G* .

Если ни одна функция системы (55.1) не зависит от остальных на множестве G , то эта система называется *независимой на множестве G* .

В вопросе зависимости системы функций (55.1) фундаментальную роль играет матрица Якоби этой системы:

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right), \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n, \quad (55.3)$$

здесь i — номер строчки, j — номер столбца.

Теорема 55.1 (необходимое условие зависимости функций). Пусть $n \geq m$ и система функций (55.1) зависима на открытом множестве G . Тогда в любой точке этого множества ранг матрицы Якоби (55.3) этой системы меньше m .

Доказательство. По условию, по крайней мере, одна из функций системы (55.1) зависит от остальных. Пусть для определенности φ_o зависит от $\varphi_1, \dots, \varphi_{o-1}$:

$$\varphi_o(x) = \Phi(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{o-1}(x)), \quad x \in G, \quad (55.4)$$

где Φ — непрерывно дифференцируемая функция от $y_1, \dots, y_{m-1}$. Отсюда

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad (55.5)$$

для всех $j = 1, \dots, n$.

Последняя формула показывает, что m -я строка матрицы Якоби (55.3) в каждой точке $x \in G$ является линейной комбинацией

цией остальных строк этой матрицы, и поэтому ранг матрицы Якоби (55.3) меньше m в каждой точке $x \in G$. Теорема доказана.

В частности, если $m = n$ и система функций (55.1) зависима на множестве G , тогда ее якобиан $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$, $i, j = 1, \dots, n$, равен нулю на всем множестве G .

Следствие (достаточные условия независимости функций). Пусть $n \geq m$ и ранг матрицы Якоби (55.3) хоть в одной точке открытого множества G равен m . Тогда система функций (55.1) независима на множестве G .

Другими словами, если система функций (55.1) зависима в области G , то градиенты $\nabla \varphi_1, \dots, \nabla \varphi_m$ ($\text{grad} \equiv \nabla$) этих функций линейно зависимы в каждой точке G .

Теорема 55.2 (достаточные условия зависимости функций). Пусть ранг матрицы Якоби (55.3) системы функций (55.1) в каждой точке открытого множества G не превышает числа r , $r < m \leq n$, а в некоторой точке $x_0 \in G$ равен r , иначе говоря, существуют такие переменные $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ и функции $y_{j_1} = \varphi_{j_1}(x), \dots, y_{j_r} = \varphi_{j_r}(x)$, что

$$\frac{\partial(y_{j_1}, \dots, y_{j_r})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_r})} \Big|_{x^{(0)}} \neq 0. \quad (55.6)$$

Тогда все r функций, входящих в условие (55.6), независимы на множестве G , и существует окрестность точки $x^{(0)}$ такая, что любая из оставшихся $(m - r)$ функций зависит в этой окрестности от указанных r функций.

Доказательство. Пусть, без ограничения общности, условие (55.6) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)} \Big|_{x^{(0)}} \neq 0 \quad (55.7)$$

(этого всегда можно добиться, перенумеровав объекты в нужном порядке). Согласно следствию из предыдущей теоремы, функции $y_1, \dots, y_r$ независимы в области G .

Прежде всего выберем такое η_0 , чтобы всякая точка $x = (x_1, \dots, x_n)$, принадлежащая η_0 -кубической окрестности точки $x^{(0)}$, для которой $|x_i - x_i^{(0)}| < \eta_0$, $i = 1, \dots, n$, принадлежала множеству G : $x \in G$. Это всегда можно сделать в силу его открытости.

Теперь в силу условия (55.7) и теоремы о неявных функциях система функций (55.8) разрешима относительно переменных $x_1, \dots, x_r$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$:

При этом функции $f_1, \dots, f_r$ определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

Другими словами, это означает следующее: можно выбрать такие числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$, причем взять для удобства их меньшими $\eta_0: \delta < \eta_0, \eta < \eta_0$, что если через U обозначить кубическую окрестность точки $(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, задаваемую неравенствами:

то справедливы следующие утверждения:

1) на окрестности U функции f_k , $k=1,\dots,r$ определены и непрерывно дифференцируемы;

2) для всех точек $(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n) \in U$ справедливы неравенства

3) на окрестности U выполняются равенства

301

где под f_k , $k=1, \dots, r$ понимаются правые части равенств (55.9).

Рассмотрим композицию функций (55.9) и $\varphi_{r+1}(x_1, \dots, x_n)$, т.е. функцию

$$y_{r+1} = \varphi_{r+1}(f_1, \dots, f_r, x_{r+1}, \dots, x_n), \quad (55.13)$$

где $f_k = f_k(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$, $k=1, \dots, r$. Эта сложная функция заведомо непрерывно дифференцируема на указанной выше кубической окрестности U точки

$$(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}). \quad (55.14)$$

Покажем, что на самом деле функция (55.13) в этой окрестности U не зависит от переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$. Для этого достаточно показать, что для функции (55.13) на окрестности U выполняется равенство

$$\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} = 0, \quad j = r+1, \dots, n. \quad (55.15)$$

Для доказательства равенства (55.15) зафиксируем одно из допустимых j и координаты x_k с индексами k , принимающими значения $r+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$, обозначив их через x_k^* , причем выберем x_k^* так, чтобы $|x_k^* - x_k^{(0)}| < \delta$, $k = r+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$.

Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1, \\ &\dots\dots\dots \\ y_r &= y_r, \\ y_{r+1} &= \varphi_{r+1}(f_1^*, \dots, f_r^*, x_{r+1}^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*), \end{aligned} \quad (55.16)$$

где $f_k^* = f_k(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*)$, кубической окрестности $U^{(j)}$ точки $(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, x_j^{(0)})$, задаваемой неравенствами

$$|y_k - y_k^{(0)}| < \delta, \quad k = 1, \dots, r, \quad |x_j - x_j^{(0)}| < \delta. \quad (55.17)$$

Чтобы подчеркнуть, какие именно переменные меняются, изобразим отображение (55.16) в следующем виде:

$$(y_1, \dots, y_r, x_j) \rightarrow (y_1, \dots, y_r, y_{r+1}). \quad (55.18)$$

Это отображение непрерывно дифференцируемо в окрестности $U^{(j)}$, и его матрица Якоби, очевидно, имеет вид

руемо в соответствующей окрестности точки $(x_1^{(0)}, \dots, x_r^{(0)}, x_j^{(0)})$. Поэтому из (55.20) и из свойств якобианов (см. также главу 1) имеем:

$$\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_r, y_{r+1})}{\partial(y_1, \dots, y_r, x_j)} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_r, y_{r+1})}{\partial(x_1, \dots, x_r, x_j)} \frac{\partial(x_1, \dots, x_r, x_j)}{\partial(y_1, \dots, y_r, x_j)}. \quad (55.25)$$

По условию, ранг матрицы Якоби на множестве G меньше или равен r , поэтому

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_r, y_{r+1})}{\partial(x_1, \dots, x_r, x_j)} = 0 \quad (55.26)$$

всюду на G . Тогда из (55.25) следует, что для любой точки $(y_1, \dots, y_r, x_j) \in U^{(j)}$ и, следовательно, для любой точки

$$(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*) \in U \quad (55.27)$$

справедливо равенство (55.15). Поскольку координаты x_k^* были фиксированы произвольным соответствующим образом, то равенство (55.15) справедливо на всей окрестности U .

Итак, функция (55.13) зависит только от переменных $y_1, \dots, y_r$. Обозначив ее символом Φ , получим:

$$\varphi_{r+1}(f_1, \dots, f_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = \Phi(y_1, \dots, y_r). \quad (55.28)$$

Далее, очевидно: выберем теперь так величины $\delta_0, \delta_0 < \delta, \delta_0 < \eta$, чтобы при $|x_i - x_i^{(0)}| < \delta_0, i = 1, \dots, n$, выполнялись бы неравенства

$$|y_j - y_j^{(0)}| < \delta, j = 1, \dots, r \quad (55.29)$$

(это возможно в силу непрерывности функций системы (55.8) в точке $x^{(0)}$).

Итак, для любой точки x δ_0 -кубической окрестности точки $x^{(0)}$, такой, что

$$|x_i - x_i^{(0)}| < \delta_0, i = 1, \dots, n, \quad (55.30)$$

будет справедливо тождество

$$\varphi_{r+1}(x) = \Phi(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)), \quad (55.31)$$

т.е. в указанной окрестности точки $x^{(0)}$ функции $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}$ зависимости.

Аналогично доказывается и зависимость каждой из функций $\varphi_{r+2}, \dots, \varphi_m$ от $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Теорема доказана.

Заметим, что достаточные условия зависимости функций имеют локальный характер.

Задача из исторического прошлого.

Расстояние 72 мили два путешественника проехали в разное время. Первый употребил в дорогу менее дней на столько, сколько единиц в положительном корне уравнения:

$$\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 7} = 2,$$

так как он проезжал ежедневно более миль, чем второй на число, равное положительному значению выражения:

$$\frac{5b^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{3}{4}}} : \frac{2a^{1.5}b^{\frac{1}{6}}}{(a+b)^{1.25}},$$

когда в нем сделаем $a=5, b=4$.

Определить, сколько дней был в дороге каждый путешественник.

Ответ. 8 дн., 12 дн.

56. Экстремумы функций нескольких переменных.

Необходимые условия экстремума.

Достаточные условия экстремума

По аналогии с функциями одной переменной в данном разделе рассмотрим условия существования точек экстремума для числовых функций многих переменных.

Определение 56.1. Пусть числовая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена в некоторой области D пространства R^n , и $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ — внутренняя точка данной области.

Говорят, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет локальный максимум (локальный минимум) в точке x^0 , если существует такая δ -окрестность $B_\delta(x^0)$ точки x^0 , что для любой точки $x \in B_\delta(x^0)$ выполнены следующие неравенства:

$$f(x) \leq f(x^0) \quad (f(x) \geq f(x^0)). \quad (56.1)$$

Если в условиях (56.1) вместо нестрогих неравенств выполнены неравенства строгие, то точка x^0 называется *точкой строгого локального максимума (минимума)* функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Точки локального максимума или минимума данной функции называют также точками *экстремума* данной функции.

Теорема 56.1. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет экстремум в точке $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Если в точке x^0 функция $f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема, то все ее частные производные $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$, $k = 1, \dots, n$ равны нулю.

Доказательство. Предположим, что в некоторой шаровой δ -окрестности $B_\delta(x^0)$ точки x^0 выполнены, для определенности, следующие неравенства:

$$f(x) \leq f(x^0). \quad (56.2)$$

Покажем, что для любого ненулевого вектора u выполнено равенство

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial u} = 0. \quad (56.3)$$

Действительно, если ввести обозначение $F(t) = f(x^0 + tu)$, и при любых достаточно малых t вектор $x^0 + tu$ лежит в окрестности $B_\delta(x^0)$, то при таких t выполнено неравенство $F(t) \leq F(0)$.

Тогда, по условиям теоремы, корректно определено равенство $F'(t) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial u}$. Но тогда, в силу необходимого условия существования локального экстремума у дифференцируемой функции одного переменного, справедливо равенство (56.3), откуда, в частности, следует утверждение теоремы.

Как и в случае функции одного переменного, условия только что доказанной теоремы не являются достаточными, каковыми, в частности, являются условия теоремы следующей.

Теорема 56.2. Пусть числовая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена в некоторой области D пространства R^n , и $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ — внутренняя точка данной области. Допустим, что около точки x^0 существует такой шар $B_\delta(x^0)$ диаметра δ , что функция $f(x_1, \dots, x_n)$

непрерывно дифференцируема в нем и, кроме того, дважды дифференцируема в точке x^0 .

Предположим также, что $df(x^0) = 0$.

Если второй дифференциал, то есть квадратичная форма

$$d^2 f(x^0)(h, h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x^0) h_i h_j \quad (56.4)$$

— положительно (отрицательно) определена, то в точке x^0 у функции $f(x_1, \dots, x_n)$ будет локальный минимум (локальный максимум).

Доказательство. В силу условий теоремы видно, что применима формула Тейлора (с остаточным членом в форме Лагранжа) в шаровой окрестности $B_\delta(x^0)$:

$$\begin{aligned} f(x^0 + h) &= f(x^0) + \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x^0) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x^0) h_i h_j + o(\|h\|_n^2), \end{aligned} \quad (56.5)$$

при этом, как нетрудно догадаться, остаток удовлетворяет уравнению

$$r_2(x^0, h) = \frac{1}{6} \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^3 f(x^0 + \theta h) = o(\|h\|_n^2). \quad (56.6)$$

Поскольку $df(x^0) = 0$, то для любого $x^0 + h \in B_\delta(x^0)$ справедливо более простое равенство:

$$f(x^0 + h) - f(x^0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x^0) h_i h_j + o(\|h\|_n^2) \quad (h \rightarrow 0). \quad (56.7)$$

Поскольку (примем для определенности) форма

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x^0) h_i h_j$$

— положительно определена, тогда (см. главу 1) существует постоянная $c > 0$, такая, что

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x^0) h_i h_j \geq c \cdot \|h\|_n^2 \quad (56.8)$$

(это можно показать, приводя исследуемую положительно определенную форму к сумме квадратов с весовыми положительными

ми коэффициентами, а затем в качестве числа c выбирается минимальное число из n таких коэффициентов).

Но тогда для любого $x \in B_\delta(x^0)$ имеем оценку

$$f(x) - f(x^0) \geq \frac{1}{2}(c + o(1)) \|x - x^0\|_n^2 \quad (x \rightarrow x^0). \quad (56.9)$$

Далее очевидно. По определению функции $o(1)$ ($x \rightarrow x^0$) существует такое $\delta_1 > 0$, что $c + o(1) \geq \frac{c}{2} > 0$ для любого $x \in B_{\delta_1}(x^0) \subset B_\delta(x^0)$, и тогда

$$f(x) - f(x^0) \geq \frac{c}{4} \|x - x^0\|_n^2 > 0 \quad (56.10)$$

для любого $x \in B_{\delta_1}(x^0)$.

Таким образом, теорема доказана, поскольку точка x^0 есть точка (оказалось даже строгого) локального минимума функции $f(x)$.

В случае отрицательной определенности формы $\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x^0) h_i h_j$ доказательство проводится аналогично.

Задача из исторического прошлого.

Некто проехал поездом железной дороги столько же верст, сколько и пароходом, а именно, число верст, равное выражению:

$$\frac{2a^{1/2}}{a^{1/2}b^{1/2} - b} : \frac{b^{3/2}}{a - a^{1/2}b^{1/2}},$$

когда в нем, после упрощения, подставить $a = 25$; $b = 1/2$. Поездом железной дороги они проехали все это расстояние скорее, чем пароходом, на число часов, удовлетворяющее уравнению:

$$\sqrt{5x+1} = \sqrt{x+1} + 2,$$

так как часовая скорость парохода была на 15 верст менее часовой скорости поезда железной дороги.

Сколько верст в час проходил пароход, а сколько поезд железной дороги?

Ответ. 25 вер.; 40 вер.

Таким образом, в некоторой окрестности точки x^0 для любой точки x , принадлежащей этой окрестности и многообразию Ω_1 , справедливо неравенство

$$f(x) \leq f(x^0). \quad (57.3)$$

Аналогично определяются точки условного локального минимума.

Определение 57.3. Точка x^0 функции $f(x)$ называется *особой* для функции $f(x)$, если

$$\text{grad } f(x^0) = 0, \quad (57.4)$$

и *неособой* в противном случае.

В случае выполнения теоремы о неявной функции для системы уравнений (57.2) естественным становится следующее

Определение 57.4. Многообразие Ω_1 называется *невырожденным*, если для любой точки $x \in \Omega_1$ набор векторов $\text{grad } \varphi_s(x)$, $s = 1, \dots, m$, составляет линейно независимую систему векторов в пространстве R^n .

Теорема 57.1 (необходимое условие условного экстремума). Для того чтобы точка x^0 была точкой условного экстремума функции $\varphi_0(x)$ на невырожденном многообразии Ω_1 , необходимо, чтобы вектор $\text{grad } \varphi_0(x^0)$ в точке x^0 выражался в виде линейной комбинации градиентов $\text{grad } \varphi_s(x^0)$, $s = 1, \dots, m$, в этой точке, то есть чтобы существовали числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in R$, не все равные нулю, такие, что

$$\text{grad } \varphi_0(x^0) = \lambda_1 \text{grad } \varphi_1(x^0) + \dots + \lambda_m \text{grad } \varphi_m(x^0). \quad (57.5)$$

Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ называются *множителями Лагранжа*, соответствующими точке локального условного экстремума $x^0 \in \Omega_1$.

Доказательство. От противного. Пусть $(m + 1)$ градиентов $\text{grad } \varphi_k(x^0)$, $k = 0, \dots, m$, рассматриваемых функций в точке x^0 линейно независимы, следовательно, ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)$, $j = 0, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$, равен $(m + 1)$. Поэтому для определенности будем считать, что он образован первыми $(m + 1)$ столбцами, т.е.

$$\left. \frac{\partial(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{m+1})} \right|_{x^0} \neq 0. \quad (57.6)$$

Зафиксируем остальные переменные $x_s = x_s^0$, $s = m+2, \dots, n$, и введем обозначение $x^* = (x_1, \dots, x_{m+1})$.

Очевидно, что функции $\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0)$, $j=0, \dots, m$, непрерывно дифференцируемы всюду в достаточно малой, соответствующей ее области определения, окрестности.

Рассмотрим отображение Φ , задаваемое следующими формулами:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_0(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0), \\ y_2 &= f_1(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0), \\ &\vdots \\ y_{m+1} &= f_m(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0). \end{aligned} \quad (57.7)$$

В силу (57.6) для точки $x^* = (x_1^0, \dots, x_{m+1}^0)$ имеем:

$$\left. \frac{\partial(y_1, \dots, y_{m+1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{m+1})} \right|_{x_0} = \left. \frac{\partial(\varphi_0, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{m+1})} \right|_{x_0} \neq 0. \quad (57.8)$$

Поэтому определено обратное к Φ отображение, и, следовательно, в любую точку соответствующей $(m + 1)$ -мерной окрестности отображается какая-то точка малой $(m + 1)$ -мерной окрестности точки x^0 .

В частности, поскольку при любом η , $0 < \eta < \varepsilon$, имеет место включение $(\varphi_0(x^0) \pm \eta, 0, \dots, 0) \in V$ (V — ε -окрестность точки $\varphi_0(x^0)$), то в δ -окрестности соответствующей точки найдутся точки $x^* = (x_1^*, \dots, x_{m+1}^*)$ и $x'' = (x_1'', \dots, x_{m+1}'')$, отображающиеся при отображении Φ в указанные точки окрестности V :

$$\Phi(x^{**}) = (\varphi_0(x^0) + \eta, 0, \dots, 0), \quad \Phi(x^{**}) = (\varphi_0(x^0) - \eta, 0, \dots, 0). \quad (57.9)$$

Если положим для краткости $x' = (x'_1, \dots, x'_{m+1}, x^0_{m+2}, \dots, x^0_n)$ и $x'' = (x''_1, \dots, x''_{m+1}, x^0_{m+2}, \dots, x^0_n)$, то в координатной записи (см. (57.7)) получим:

$$\varphi_0(x') = \varphi_0(x^0) + \eta > \varphi_0(x^0), \quad \varphi_k(x') = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (57.10)$$

И

$$\varphi_0(x^m) = \varphi_0(x^0) - \eta < \varphi_0(x^0), \quad \varphi_k(x^m) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (57.11)$$

что противоречит тому, что точка x^0 является точкой условного экстремума. Теорема доказана.

Следствие (метод множителей Лагранжа). Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — независимые вещественные переменные. Рассмотрим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda_1 \varphi_1(x) - \dots - \lambda_m \varphi_m(x), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m). \quad (57.12)$$

Для того чтобы (неособая) точка x^0 функции $f(x)$ была точкой условного экстремума на невырожденном многообразии Ω_1 , необходимо, чтобы при некотором $\lambda = \lambda^0$ выполнялось равенство

$$dL(x, \lambda)|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0} = 0, \quad (57.13)$$

то есть чтобы все частные производные функции $L(x, \lambda)$ по переменным $x_i, i = 1, \dots, n$, и $\lambda_j, j = 1, \dots, m$, обращались в нуль.

Задача из исторического прошлого.

В двух комнатах стоят стулья. Если из первой комнаты переставить во вторую столько стульев, сколько в последней находилось, то в первой комнате станет их меньше, чем во второй, во столько раз, сколько единиц в выражении:

$$\frac{3 + \sqrt{-1}}{2 - \sqrt{-1}} : \frac{2}{5(1 - \sqrt{-1})}.$$

Если же из второй комнаты переставить в первую половину числа стульев, бывших первоначально во второй комнате, и еще столько, сколько единиц в корне уравнения:

$$\frac{x^{4/3} + a^{1/2}}{x^{4/3} - a^{1/2}} + \frac{a^{1/2} - x^{4/3}}{x^{4/3} + a^{1/2}} = \frac{8a^{1/2}\sqrt[3]{2}}{x^{8/3} - a},$$

то во второй комнате останется меньше, чем будет в первой, во столько раз, сколько составляет половина первоначального числа стульев в первой комнате.

Сколько стульев в каждой комнате?

Ответ. 14 и 10.

VI. Числовые и функциональные ряды

В данном разделе мы будем иметь дело с последовательностями и рядами (в основном) действительных чисел и функций. Для простоты изложения все объекты рассматриваются в евклидовых пространствах (см. главу 1), хотя основные факты, связанные со сходимостью, нетрудно объяснить и в более общей ситуации.

58. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Критерий Коши. Действия с рядами

Определение 58.1. Если $\{a_n\}$ — числовая последовательность, то *числовым рядом* называется формальная бесконечная сумма $S = a_1 + \dots + a_2 + a_3 + \dots$. Записывается это так: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Функцию $n \rightarrow a_n$ от натурального аргумента n называют *общим членом ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 58.2. Последовательность $S_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ называется *последовательностью частичных сумм ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а ее n -й член S_n называют n -й *частичной суммой ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 58.3. Если последовательность частичных сумм S_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на множестве всех действительных (комплексных) чисел сходится к некоторому числу S , т.е. существует

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S, \quad (58.1)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся* к S , а число S — *суммой* этого ряда.

Пишут: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Если же последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ не имеет предела, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *расходящимся*.

Определение 58.4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к числу S , то последовательность $r_n = S - S_n$ называется *последовательностью остатков ряда*.

Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$.

Теорема 58.1. Отбрасывание любого конечного числа членов в бесконечной сумме или добавление к ней конечного числа новых членов не влияет на сходимость ряда.

Доказательство. Измененный в смысле условий теоремы общий член ряда обозначим через a'_n , а соответствующие частичные суммы — через $S'_n = a'_1 + \dots + a'_n = \sum_{k=1}^n a'_k$. Поскольку общий член ряда изменился на конечное число членов, при достаточно большом n справедливо равенство:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S - S_n) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S' - S'_n),$$

при этом такое число S' существует, что и требовалось.

Теорема 58.2 (необходимый признак сходимости ряда).

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Доказательство будет приведено после следующей более общей теоремы.

Теорема 58.3 (критерий Коши). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и

только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что $\forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall n > n_0$ для последовательности частичных сумм

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ выполнено неравенство:

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{m=n+1}^{n+p} a_m \right| < \varepsilon. \quad (58.2)$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ в качестве ключевой последовательности. В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности последняя сходится ($\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$) тогда и только тогда, когда выполнено условие (58.2) теоремы. Но это и означает сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Теорема доказана.

Теперь, если в формуле (58.2) выбрать $p = 1$, то получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > n_0$ выполнено неравенство:

$$|a_n| < \varepsilon, \quad (58.3)$$

что означает, что общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ стремится к нулю, что и доказывает теорему 58.2.

Заметим, что условия теоремы 58.2 не являются достаточными.

Следующая теорема верна, поскольку она формулирует отрицание условий только что доказанного критерия Коши. По причине ее значимости мы ее и выделили отдельно.

Теорема 58.4. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\forall n_0 \geq 1 \exists n > n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ такие, что:

$$\left| \sum_{m=n+1}^{n+p} a_m \right| \geq \varepsilon_0. \quad (58.4)$$

Рассмотрим два (вообще говоря, комплексных) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Справедливы следующие утверждения.

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к своей сумме s , и $c \in \mathbb{C}$, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, и его сумма равна cs .

2) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к своим суммам s , и s' , соответственно, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, и его сумма равна $s + s'$.

Оба утверждения следуют из теорем о пределе суммы двух числовых последовательностей и пределе последовательности, умноженной на число (в данном случае речь идет о последовательностях частичных сумм для каждого из рядов).

Задача из исторического прошлого.

При делении двух чисел одного на другое ученик нашел, что в частном получается на 7 единиц менее делителя, а в остатке — корень уравнения:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 9} = 10.$$

Но если бы то же делимое разделить не на делитель, а на полученное частное, то деление совершилось бы без остатка, а новое частное превосходило бы удвоенное прежнее на численное значение выражения:

$$\frac{a^{1/2} + b^{1/2}}{(a - 3b)^{3/5}} : \frac{b^{-2/3}(a - 3b)^{-2/5}}{a^{1/2} - b^{1/2}},$$

когда в нем, после упрощения, сделать $a = 4$, $b = 1$.

Определить делимые учеником числа.

Ответ. 65 и 120.

59. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости. Неравенства Гельдера и Минковского

Данный раздел посвящен исследованию сходимости рядов с неотрицательными членами. Этот материал выделен отдельно, поскольку имеется достаточно большое множество признаков сходимости, присущих только таким рядам.

Определение 59.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *рядом с неотрицательными членами*, если $a_n \geq 0 \quad \forall n \in N$.

Теорема 59.1. Ряд с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Доказательство. Рассмотрим последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ для данного ряда с неотрицательными членами, которая является монотонно неубывающей. Поэтому, в силу теоремы о сходимости неубывающих последовательностей, ограниченных сверху (см. также теорему 23.1), последовательность частичных сумм сходится, что и означает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Обратно, если неубывающая последовательность (в данном случае частичных сумм ряда) сходится (по причине сходимости ряда), то она ограничена сверху. Теорема доказана.

Теорема 59.2 (признак сравнения). 1) Если начиная с некоторого номера $n_0 \forall n \geq n_0$ выполнено неравенство

$$|b_n| \leq a_n, \quad (59.1)$$

то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2) Если при $\forall n \geq n_0$ выполнено двойное неравенство

$$0 \leq b_n \leq a_n, \quad (59.2)$$

то из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. Согласно критерию Коши, для данного $\varepsilon > 0$ существует $n \geq n_0$, такое, что при $m \geq n \geq n_0$ имеем:

$$\sum_{k=n}^m b_k \leq \varepsilon. \quad (59.3)$$

Значит,

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n}^m |a_k| \leq \sum_{k=n}^m b_k \leq \varepsilon, \quad (59.4)$$

т.е. свойство 1) доказано.

Далее, свойство 2) следует из 1), так как (от противного) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ должен сходиться (противоречие). Теорема доказана.

Прежде чем формулировать следующую теорему, заметим, что она верна для любых числовых последовательностей, только для последовательностей с неотрицательными членами она формулируется особенно просто.

Для начала напомним определение верхнего и нижнего пределов последовательности.

Любая числовая последовательность (изображенная на прямой точками) имеет предельные точки на этой прямой (в том числе, возможно, бесконечно удаленные). Действительно, если последовательность неограничена (уходит на бесконечность), то бесконечно удаленная точка является предельной точкой данной последовательности, поскольку в любой окрестности этой точки имеются точки самой последовательности. Если же данная последовательность ограничена, то ее можно полностью заключить в некоторый числовой отрезок, на котором всегда имеется хотя бы одна предельная точка данной последовательности (см. главу 2).

Объединение всех предельных точек данной числовой последовательности на прямой обозначим через E . Верхним (нижним) пределом данной последовательности называется верхняя (нижняя) грань множества E . Обозначение: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ($\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$).

Теорема 59.3 (признак Д'Аламбера). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

1) сходится, если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$;

2) расходится, если $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ при $n \geq n_0$, где n_0 — некоторое фиксированное число;

3) существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \quad (59.5)$$

Доказательство. Если условие 1) выполнено, то можно найти $\beta < 1$ и целое число n_0 , такие что

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \beta \quad (59.6)$$

при $n \geq n_0$. В частности

$$|a_{n_0+1}| < \beta |a_{n_0}|, |a_{n_0+2}| < \beta |a_{n_0+1}| < \beta^2 |a_{n_0}|, \dots, |a_{n_0+p}| < \beta^p |a_{n_0}|. \quad (59.7)$$

Это значит, что при $n \geq n_0$

$$|a_n| < |a_{n_0}| \beta^{-n_0} \cdot \beta^n. \quad (59.8)$$

Таким образом, свойство 1) следует из признака сравнения, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ сходится. Действительно, его частичные суммы, как суммы конечного числа членов неотрицательной геометрической прогрессии, равны $\beta \frac{1-\beta^n}{1-\beta}$, а $\beta < 1$.

Далее, если $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ при $n \geq n_0$, то легко видеть, что необходимое условие $a_n \rightarrow 0$ сходимости ряда не выполнено, откуда и следует свойство 2).

Чтобы доказать свойство 3), мы рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (59.9)$$

Для каждого из них имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

но первый ряд расходится, а второй — сходится (см. далее интегральный признак). Теорема полностью доказана.

Следствие. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, начиная с некоторого номера n_0 , выполняется неравенство $a_n > 0$. Тогда:

- 1) если $\forall n \geq n_0 \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, где $0 < q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
- 2) если же $\forall n \geq n_0 \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq g$ ($g > 1$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема 59.4 (признак Коши). Пусть задан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Поло-

жим

$$\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (59.10)$$

Тогда:

1) если $\alpha < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) если $\alpha > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

3) существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $\alpha = 1$.

Доказательство. Если $\alpha < 1$, то можно выбрать число β так, что $\alpha < \beta < 1$, а целое число N так, что $\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$ при $n \geq N$. Иначе говоря, при $n \geq N$ имеем следующее:

$$|a_n| < \beta^n. \quad (59.11)$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ сходится, так как $0 < \beta < 1$. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует теперь из признака сравнения.

Если $\alpha > 1$, то снова существует последовательность $\{n_k\}$, такая, что

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow \alpha. \quad (59.12)$$

Значит, $|a_n| > 1$ для бесконечного множества значений n , так что условие $a_n \rightarrow 0$, необходимое для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, не выполнено.

Чтобы доказать свойство 3), рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Для каждого из этих рядов $\alpha = 1$, но первый расходится, а второй сходится (см. далее интегральный признак).

Следствие. Если для членов неотрицательного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, начиная с некоторого номера n_0 , выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, $q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если же существует бесконечно много номеров n таких, что $\sqrt[n]{a_n} \geq g$, ($g \geq 1$), то этот ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема 59.5 (интегральный признак Коши–Маклорена). Пусть неотрицательная функция $f(x)$ определена на промежутке $[1, +\infty)$ и убывает на этом промежутке. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad (59.13)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx. \quad (59.14)$$

1) если $0 \leq a_n \leq f(n) \ \forall n \geq n_0$ и сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) если $a_n \geq f(n) \geq 0 \ \forall n \geq n_0$ и расходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. Сначала заметим, что, ввиду монотонности функции f на промежутке $[1, +\infty)$ она интегрируема по Риману на любом конечном отрезке $[1, \eta]$, и поэтому корректно исследовать сходимость данного несобственного интеграла.

Если $k \leq x \leq k+1$, то, в силу убывания функции f ,

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1), \quad k = 1, \dots, \quad (59.15)$$

поэтому, интегрируя по отрезку $[k, k+1]$, будем иметь:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1), \quad k = 1, \dots \quad (59.16)$$

Суммируя эти неравенства от $k=1$ до $k=n$, получим:

$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^n f(k+1), \quad (59.17)$$

и, обозначая

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k), \quad (59.18)$$

справедливы оценки

$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq S_{n+1} - f(1), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (59.19)$$

Если интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то при любом $n \in N$ выполнено неравенство

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx. \quad (59.20)$$

Отсюда следует, что

$$S_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)dx + f(1), \quad (59.21)$$

т.е. последовательность частичных сумм нашего ряда ограничена сверху, что означает сходимость самого ряда.

Обратно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится и его сумма равна S , то при всех $n \in N$ справедливо неравенство $S_n \leq S$, поэтому

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq S. \quad (59.22)$$

Если теперь выбрать $L \geq 1$, то при $n \geq L$ получим следующие оценки:

$$\int_1^L f(x)dx \leq \int_1^n f(x)dx \leq S. \quad (59.23)$$

Таким образом, совокупность всех интегралов $\int_1^L f(x)dx$, $L \geq 1$, ограничена сверху, поэтому интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Теорема доказана.

Далее, выведем в данном разделе две важных группы неравенств, а именно *неравенства Гельдера и Минковского* для конечных и бесконечных сумм.

Для начала покажем, что для любых действительных чисел $a \geq 0$, $b \geq 0$, $p > 0$ и числа q , определяемого из равенства

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (59.24)$$

справедливо неравенство

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (59.25)$$

Уравнение (59.24) эквивалентно

$$(p-1)(q-1)=1, \quad (59.26)$$

которое, в свою очередь, переходит в

$$q = \frac{p}{p-1}. \quad (59.27)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию двух переменных

$$F(x, y) = xy - \frac{x^p}{p} - \frac{y^q}{q}, \quad x \geq 0, y \geq 0, \quad (59.28)$$

частные производные которой вычисляются по формулам

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = y - x^{p-1}, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = x - y^{q-1}. \quad (59.29)$$

Очевидно, что следующие уравнения, описывающие некоторые кривые на плоскости

$$y = x^{p-1}, \quad (59.30)$$

$$x = y^{q-1}, \quad (59.31)$$

равносильны, поскольку выполнено равенство (59.26). Поэтому критические точки функции $F(x, y)$ лежат на кривой, задаваемой уравнением (59.30) (или (59.31)).

Согласно (59.29), для точек плоскости, лежащих выше кривой (59.30), справедливо неравенство $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} > 0$, а для точек плоскости, лежащих ниже кривой (59.30), — неравенство $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} > 0$, по-

скольку равенства (59.30) и (59.31) эквивалентны. Поэтому функция $F(x, y)$ вдоль любого отрезка, параллельного оси x и лежащего выше кривой (59.30), а также вдоль любого отрезка, параллельного оси y и лежащего ниже кривой (59.30), строго возрастает, т.е.

$$F(x, y) < F(x, x^{p-1}) = 0. \quad (59.32)$$

Таким образом, в первом квадранте плоскости вместе с координатными лучами, являющимися границами первого квадранта, вне кривой всегда справедливо строгое неравенство $F(x, y) < 0$.

Тогда, используя явный вид функции F , если $a \geq 0, b \geq 0$, то

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ при } b \neq a^{p-1}, \quad ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ при } b = a^{p-1}, \quad (59.33)$$

что и доказывает неравенство (59.25).

Перейдем теперь к выводу *неравенств Гельдера и Минковского*. Рассмотрим следующие наборы чисел: $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$, $p > 1$, а число q определяется равенством (59.24).

Тогда справедливы следующие неравенства (соответственно, Гельдера и Минковского)

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} \quad (59.Г)$$

и

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}. \quad (59.М)$$

Действительно, введем обозначения

$$x^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad y^{(q)} = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}. \quad (59.34)$$

Используя неравенство (59.25) применительно к величинам

$$a = \frac{|x_i|}{x^{(p)}}, \quad b = \frac{|y_i|}{y^{(q)}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (59.35)$$

выполнено следующее:

$$\frac{|x_i|}{x^{(p)}} \frac{|y_i|}{y^{(q)}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{x^{(p)p}} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{y^{(q)q}}. \quad (59.36)$$

Теперь просуммируем эти неравенства по i от 1 до n , пользуясь (59.34):

$$\frac{1}{x^{(p)} y^{(q)}} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \frac{1}{p x^{(p)p}} \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q y^{(q)q}} \sum_{i=1}^n |y_i|^q \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (59.37)$$

что и доказывает неравенство Гельдера (59.Г).

Неравенство Минковского (59.М) теперь следует из неравенства Гельдера, а именно из следующего соотношения:

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^{p-1} |x_i + y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|^{p-1} |x_i + y_i|. \quad (59.38)$$

Применим к обоим слагаемым в правой части неравенство (59.Г):

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} + \\ + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (59.39)$$

При сокращении обеих частей последнего неравенства на $\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}$, которое, вообще говоря, не равно нулю (если это так, то неравенство Минковского очевидно), получим неравенство (59.М).

Задача из исторического прошлого.

Два путешественника выехали одновременно из города *A* по направлению к городу *B*, отстоящему от *A* на расстоянии

$$141 - \sqrt[6]{85766121}$$

верст. Первый путешественник обогнал второго и, доехав в течение:

$$\left[\frac{(a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}})(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}})}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{ab} \right] \cdot \frac{2\sqrt{2,5}(a+b)^{-1}}{\sqrt[3]{10}}$$

часов до станции *D*, сейчас же вернулся и спустя 2 часа встретил второго путешественника в *C*. Из *C* они продолжали путешествие, увеличив часовую скорость — первый на 3 версты, а второй на 2 версты, и доехали до городов, соответственно, *A* и *B* в одно и то же время.

Определить скорость путешественников.

Ответ. 9 вер. и 6 вер. в час.

60. Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами.

Абсолютная и условная сходимости.

Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов

В этом разделе рассматриваются ряды с действительными членами, знаки которых, вообще говоря, изменяются при изменении номера. Такие ряды называются *знакопеременными*.

Определение 60.1. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *знакопеременным*, если любые два его соседних члена имеют разные знаки.

Теорема 60.1 (Лейбница). Знакопередающийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \quad (60.1)$$

модуль общего члена $|u_n|$ которого монотонно стремится к нулю, сходится. При этом частичная сумма S_n ряда (60.1) отличается от самой его суммы S на величину, меньшую следующего его члена u_{n+1} .

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы четного порядка данного ряда:

$$S_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} u_n. \quad (60.2)$$

В силу монотонности модуля общего члена ряда справедливо неравенство $S_{2k} \leq S_{2k+1}$, т.е. последовательность частичных сумм четного порядка ряда (60.1) возрастает.

Запишем частичные суммы в следующем виде:

$$S_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) + u_{2k}. \quad (60.3)$$

Тогда, поскольку выражения в круглых скобках неотрицательны (из-за монотонности модуля общего члена), а $u_{2k} > 0$, то $S_{2k} < u_1$, т.е. последовательность четных частичных сумм ограничена сверху, что означает ее сходимость, так как она не убывает:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S. \quad (60.4)$$

Теперь покажем, что и частичные суммы нечетного порядка ряда (60.1) стремятся к тому же пределу. Поскольку

$$S_{2k+1} = S_{2k} + u_{2k+1}, \quad (60.5)$$

и так как модуль общего члена $|u_n|$ монотонно стремится к нулю, то в силу (60.4) имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = S, \quad (60.6)$$

что и доказывает сходимость ряда (60.1).

Заметим теперь, что для ряда (60.1) справедливо следующее двойное неравенство:

$$S_{2k} \leq S \leq S_{2k-1}. \quad (60.7)$$

Действительно, во-первых, выше было доказано, что S является пределом возрастающей последовательности $\{S_{2k}\}$, поэтому $S_{2k} \leq S$. Во вторых,

$$S_{2k+1} = S_{2k} - (u_{2k} - u_{2k+1}) \leq S_{2k-1}, \quad k \in N, \quad (60.8)$$

т.е. последовательность $\{S_{2k-1}\}$ убывает, а поэтому $S \leq S_{2k-1}$. Из двойного неравенства (60.7) следует, что

$$S - S_{2k} \leq S_{2k+1} - S_{2k} = u_{2k+1}, \quad (60.9)$$

$$S_{2k-1} - S \leq S_{2k-1} - S_{2k} = u_{2k}, \quad (60.10)$$

что и означает, что $|S - S_n| \leq u_{n+1}$. Теорема полностью доказана.

Следствие. Для ряда (60.1), при выполнении условий теоремы 60.1, верна следующая оценка для остатка ряда:

$$|r_n| \leq |u_{n+1}|. \quad (60.11)$$

Определение 60.2. Ряд (вообще говоря, комплекснозначный) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится *абсолютно*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится *условно*, если он сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Теорема 60.2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится к S , тогда его частичные суммы удовлетворяют неравенству

$$S_n' = \sum_{k=1}^n |a_k| \leq S. \quad (60.12)$$

Оценим частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \leq S, \quad (60.13)$$

откуда (по признаку сравнения) и получаем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Теорема доказана.

Далее, применяя критерий Коши к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, получим: для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходиллся абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $n(\varepsilon)$, чтобы для всех $n > n(\varepsilon)$ и $p \in N_0$ выполнялось неравенство

$$\sum_{k=n}^{n+p} |a_k| < \varepsilon. \quad (60.14)$$

Обозначим, далее, через

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^* \quad (60.15)$$

ряд, составленный из тех же членов, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, но взятых в другом порядке.

Теорема 60.3. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (60.16)$$

сходится абсолютно, то ряд (60.15) также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство. Пусть ряд (60.16) абсолютно сходится, и его сумма равна

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (60.17)$$

Обозначим через S_n^* частичные суммы ряда (60.15). Пусть также

$$S_n^a = \sum_{k=1}^n |a_k|, \quad S^a = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (60.18)$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует такой номер $n(\varepsilon)$, что

$$\sum_{n=n(\varepsilon)+1}^{\infty} |a_n| = S^a - S_{n(\varepsilon)}^a < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (60.19)$$

а поэтому и

$$|S - S_{n(\varepsilon)}| = \left| \sum_{n=n(\varepsilon)+1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=n(\varepsilon)+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (60.20)$$

Теперь надо выбрать такой номер $m(\varepsilon)$, чтобы частичная сумма $S_{m(\varepsilon)}^*$ ряда (60.15) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (60.16), входящие в частичную сумму $S_{n(\varepsilon)}$. Пусть $m > m(\varepsilon)$. Составим разность

$$S_m^{**} = S_m^* - S_{n(\varepsilon)}. \quad (60.21)$$

Так как величина $|S_m^{**}|$ не превышает сумму модулей слагаемых, входящих в S_m^{**} , и номера этих слагаемых больше, чем $n(\varepsilon)$, то все они содержатся в сумме $\sum_{n=n(\varepsilon)+1}^{\infty} |a_n|$. Поэтому из (60.19) следует, что

$$|S_m^{**}| \leq \sum_{n=n(\varepsilon)+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (60.22)$$

Тогда из (60.20), (60.22) при $m > m(\varepsilon)$ вытекает следующая оценка:

$$|S - S_m^*| = |S - (S_{n(\varepsilon)} + S_m^{**})| \leq |S - S_{n(\varepsilon)}| + |S_m^{**}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (60.23)$$

что означает $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^* = S$.

Для завершения осталось доказать абсолютную сходимость ряда (60.15). Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, который, в частности, сходится абсолютно. Тогда, в силу предыдущих рассуждений, ряд $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m^*|$ не только сходится, но и его сумма совпадает с суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Теорема полностью доказана.

Теорема 60.4. Если ряд (60.16), а также ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (60.24)$$

абсолютно сходятся, и c — число, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ абсолютно сходятся.

Данная теорема следует из критерия Коши сходимости рядов, а также следующих равенства и неравенства:

$$\sum_{k=n}^{n+p} |ca_k| = |c| \sum_{k=n}^{n+p} |a_k|, \quad \sum_{k=n}^{n+p} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| + \sum_{k=n}^{n+p} |b_k|. \quad (60.25)$$

Задача из исторического прошлого.

Купец продал два сорта товара, второго менее, чем первого, на столько фунтов, сколько единиц в положительном корне уравнения:

$$2x^2 - 12x = \sqrt{5}(6 - x).$$

За первый сорт он выручил

$$\sqrt[3]{592704}$$

рублей, а за второй — 49,5 рублей.

Сколько купец продал того и другого сорта товара, если фунт первого сорта дороже фунта второго на:

$$\frac{(\sqrt{-2} - \sqrt{-5}) \cdot (\sqrt{-2} + \sqrt{-5}) \cdot \sqrt{-1}}{2(1 + \sqrt{-1})^2}$$

рублей?

Ответ. 28 фун. и 22 фун., или 24 фун. и 18 фун.

**61. Функциональные ряды. Область сходимости.
Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса**

В настоящем разделе будут рассматриваться последовательности и ряды, членами которых являются функции, заданные на определенном множестве. При каждом фиксированном значении аргумента эти последовательности и ряды представляют собой числовые последовательности и ряды.

Определение 61.1. Занумерованное множество функций $\{f_n(x)\}$ с одной и той же областью определения $D \subseteq R$ называется

функциональной последовательностью, а множество D — областью определения последовательности.

Определение 61.2. Пусть $\{f_n(x)\}$ — некоторая функциональная последовательность с областью определения D . Функциональным рядом, определенным на D , называется формальная бесконечная сумма вида

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (61.1)$$

Определение 61.3. n -й частичной суммой функционального ряда называется функция

$$A_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x). \quad (61.2)$$

Определение 61.4. Если при фиксированном $x = x_0 \in D$ сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется *сходящимся в точке x_0* .

Определение 61.5. Множество $D_0 \subseteq D$ тех точек x_0 , в которых сходится функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, называется *областью сходимости данного ряда*.

Функциональный ряд (61.1) называется *абсолютно сходящимся* на множестве $D_0 \subseteq D$, если на этом множестве сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Определение 61.6. Пусть D_0 — область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, и $F(x)$ — предел последовательности $\{f_n(x)\}$, $n = 1, \dots$, при фиксированном значении $x \in D_0$. В этом случае множество пар

$$\{(x, F(x)), x \in D_0\} \quad (61.3)$$

задает некоторую функцию $y = F(x)$, определенную на всем D_0 .

Эта функция называется *предельной функцией функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, $n = 1, \dots$, в точке x* .

Если при этом $F_n(x)$ — последовательность частичных сумм $A_n(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, то функция $F(x)$ называется *суммой данного ряда*.

Определение 61.7. Предположим, что последовательность функций $\{r_n(x)\}$ сходится к нулю $\forall x \in M$. Тогда говорят, что $r_n(x)$ сходится к нулю *равномерно на множестве M* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для любых $n > n_0$ и $x \in M$ выполнено неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Пишут: $r_n(x) \underset{M}{\Rightarrow} 0$ при $n \rightarrow \infty$ (иногда символ « $\Rightarrow$ » заменяют на « $\rightarrow$ »).

Определение 61.8. Если $F(x) = F_n(x) + r_n(x)$ и $r_n(x) \underset{M}{\Rightarrow} 0$ при $n \rightarrow \infty$, то последовательность $F_n(x)$ называется *равномерно сходящейся* к функции $F(x)$ на множестве M при $n \rightarrow \infty$ и пишут $F_n(x) \underset{M}{\Rightarrow} f(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Если же в роли $F_n(x)$ выступает последовательность частичных сумм $A_n(x)$ данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, то этот ряд называется *равномерно сходящимся* к $F(x)$ на множестве M .

Определение 61.9. Сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с $a_n \geq 0 \forall n \in N$ называется *мажорантой* функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на множестве M , если $\forall n \in N$ и $\forall x \in M$ выполнено неравенство $|f_n(x)| \leq a_n$.

Теорема 61.1 (критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций). Для того чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}$, $n = 1, \dots$ на множестве X равномерно сходилась на нем, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $n = n(\varepsilon)$, что для всех $n > n(\varepsilon)$, всех $p \in N_0$ и всех точек $x \in X$ выполнялось неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (61.4)$$

Доказательство данной теоремы полностью повторяет доказательство критерия Коши сходимости числовой последовательности, при этом следует для начала фиксировать точку $x \in X$, а затем перейти к пределу при $p \rightarrow \infty$.

Следствие (необходимое условие равномерной сходимости ряда). Если функциональный ряд сходится равномерно на неко-

тором множестве, то общий член ряда равномерно стремится к нулю на данном множестве.

Теорема 61.2 (признак Вейерштрасса). Пусть даны два ряда: функциональный $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, заданный на множестве X , и числовой

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0, \quad n \in N. \quad (61.5)$$

Если ряд (61.5) сходится, и для любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad n \in N, \quad (61.6)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве X .

Доказательство. Абсолютная сходимость очевидна, поскольку вступает в действие признак сравнения.

Далее, пусть $S(x)$ — сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, и $S_n(x)$ — его частичные суммы. В силу сходимости ряда (61.5) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n = n(\varepsilon)$, что для всех $n > n(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m < \varepsilon. \quad (61.7)$$

Но тогда при всех таких n и для любого $x \in X$ для остатков $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ справедлива следующая оценка:

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m(x) \right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} |f_m(x)| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m(x) < \varepsilon, \quad (61.8)$$

что и означает равномерную сходимость данного ряда. Теорема доказана.

Задача из исторического прошлого.

Ученик, совершая вычисления над двумя числами, ошибся, приняв цифру десятков 8 из них за 3, а цифру единиц другого 6 за 0 и потому, разделив сумму этих чисел на их произведение, получил в результате:

$$\frac{(\sqrt[3]{50653} - 1) : 9}{\sqrt[3]{4173281} - (\sqrt{15625} + 6)}.$$

Определить числа, над которыми ученик совершал вычисления, зная, что отношение суммы их к их же разности в 2,7 раза более рационального корня уравнения:

$$9x^2\sqrt{2} + 5\sqrt[6]{72} = 5x\sqrt{2} + 9x\sqrt[6]{72}.$$

Ответ. 80 и 16.

62. Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность суммы ряда, почленное дифференцирование и интегрирование

Сумма сходящегося ряда, все члены которого непрерывные функции, может и не быть, вообще говоря, непрерывной функцией. Следующая теорема и предъясняет достаточные условия непрерывности суммы данного ряда.

Теорема 62.1. Пусть $f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in R$ для любого $n \in N$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится к функции $F(x)$ на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$ — некоторое фиксированное число. Тогда сумма ряда $F(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $S_n(x)$ — частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Тогда, в силу его равномерной сходимости, существует такой номер $n = n(\varepsilon)$, что для всех $n > n(\varepsilon)$ и любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство

$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (62.1)$$

Выберем $n_0 > n(\varepsilon)$, при этом функция $S_{n_0}(x)$ — непрерывная функция в точке x_0 . Поэтому существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ выполняется неравенство

$$|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (62.2)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} S(x) - S(x_0) &= [S(x) - S_{n_0}(x)] + \\ &+ [S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)] + [S_{n_0}(x_0) - S(x_0)]. \end{aligned} \quad (62.3)$$

Тогда, в силу (62.1), (62.2), получим при $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ следующую оценку:

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &< |S(x) - S_{n_0}(x)| + \\ &+ |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| + |S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned} \quad (62.4)$$

что и доказывает искомую непрерывность. Теорема доказана.

Следствие. Если функции $f_n(x)$, $n \in N$, непрерывны в точке $x_0 \in X \subseteq R$ и

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x), \quad (62.5)$$

то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Перейдем теперь к вопросу возможного почленного интегрирования (дифференцирования) рядов.

Теорема 62.2. Пусть $F(x)$ — сумма равномерно сходящегося на отрезке $[a, b]$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, составленного из функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$.

Тогда для любой точки c из отрезка $[a, b]$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f_n(t) dt \quad (62.6)$$

также равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, при этом

$$\int_c^x F(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f_n(t) dt. \quad (62.7)$$

Доказательство. По теореме 62.1 функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а поэтому интегрируема на любом отрезке, входящем в $[a, b]$.

Введем обозначение:

$$\alpha(x) = \int_c^x F(t) dt. \quad (62.8)$$

Пусть $s_n(x)$ — частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $r_n(x)$ — соответствующий его остаток. Обозначим через $\alpha_n(x)$ частичные суммы ряда (62.6):

$$\alpha_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_c^x f_k(t) dt = \int_c^x \left(\sum_{k=1}^n f_k(t) \right) dt = \int_c^x S_n(t) dt. \quad (62.9)$$

Тогда для любого $x \in [a, b]$ имеем:

$$\begin{aligned} |\alpha_n(x) - \alpha(x)| &= \left| \int_c^x F(t) dt - \int_c^x S_n(t) dt \right| \leq \left| \int_c^x |F(t) - S_n(t)| dt \right| = \left| \int_c^x |r_n(t)| dt \right| \leq \\ &\leq \sup_{[a,b]} |r_n(t)| \left| \int_c^x dt \right| \leq |x - c| \sup_{[a,b]} |r_n(t)| \leq (b - a) \sup_{[a,b]} |r_n(x)|. \end{aligned} \quad (62.10)$$

Видно, что последовательность $\sup_{[a,b]} |r_n(x)|$ — числовая, тогда, в силу равномерной сходимости нашего ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, выполнено следующее равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[a,b]} |r_n(x)| = 0. \quad (62.11)$$

Теперь, очевидно, что последовательность частных сумм ряда (62.6) сходится равномерно к функции (62.8), а это и означает равномерную сходимость ряда (62.6) к функции (62.8), при этом формула (62.7), а вместе с ней и теорема, доказаны.

Теорема 62.3. Пусть функции $f_n(x)$, $n \in N$, непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, и ряд, составленный из их производных

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad (62.12)$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$.

Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$, то он сходится равномерно на всем отрезке $[a, b]$, а его сумма

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (62.13)$$

непрерывно дифференцируема и

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x). \quad (62.14)$$

Доказательство. Обозначим для начала

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x). \quad (62.15)$$

Как следует из условий теоремы, сумма последнего ряда является непрерывной функцией, а сам ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_{x_0}^x \alpha(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x f'_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)). \quad (62.16)$$

По предыдущей теореме ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) \quad (62.17)$$

— сходящийся. Но сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0), \quad (62.18)$$

поэтому и сходится сумма рядов (62.17), (62.18), т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (62.19)$$

Следовательно, равенство (62.16) действительно можно переписать в следующем виде:

$$\int_{x_0}^x \alpha(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \quad (62.20)$$

или в другом эквивалентном виде:

$$\int_{x_0}^x \alpha(t) dt = F(x) - F(x_0). \quad (62.21)$$

Левая часть как функция от x дифференцируема, значит, дифференцируема и функция $F(x)$. Дифференцируя последнее равенство, имеем:

$$F'(x) = \alpha(x), \quad (62.22)$$

при этом функция $\alpha(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Теперь, подставляя (62.15) в (62.22), получим искомую формулу (62.14).

Для завершения доказательства отметим, что из равенства (62.16), в силу того, что ряды (62.17) и (62.18) сходятся, следует, что ряд (62.13) сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Теорема доказана.

Последнюю теорему можно назвать теоремой о почленном дифференцировании равномерно сходящегося ряда.

Задача из исторического прошлого.

Определить положительное число, которое состоит из трех слагаемых, пропорциональных квадратам корней уравнения:

$$x^3 - x^2(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{2}) + x(\sqrt{15} + \sqrt{6} + \sqrt{10}) = \sqrt{30}$$

и имеющих то свойство, что произведение наибольшего на наименьшее слагаемое превышает разность между средним и наименьшим на

$$\frac{203 + \sqrt[3]{28934443}}{\sqrt[4]{50625}} + \sqrt[4]{4096}.$$

Ответ. 20.

63. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложение рядов

Определение 63.1. Функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (63.1)$$

где a_n, z_0 — заданные, вообще говоря, комплексные числа, а z — комплексное переменное, называются *степенными рядами*.

Функцию $n \rightarrow a_n$ от натурального аргумента n называют *общим членом* степенного ряда (63.1).

Конечно, после замены переменных в степенном ряду (63.1) по формуле $\zeta = z - z_0$ получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad (63.2)$$

сходимость которого эквивалентна сходимости ряда (63.1). Поэтому, далее, без ограничения общности, можно работать только с рядами (63.2), хотя некоторые теоремы данного раздела будут сформулированы для рядов вида (63.1).

Теорема 63.1 (первая теорема Абеля). Если ряд, рассмотренный на комплексной плоскости,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (63.3)$$

сходится при некотором $z = z_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно при любом z , удовлетворяющем неравенству $|z| < |z_0|$.

Доказательство. По условию ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \quad (63.4)$$

сходится, тогда его общий член стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, поэтому последовательность $\{a_n z_0^n\}$, как последовательность комплексных чисел, ограничена, т.е. существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|a_n z_0^n| \leq L, \quad n \in N_0. \quad (63.5)$$

Оценим теперь общий член ряда (63.3):

$$|a_n z^n| \leq |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq L \left| \frac{z}{z_0} \right|^n. \quad (63.6)$$

Далее, очевидно, если $|z| < |z_0|$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ сходится. Поэтому, по признаку сравнения, сходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$, а это означает абсолютную сходимость ряда (63.3) при $|z| < |z_0|$. Теорема доказана.

Следствие. Если ряд (63.3) расходится при $z = z_0$, то он расходится при любом комплексном z , удовлетворяющем неравенству $|z| > |z_0|$.

Действительно, в этом случае, если бы ряд (63.3) сходил, то сходил бы и ряд (63.4).

Определение 63.2. Если R — неотрицательное число или $+\infty$ обладает тем свойством, что при всех z , удовлетворяющих неравенству $|z| < R$, ряд (63.3) сходится, а при всех z , удовлетворяющих неравенству $|z| > R$, ряд (63.3) расходится, то R называется *радиусом сходимости степенного ряда* (63.3).

Замкнутое множество $\{z: |z| \leq R\}$, где R — радиус сходимости, называют *кругом сходимости* ряда (63.3), хотя данный ряд может сходиться и не во всех точках окружности $\{z: |z| = R\}$.

Может так случиться, что $R = 0$. Тогда круг сходимости вырождается в точку. Если $R = +\infty$, то круг сходимости полностью совпадает со всей комплексной плоскостью C .

Корректность последнего определения доказывает следующая

Теорема 63.2. Для любого степенного ряда (63.3) существует его радиус сходимости R . Внутри круга сходимости ряд (63.3) сходится абсолютно, а на любом круге $\{z: |z| \leq r\}$, где $r < R$, он сходится равномерно.

Доказательство. Рассмотрим следующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (63.7)$$

в котором a_n — комплексные коэффициенты, а $x \in R$. Пусть на некотором множестве действительных чисел A ряд (63.7) сходится (множество A содержит хотя бы начало координат). Множество A имеет верхнюю грань (конечную или бесконечную). Зафиксируем некоторое z , такое, что $|z| < R$. Тогда существует такое $x \in A$, что $|z| < x \leq R$. Тогда для указанного x ряд (63.7) сходится, тогда по теореме 63.1 в выбранной точке z сходится абсолютно ряд (63.3).

Если же $|z| > R$, то, наоборот, выберем такое действительное число x , что $|z| > x > R$. Тогда ряд (63.7) расходится в точке x и, следовательно, для выбранного z расходится и ряд (63.3). Корректность определения радиуса доказана.

Далее, если теперь $r < R$, то, по только что доказанному, ряд (63.3) сходится абсолютно при $|z| = R$; другими словами, сходится числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$. Поэтому, по признаку Вейерштрасса, на

любом круге $\{z: |z| \leq r\}$ ряд (63.3) сходится равномерно. Теорема полностью доказана.

Теорема 63.3 (вторая теорема Абеля). Если R — радиус сходимости ряда (63.3), и этот ряд сходится при $z = R$, то он сходится равномерно на отрезке $[0, R]$ действительной оси.

Действительно, пусть $0 \leq r \leq R$. Представим ряд (63.7) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R} \right)^n.$$

Очевидно, что члены ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ не зависят от x , поэтому его сходимость равномерная. Последовательность же $\left\{ \left(\frac{x}{R} \right)^n \right\}$ ограничена на отрезке $[0, R]$ следующим образом: $\left(\frac{x}{R} \right)^n \leq 1$. Тогда справедлива оценка для общего члена ряда (63.7):

$$a_n R^n \left(\frac{x}{R} \right)^n \leq a_n R^n. \quad (63.8)$$

Очевидно, по признаку Вейерштрасса ряд (63.8) сходится равномерно на отрезке действительной оси $[0, R]$. Теорема доказана.

Следствие. Если степенной ряд (63.3) сходится при $z = R$, то его сумма непрерывна на отрезке $[0, R]$ действительной оси.

После корректного введения понятия радиуса сходимости произвольного степенного ряда требуется теперь найти формулу для его определения через коэффициенты данного ряда.

Теорема 63.4 (Коши–Адамара). Если R — радиус сходимости степенного ряда (63.3), то

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (63.9)$$

Доказательство. Обозначим $k = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Поскольку радиус сходимости может быть и бесконечным, рассмотрим сначала случай, когда $k = 0$. Если выбрать некоторое $0 < \varepsilon < 1$, то при $z \neq 0$ найдется такой номер N_1 , что при всех $n > N_1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{|z|}, \quad (63.10)$$

или

$$|a_n| |z|^n < \varepsilon^n. \quad (63.11)$$

Поэтому из признака сравнения следует, что ряд (63.3) абсолютно сходится, а значит, поточечно сходится при произвольном выбранном z , что означает, что $R = +\infty$.

Пусть теперь $k = +\infty$. Тогда существует последовательность натуральных чисел n_k , $k \in Z$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$. Поэтому для любого $z \neq 0$ найдется такой номер k_1 , что при всех $k > k_1$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq \frac{1}{|z|}, \quad |a_{n_k}| |z|^{n_k} \geq 1. \quad (63.12)$$

Видно, что не выполняется необходимое условие сходимости ряда, что означает расходимость ряда при любом (произвольном) $z \neq 0$. Следовательно, $R = 0$.

Пусть теперь $0 < k < +\infty$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$|z| < \frac{1}{k + \varepsilon},$$

тогда выполнено неравенство $(k + \varepsilon)|z| < 1$. По свойству верхнего предела найдется такой номер N_1 , что при всех $n > N_1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < k + \varepsilon, \quad (63.13)$$

поэтому

$$|z| \sqrt[n]{|a_n|} < |z|(k + \varepsilon), \quad |a_n z|^n < (|z|(k + \varepsilon))^n < 1, \quad (63.14)$$

и по признаку сравнения ряд (63.3) при $|z| < \frac{1}{k}$ сходится абсолютно.

Выберем теперь $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$|z| > \frac{1}{k - \varepsilon} > 0, \quad (63.15)$$

тогда выполнено неравенство $(k - \varepsilon)|z| > 1$. По свойству верхнего предела существует последовательность натуральных чисел n_k , $k \in Z$, такая, что

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq k - \varepsilon. \quad (63.16)$$

Отсюда в силу (63.15) следует, что

$$|z| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > |z|(k - \varepsilon) > 1, \quad |a_{n_k} z|^{n_k} > 1, \quad (63.17)$$

поэтому, в силу невыполнения необходимого признака сходимости, ряд (63.3) расходится при $|z| > \frac{1}{k}$. Теорема доказана.

Исследование степенных рядов в некоторых случаях позволяет разлагать функции, имеющие достаточное количество производных на некотором множестве, в сходящиеся степенные ряды на этом множестве.

Определение 63.3. Функция $f(z)$ называется *аналитической* в точке z_0 , если существует такое число $R > 0$, что в круге $|z - z_0| < R$ она представима степенным рядом вида (63.1), т.е. существуют такие комплексные числа a_n , $n \in N_0$, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R. \quad (63.18)$$

Далее будем изучать в основном степенные ряды с действительными членами. При этом понятие радиуса сходимости переносится полностью на такие ряды, а понятие круга сходимости переходит в понятие (действительного) *интервала сходимости*. Имеет место простая

Теорема 63.5. Если R — радиус сходимости степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R, \quad (63.19)$$

$R > 0$, то:

1) функция f имеет в числовом интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ производные всех порядков, и они находятся из ряда (63.19) почленным дифференцированием;

2) для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ выполнено следующее равенство:

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}, \quad (63.20)$$

т.е. внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать;

3) для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ выполнено также следующее равенство:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad (63.21)$$

т.е. внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать.

Доказательство. Нетрудно вычислить радиусы сходимости (пока) формальных степенных рядов (63.20), (63.21), полученных из исходного ряда формальными интегрированием и дифференцированием: если подсчитать пределы в формуле Коши-Адамара для рядов (63.19), (63.20), (63.21), то окажется, что все они равны.

Всякий степенной ряд вида (63.18) с радиусом сходимости R равномерно сходится на отрезке $(x_0 - r, x_0 + r)$ (это показано выше), где $0 < r < R$. Поэтому доказываемая теорема непосредственно следует из соответствующих теорем о почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов.

Теорема 63.6. Для аналитической функции $f(x)$ в точке x_0 (для которой в окрестности данной точки справедливо представление (63.19)) с радиусом сходимости $R > 0$ выполнены следующие равенства:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n \in N_0. \quad (63.22)$$

Для доказательства данной теоремы достаточно n раз продифференцировать обе части равенства (63.19) и подставить в получившееся тождество значение $x = x_0$.

Определение 63.4. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производные всех порядков, то ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (63.23)$$

называется *рядом Тейлора* функции f в точке x_0 .

При $x_0 = 0$ ряд (63.23) называется также *рядом Маклорена* функции f .

Ранее (раздел 52) мы представляли функции, имеющие достаточное число производных в окрестности некоторой своей точки по формуле Тейлора (которая представляет собой конечную сумму). Теперь становится естественным вопрос: при каких условиях формальный (пока) ряд Тейлора для данной функции сходится к ней на соответствующем множестве?

Ответ на этот вопрос дает следующая важная теорема.

Теорема 63.7. Пусть функция f бесконечно дифференцируема и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, т.е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ и всех $n \in N_0$ выполняется следующее неравенство:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M. \quad (63.24)$$

Тогда на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ функция f раскладывается в ряд Тейлора (63.23).

Доказательство. Достаточно доказать, что остаток $r_n(x)$ ряда (63.23) стремится к нулю на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$.

Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (см. также раздел 52):

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad |c - x_0| < |x - x_0| < h. \quad (63.25)$$

Из неравенства (63.24) следует, что

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$|c - x_0| < |x - x_0| < h. \quad (63.26)$$

Поскольку очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \quad (63.27)$$

то остаток $r_n(x)$ ряда (63.23) стремится к нулю на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$. Теорема доказана.

Заметим, что из доказательства последней теоремы следует, что ряд (63.23) равномерно сходится к $f(x)$ на любом промежутке $|x - x_0| \leq q$, где $q < h$.

Теперь есть возможность предложить читателю «*таблицу разложения основных элементарных функций*» в ряд Маклорена. Для этого, конечно, необходимо вычислить в точке $x = 0$ производные всех порядков. Это вычисление в качестве упражнения мы оставляем читателю.

Итак,

$$1) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$2) \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$3) \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

$$4) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

$$5) (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!}.$$

Ряды Тейлора успешно также применяются, в частности, для приближенных вычислений.

Вычислим, к примеру, число π .

Для приближенного вычисления данного числа можно, например, использовать известный ряд для арктангенса на интервале

$$-1 \leq x \leq 1:$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Взяв значение $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, имеем:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots \right).$$

Видно, что общий член ряда стремится к нулю, поэтому данную бесконечную сумму можно оборвать в любом месте, в зависимости от требуемой точности вычисления.

Между прочим, практически любая вычислительная машина для приближенного вычисления значений, по крайней мере,

элементарных функций, использует разложение данной функции до определенного порядка, который определяется, в частности, количеством регистров данной вычислительной машины (калькулятора и т.д.).

Задача из исторического прошлого.

Найти два числа, разность которых равна выражению:

$$\frac{a^{-\frac{5}{2}}b^{0,4} - a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}}{a^{-4,5} + a^{-\frac{3}{2}}b^{0,2}} : \frac{a^{-3} - a^{-2}b^{\frac{1}{3}} + a^{-1}b - b^{\frac{1}{3}}}{a^{-3} \sqrt[3]{a(a^{-2}b^{\frac{3}{5}} + b^{1,6})}},$$

когда в нем на место a подставить 4, а на место b — большее из искомых чисел, уменьшенное единицей, зная притом, что произведение искомых чисел представляет больший корень уравнения:

$$\frac{\sqrt{2x-7} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-7} - \sqrt{x-3}} = -\frac{(\sqrt{12} + \sqrt{75})(\sqrt{20} - \sqrt{45})\sqrt{3}}{0,5(\sqrt{5} + \sqrt{180})}.$$

Ответ. 4 и 7.

Литература

Основная

1. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. М., Высшая школа, 2000.
2. Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., Наука, 1985.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Наука, 1984.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1988.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. ФКП. М., Наука, 1985.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Задачник. М., Наука, 1982.
7. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. М., Наука, Физматлит, 2000.
8. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, примеры, методология. М., Наука, 1980.
9. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М., Наука, 1993.
10. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: учебник для вузов. М., Наука, 2000.
11. Владимиров К.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: задачник для вузов. М., Наука, 2000.
12. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М., Наука, 1980.
13. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., Высшая школа, 1998.
14. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1999.

15. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М., Наука, 1983.
16. *Коваленко И.Н., Филиппова А.А.* Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа, 1982.
17. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М., Наука, 1981.
18. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1, 2. М., Альфа, 1998.
19. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. М., Наука, 1984.
20. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды. М., Наука, 1986.
21. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. М., Наука, 1993.
22. *Лебедев В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М., Наука, 1994.
23. *Пикулин В.П., Похожаев С.И.* Практический курс по уравнениям математической физики. М., Наука, 1995.
24. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексного переменного. М., Наука, 1999.
25. *Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М.* Сборник задач по теории вероятностей. М., Наука, 1980.
26. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., Наука, 1993.
27. *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. М., Мир, 1985.
28. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. М., Наука, 1988.
29. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М., Экзамен, 2007.
30. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., Эдиториал УРСС, 2000.

Дополнительная

1. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. М., Высшая школа, 1986.
2. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. М., Высшая школа, 1999.
3. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Наука, 1984., М., Мир, 1984.
4. *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чурбанов И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М., Наука, 1987.
5. *Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Задачи по математической физике. М., Изд-во МГУ, 1999 (учебное пособие).
6. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. М., Изд-во МГУ, 1989 (учебное пособие).
7. *Васильева А.Б., Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Дифференциальные уравнения. М., Наука, 1998.
8. *Волков Е.А.* Численные методы. М., Наука, 1982.
9. *Зорич В.А.* Математический анализ. Т.1. 1997, т. 2. 1998.
10. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. М., Наука, Ч. 1. 1980. Ч. 2. 1982.
11. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. М., Наука, 1998.
12. *Колмогоров А.И., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1981.
13. *Краснов М.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Высшая школа, 1983.
14. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. М., Высшая школа. Т. 1, 2. 1998. Т. 3. 1999.
15. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. М., Наука, 1982.
16. *Масленникова В.Н.* Дифференциальные уравнения в частных производных. Изд-во РУДН, 1997.
17. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Наука, 1983.
18. *Мухачева Э.А., Рубинштейн Г.Ш.* Математическое программирование. Новосибирск, Наука, 1987.

-
19. *Наумов В.А.* Руководство к решению задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М., Наука, 1993.
 20. *Никольский С.М.* Курс математического анализа, М., Наука, Т. 1, 2. 1993.
 21. *Розанов Ю.А.* Лекции по теории вероятностей. М., Наука, 1985.
 22. *Рябенский В.С.* Введение в вычислительную математику. М., Наука, 1993.
 23. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М., Изд-во МГУ, 1993.
 24. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексного переменного. М., Наука, 1999.
 25. *Севастьянов Б.А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. М., Наука, 1982.
 26. Смешанные алгебраические задачи. Повторительный курсъ 5-го, 6-го, 7-го и 8-го классовъ гимназій. Составиль А.К. Кліоновскій. Шестое изданіе. Калишь, тип. К.В. Гиндемита, 1909.
 27. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., Наука, 1980.

More Books!



yes I want morebooks!

Покупайте Ваши книги быстро и без посредников он-лайн - в одном из самых быстрорастущих книжных он-лайн магазинов!
Мы используем экологически безопасную технологию "Печать-на-Заказ".

Покупайте Ваши книги на
www.morebooks.de

Buy your books fast and straightforward online - at one of the world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at
www.morebooks.de

SIA OmniScriptum Publishing
Brivibas gatve 1 97
LV-103 9 Riga, Latvia
Telefax: +371 68620455

info@omniscryptum.com
www.omniscryptum.com

OMNI Scriptum



