

Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения

М. В. ШАМОЛИН

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

e-mail: shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru

УДК 517.925+531.01+531.552

Ключевые слова: динамическая система, переменная диссипация, динамика твёрдого тела, взаимодействующего со средой.

Аннотация

Работа посвящена развитию качественных методов в теории неконсервативных систем, возникающих, например, в таких областях науки, как динамика твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой, теория колебаний и др. Данный материал может быть интересен специалистам как по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, динамике твёрдого тела, так и по механике жидкости и газа, поскольку в работе используются свойства движения твёрдого тела в среде в условиях струйного обтекания.

Получен целый спектр случаев полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (например, притягивающих и отталкивающих фокусов).

Получены новые семейства фазовых портретов систем с переменной диссипацией на маломерных и многомерных многообразиях. Обсуждаются вопросы их абсолютной или относительной грубости. Обнаружены новые интегрируемые случаи движения твёрдого тела, в том числе в классической задаче о движении сферического маятника, помещённого в поток набегающей среды.

Abstract

M. V. Shamolin, Dynamical systems with variable dissipation: Approaches, methods, and applications, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 3, pp. 3–237.

This work is devoted to the development of qualitative methods in the theory of nonconservative systems that arise, e.g., in such fields of science as the dynamics of a rigid body interacting with a resisting medium, oscillation theory, etc. This material can call the interest of specialists in the qualitative theory of ordinary differential equations, in rigid body dynamics, as well as in fluid and gas dynamics since the work uses the properties of motion of a rigid body in a medium under the streamline flow around conditions.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 3, с. 3–237.

© 2008 *Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»*

The author obtains a full spectrum of complete integrability cases for nonconservative dynamical systems having nontrivial symmetries. Moreover, in almost all cases of integrability, each of the first integrals is expressed through a finite combination of elementary functions and is a transcendental function of its variables, simultaneously. In this case, the transcendence is meant in the complex analysis sense, i.e., after the continuation of the functions considered to the complex domain, they have essentially singular points. The latter fact is stipulated by the existence of attracting and repelling limit sets in the system considered (for example, attracting and repelling foci).

The author obtains new families of phase portraits of systems with variable dissipation on lower- and higher-dimensional manifolds. He discusses the problems of their absolute or relative roughness, He discovers new integrable cases of the rigid body motion, including those in the classical problem of motion of a spherical pendulum placed in the over-running medium flow.

Содержание

Введение	7
1. Некоторая задача динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой	8
1.1. Из исторического прошлого	8
1.2. Некоторые современные результаты	10
1.3. Последовательность шагов при моделировании	12
1.4. Физические предположения	13
1.5. Линеаризованные уравнения движения	15
1.6. Эксперимент	16
1.7. Начало нелинейного анализа	17
1.8. Направления, развиваемые в работе	20
1.9. Краткое содержание отдельных разделов работы	24
2. Полная интегрируемость некоторых классов неконсервативных систем	26
2.1. Предварительные сведения	26
2.2. Динамические системы с переменной диссипацией и их общие свойства	29
2.3. Одно из определений системы с переменной диссипацией с нулевым средним	33
2.4. Системы с симметриями и переменной диссипацией с нулевым средним	34
2.5. Системы на $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$, или двумерном цилиндре	39
2.6. Системы на $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus \{\alpha = 0, \alpha = \pi\} \times \mathbb{R}^2\{z_1, z_2\}$, или касательном расслоении к двумерной сфере	48
2.7. Системы из динамики четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой	51

3. Класс порождающих динамических систем на маломерных многообразиях: ещё раз о воздействии сопротивляющейся среды на твёрдое тело	56
3.1. Предварительные сведения	57
3.2. Методика определения неизвестных безразмерных параметров воздействия среды на тело	58
3.3. Нелинейные динамические системы, описывающие различные варианты движения тела в среде	61
4. Некоторые вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений в динамике систем с переменной диссипацией	67
4.1. Замечания по бифуркации рождения цикла Пуанкаре—Андропова—Хопфа	67
4.2. О замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых в точку по фазовой поверхности	72
4.3. Об отсутствии замкнутых кривых из траекторий, не стягиваемых в точку по фазовому цилиндру	75
4.4. О существовании топографических систем Пуанкаре в динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой	77
4.5. Кривые контактов и системы сравнения. Замечания о предельных циклах и проблеме различения центра и фокуса	81
4.6. О траекториях, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удалённые точки плоскости	88
4.7. Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в фазовых пространствах динамических систем	92
4.8. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения	93
5. Относительная структурная устойчивость и относительная структурная неустойчивость различных степеней	95
5.1. Определение относительной структурной устойчивости (относительной грубости)	96
5.2. Относительная структурная неустойчивость (относительная негрубость) различных степеней	99
5.3. Примеры из динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой, и теории колебаний	100
6. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним в плоской динамике твёрдого тела	106
6.1. Случай движения тела в среде при наличии некоторой неинтегрируемой связи и начало качественного анализа	107
6.2. О трансцендентной интегрируемости системы	108
6.3. О механической аналогии с маятником в потоке среды	111

6.4.	Топологическое строение фазового портрета исследуемой системы	113
6.5.	Общие свойства решений динамической системы	116
6.6.	Расслоения фазового пространства	118
6.7.	Свойства решений, соответствующих колебательной области	119
6.8.	Свойства решений, соответствующих вращательной области	124
6.9.	Об инструментальных средствах исследования модели	126
6.10.	Сведение системы к физическому маятнику	129
6.11.	Начало качественного анализа. Точки покоя систем и стационарные движения	131
6.12.	Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа	133
6.13.	О существовании дополнительного трансцендентного интеграла	134
6.14.	Топологическое строение фазовых портретов системы на двумерном цилиндре	137
6.15.	Механическая интерпретация некоторых особых фазовых траекторий	140
7.	Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией с ненулевым средним в плоской динамике твёрдого тела	141
7.1.	Начало качественного анализа. Точки покоя систем второго и третьего порядков	142
7.2.	Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа	146
7.3.	Классификация фазовых портретов системы на двумерном цилиндре для первой области параметров	148
7.4.	Классификация портретов для второй и третьей областей параметров	155
7.5.	Строение фазового портрета системы для четвёртой области параметров	157
8.	Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним в пространственной динамике твёрдого тела	159
8.1.	Постановка задачи о пространственном движении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании	159
8.2.	Случай движения тела в среде при наличии некоторой неинтегрируемой связи и начало качественного анализа	162
8.3.	О трансцендентной интегрируемости системы	166
8.4.	Задача о пространственном маятнике в потоке набегающей среды	170
8.5.	Топологическое строение фазового портрета исследуемой системы	174
8.6.	Траектории движения сферического маятника и случай ненулевой его закрутки около продольной оси	177

9. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией с ненулевым средним в пространственной динамике твёрдого тела	177
9.1. Случай нулевой продольной составляющей угловой скорости и соответствующие стационарные движения	180
9.2. Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа	183
9.3. Классификация фазовых портретов системы в трёхмерном пространстве для некоторой области параметров	186
10. Некоторые задачи плоской динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой при наличии линейного демпфирования со стороны среды	190
10.1. Свободное торможение тела в среде при учёте линейного демпфирующего момента	191
10.2. Движение в среде при наличии некоторой неинтегрируемой связи и линейного демпфирующего момента	195
10.3. Топологическое строение некоторых фазовых портретов в задаче о движении тела в среде при учёте демпфирующего момента	197
10.4. Сравнения некоторых классов движений тела в среде при отсутствии и наличии линейного демпфирующего момента	204
Заключение	207
Литература	209

Посвящается моей матери Шамолиной Тамаре Николаевне

Наука всегда оказывается не права. Она не в состоянии решить ни одного вопроса, не поставив при этом десятка новых.

Джордж Бернард Шоу

Введение

Работа посвящена развитию качественных методов в теории неконсервативных систем, возникающих, например, в таких областях науки, как динамика твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой, теория колебаний и др. Данный материал может быть интересен специалистам как по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, динамике твёрдого тела, так и по механике жидкости и газа, поскольку в работе используются свойства движения твёрдого тела в среде в условиях струйного обтекания.

Получен целый спектр случаев полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (например, притягивающих и отталкивающих фокусов).

Получены новые семейства фазовых портретов систем с переменной диссипацией на маломерных и многомерных многообразиях. Обсуждаются вопросы их абсолютной или относительной грубости. Обнаружены новые интегрируемые случаи движения твёрдого тела, в том числе в классической задаче о движении сферического маятника, помещённого в поток набегающей среды.

1. Некоторая задача динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой

1.1. Из исторического прошлого

Задача о движении тела в сопротивляющейся среде (например, о падении тела в воздухе) интересует исследователей вот уже несколько столетий: ещё в Средние века появилась необходимость изучения зависимости дальности стрельбы от величины угла возвышения ствола пушки.

Опыты по исследованию движения тела в воздухе и жидкости привели Х. Гюйгенса к установлению эмпирического закона сопротивления, пропорционального квадрату скорости движения тела в воздухе (1669 г.). Исаак Ньютон на основе опытов (Ф. Гоуксби, Ж. Дезагюлье и собственных) создал математическую теорию сопротивления воздуха, разработку которой продолжали в XVIII в. Вариньон, Д. Бернулли, Ж. Даламбер, Л. Эйлер и др. В те же годы был изобретён баллистический маятник.

Леонард Эйлер, в результате глубокого анализа опытного материала англичанина Б. Робинса, заменил в 1745 г. квадратичный закон сопротивления двучленным: первое слагаемое пропорционально квадрату скорости, а второе — четвёртой степени скорости. В дальнейшем Эйлер разработал численные методы интегрирования дифференциального уравнения движения снаряда, в частности используя медленно сходящиеся ряды. Для прицельной стрельбы он предложил другую методику, согласно которой движение снаряда разделялось на составляющие, одна из которых отвечает за сопротивление.

Усилия учёных были направлены не только на нахождение траектории и закона движения снаряда, но также на возможно более полный учёт дополнительных явлений, приводящих к важнейшим поправкам к основной теории.

В XVIII в. Робинс заметил, что центр масс вращающегося снаряда описывает пространственную кривую. Позднее, в XIX в. С. Пуассон, затем М. В. Остроградский пытались дать математическую трактовку этого явления. На основе общей теории движения твёрдого тела было установлено, что продолговатый вращающийся снаряд имеет собственное быстрое вращение около продольной оси динамической и геометрической симметрии, прецессию около вектора скорости снаряда и нутационное движение около вектора опрокидывающего момента.

1.1.1. Исследования Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина

Н. Е. Жуковский одним из первых анализировал разные задачи динамики точки в среде, а именно падение тел, движение тела, брошенного под углом к горизонту, движение маятника и т. д. Наряду с интегрированием уравнений движения он совершенствовал модель взаимодействия тел с сопротивляющейся средой и считал, что кинетическая энергия падающего тела тратится на образование вихревых движений воздуха и, кроме того, на преодоление молекулярных сил прилипания воздуха к движущемуся телу. Сопротивление зависит не только от скоростей движения точек тела, но и от формы самого тела. Если скорость мала, то с достаточной точностью можно принять сопротивление пропорциональным первой степени скорости. При больших скоростях сопротивление пропорционально квадрату скорости.

Из исследований Н. Е. Жуковского известна также попытка моделирования движения на основе экспериментов по самовращению падающих в воздухе пластинок [135, 136] (так называемого «гамбургского картона»). Здесь приходится учитывать такие свойства воздействия среды на тело, как сила сопротивления и подъёмная сила. Именно аэродинамические характеристики пластинки использованы и для моделирования полёта птиц [136].

Н. Е. Жуковский предполагал существование такого динамического равновесия «тела птицы» относительно центра масс, при котором угол между скоростью центра масс и плоскостью крыла-пластинки (угол атаки) служит управляющим параметром, т. е. может быть задан произвольным образом. Это предположение равнозначно предположению о таком разделении движений тела, при котором характерное время движения относительно центра масс существенно меньше характерных времен движения самого центра.

Представляет интерес исследование движения тела в среде при условиях, когда его поступательное движение связано с вращательным. Упомянутые выше задачи далеко не исчерпывают всех возможностей подобного типа.

Из исследований С. А. Чаплыгина отметим также постановку задачи о движении тяжёлого тела в несжимаемой жидкости [266, 267].

Основопологающей в рамках данной работы задачей является изучение движения пластины бесконечной длины в условиях струйного обтекания [266]. Эта задача является важной прежде всего для дальнейшего исследования движения тела, взаимодействующего со средой через передний плоский участок.

1.1.2. Различные аспекты рассмотрения проблемы

Как видно, в историческом прошлом в основном затронут лишь один аспект задачи о движении тел в сопротивляющейся среде. А именно, интересы исследователей направлены на получение конкретных траекторий пусть и в приближённом, но в явном виде. При этом параллельным образом рассматривалась задача более точного моделирования взаимодействия тела с сопротивляющейся средой. Об интересных экспериментальных явлениях см. также [388, 389, 391–395, 399, 401, 461].

Проиллюстрируем кратко последнюю проблему для тел простой формы.

Плоская пластина — наиболее простое тело, позволяющее исследовать различные особенности движения в среде. Эффекты, связанные с влиянием присоединённых масс (классическая задача Кирхгофа), демонстрируются в [164] на примере движения тела-пластины в жидкости (исследование, как известно, начато Томсоном, Тэйтом и Кирхгофом).

Задача Кирхгофа, поставленная во второй половине XIX в., открыла второй аспект рассмотрения задачи. Он связан с вопросами интегрируемости той нелинейной системы дифференциальных уравнений [164], которая описывает данное движение (вопросы существования аналитических (гладких, мероморфных) первых интегралов).

До наших дней различные варианты задачи Кирхгофа, по причине сложности, почти всегда рассматривались с точки зрения проблемы интегрируемости, и лишь в некоторых случаях проведён качественный анализ ряда траекторий. В работах Кирхгофа, Клебша, Стеклова, Ляпунова, Чаплыгина, Харламова и др. указаны условия существования дополнительного аналитического первого интеграла. В наши же дни решение этой проблемы совершенствуется: в [206] построена теория интегрируемых случаев (построение L - A -пары), а в [157] указаны условия несуществования дополнительного первого интеграла уравнений Кирхгофа (см. также [24, 54–56, 72, 73, 83, 199, 219, 220, 244]).

Укажем также на третий аспект рассмотрения указанной проблемы, а именно на качественный анализ систем дифференциальных уравнений, описывающих данное движение (расслоения фазового пространства, качественное расположение фазовых траекторий, симметрии и т. д.). И хотя перечисленные проблемы тесно связаны с интегрируемостью, их разрешение носит самостоятельный характер. Более того, данный аспект стимулирует развитие качественного аппарата.

1.2. Некоторые современные результаты

Проблема моделирования движения твёрдого тела в среде опирается на возможные модельные ограничения в задаче и на развивающийся математический аппарат. Так, в [152, 154] исследовалась задача Чаплыгина о свободном падении в безграничном объёме идеальной жидкости тяжёлого тела, имеющего плоскость симметрии. При этом анализировались свойства траекторий, а в [148, 149]

характеризовались свойства поверхностей Бернулли постоянной кривизны для сжимаемой сплошной среды.

При общих предположениях о характере аэродинамического воздействия в [173—176] были исследованы вопросы существования и устойчивости стационарных режимов движения в среде. Интересна также задача об устойчивости перманентного вращения тела в потоке среды (режима авторотации [213], см. также [60]). Специальная конструкция поверхности тела и гипотеза о квазистатическом воздействии среды позволили сформулировать полную схему сил, в которую входят массовые, геометрические и аэродинамические характеристики. Исследованы режим авторотации и его устойчивость. Смоделирован *эффект Магнуса*, неконсервативный характер которого оказывает заметное влияние на свойство устойчивости вращения тел в среде.

Теория функции Рэлея хорошо продемонстрирована при изучении падения тяжёлой однородной пластинки прямоугольной формы в сопротивляющейся среде [152, 154]. Вместе с вязким сопротивлением, задаваемым функцией Рэлея, учитывается эффект присоединённых масс.

В рамках теории полёта в атмосфере осесимметричного вращающегося твёрдого тела исследована задача максимизации дальности полёта [173—176]. В качестве управления рассматривается угловая скорость вращения тела вокруг оси симметрии.

Интересные модели взаимодействия освещены в [39—42]. Влияние аэродинамических сил на вращение и ориентацию спутника на орбите чётко обосновывается с точки зрения качественной теории. Основные же эффекты динамики вращательного движения спутников под действием моментов, в том числе и аэродинамических, рассмотрены в [41], динамика вращательного движения небесных тел в гравитационных полях с упором на резонансные эффекты — в [40].

На работе [202] остановимся подробнее. В ней построены модельные динамические системы, позволившие исследовать движение центра масс динамически симметричного тела пространственной аэродинамической формы с высокими несущими свойствами при нестационарном полёте. В рамках квазистационарной линеаризованной модели аэродинамического воздействия, не учитывающей демпфирующих моментов аэродинамических сил, выявлено демпфирующее влияние подъёмной силы и найдены ограничения на аэродинамические коэффициенты, соблюдение которых обеспечивает эффективное затухание угловых колебаний тела. Для условий высокоскоростного полёта, когда аэродинамическое воздействие на тело существенно превышает влияние силы тяжести, получено аналитическое решение линеаризованной по части переменных нестационарной динамической системы, описывающей движение тела относительно центра масс. Аппарат получения описанных результатов строго обсуждался в [203], где разработана библиотека прикладных программ, обеспечивающих многооконное представление графической информации о поведении различных компонент вектора состояния динамической модели. Данный цикл работ был начат около десяти лет назад [201] и в настоящее время развивается в лаборатории навигации и управления Института механики МГУ им. М. В. Ломоносова.

1.3. Последовательность шагов при моделировании

Вообще говоря, общая проблема исследования движения тела в поле силы сопротивления «упирается» в отсутствие полного описания данного силового поля. Как известно, позиционную составляющую поля силы сопротивления в принципе можно измерить в стационарном эксперименте. А вот составляющая силового поля, отвечающая за квазискорости системы, возникает лишь при нестационарном движении тела.

Поэтому процесс описания силового поля представляет собой последовательность шагов. Сначала изучается предварительная модель силового поля и строится семейство механических систем, движение которых обладало бы различными характеристиками, существенно зависящими от тех параметров модели, информация о которых неполна или отсутствует вовсе. В результате исследования такой модели возникают вопросы, ответы на которые в рамках принятой модели не могут быть найдены. Тогда разработанные объекты становятся предметом детального экспериментального исследования на втором шаге. Такой эксперимент либо предлагает ответы на сформулированные вопросы и вносит в предварительно построенную модель необходимые коррективы, либо выявляет новые вопросы, которые приводят к необходимости повторения начального шага, но уже на новом уровне понимания проблемы.

Такой подход связан с описанием стационарных режимов движения, их ветвлением, бифуркацией, анализом устойчивости и неустойчивости, выявлением условий для перестроек, возникновения регулярных или нерегулярных (т. е. *хаотических*) колебаний.

На некоторые вопросы качественного характера иногда удаётся получить ответы, обсуждая традиционную проблему аналитической механики — проблему наличия полного набора первых интегралов у построенной динамической системы. В то же время изучение поведения динамической системы «в целом» часто заставляет обращаться к численному эксперименту. При этом возникает необходимость в разработке новых вычислительных алгоритмов и качественных методов или усовершенствовании известных.

В работе изучается задача о движении тела при условии, что линия действия силы, приложенной к телу, не меняет своей ориентации относительно тела, а лишь может смещаться параллельно самой себе в зависимости от угла атаки и, возможно, от других фазовых переменных. Подобные условия возникают при движении пластины, так сказать, с «большими» углами атаки в среде при струйном обтекании (при этом, вообще говоря, жидкость считается идеальной, хотя всё это справедливо и для жидкостей с малой вязкостью, прежде всего для воды) [113, 238, 266, 267] или при отрывном [250] (что вполне удовлетворительно подтверждает эксперимент). Таким образом, *основным объектом исследования* является семейство тел, часть поверхности которых имеет плоский участок, обтекаемый средой по законам струйного обтекания.

Используемая математическая модель движения твёрдого тела уже анализировалась ранее. Так, в [132, 178—180, 229] построен фазовый портрет физического маятника, помещённого в поток среды. Динамическая система, описывающая движение маятника, обладает нетривиальными нелинейными свойствами, что определяет необходимость дальнейшего полного нелинейного анализа и возможного создания методики исследования. В [130, 227] разобран вопрос об устойчивости прямолинейных движений свободного тела при струйном обтекании. Исследование проведено на базе линеаризованных уравнений движения тела. Поэтому, следуя [132—134, 228, 231], для начала опишем более конкретно линейную модель.

1.4. Физические предположения

Предположим, что твёрдое тело массы m совершает плоскопараллельное движение в среде с квадратичным законом сопротивления и что некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой плоскую пластину, находящуюся в условиях струйного обтекания средой. Это означает, что воздействие среды на пластину сводится к силе \mathbf{S} (приложенной в точке N), линия действия которой ортогональна пластине. Пусть остальная часть поверхности тела размещена внутри объёма, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края пластины, и не испытывает действия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа тела в воду.

Допустим, что среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения. Это возможно при выполнении двух условий, а именно:

- 1) скорость движения тела ортогональна пластине AB ;
- 2) перпендикуляр, опущенный из центра тяжести C тела на плоскость пластины, принадлежит линии действия силы \mathbf{S} (рис. 1).

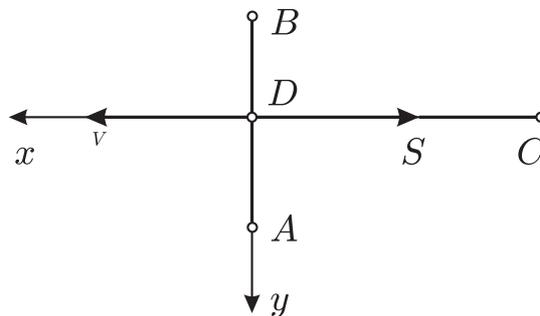


Рис. 1. Прямолинейное поступательное торможение (невозмущённое движение)

1.4.1. Гипотеза квазистационарности и фазовые переменные

Свяжем с телом правую систему координат $Dxyz$, ось z которой движется параллельно самой себе, и будем считать для простоты плоскость Dzx плоскостью геометрической симметрии тела. Это обеспечит выполнение условия 2) при движении, удовлетворяющем условию 1) (рис. 2).

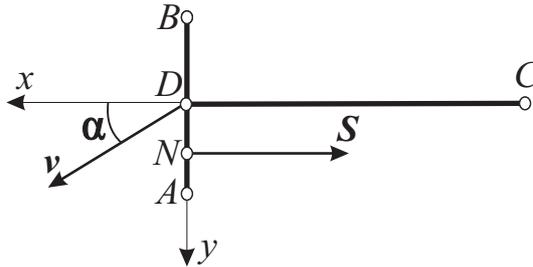


Рис. 2. Плоскопараллельное взаимодействие тела со средой

Для построения динамической модели введём фазовые координаты: $v = |\mathbf{v}|$ — величина скорости \mathbf{v} точки D (см. рис. 2), α — угол между вектором \mathbf{v} и осью x , Ω — алгебраическое значение проекции абсолютной угловой скорости тела на ось z .

Примем, что величина силы \mathbf{S} квадратично зависит от v с неотрицательным коэффициентом s_1 ($S = s_1 v^2$). Обычно s_1 представляют в виде

$$s_1 = \frac{1}{2} \rho P c_x,$$

где c_x уже безразмерный коэффициент лобового сопротивления (ρ — плотность среды, P — площадь пластины). Этот коэффициент зависит от угла атаки, *числа Струхалия* и других величин, которые обычно считают параметрами. Мы же в дальнейшем вводим дополнительную фазовую переменную «типа Струхалия»,

$$\omega = \frac{\Omega D}{v},$$

где D — характерный поперечный размер пластины (не путайте с точкой D). Ограничимся зависимостью c_x от пары переменных (α, ω) , т. е. будем считать величину s_1 (впрочем, как и y_N) функцией пары безразмерных переменных (α, ω) .

Зададим (пока чисто формально) зависимость величин s_1 и ординаты y_N точки N от фазовых координат (α, ω) . Система динамических уравнений должна допускать частное решение вида

$$\alpha(t) \equiv 0, \quad \omega(t) \equiv 0.$$

Поэтому для функции $y_N(\alpha, \omega)$ имеем условие $y_N(0, 0) = 0$, а в линейном случае следует принять, что

$$y_N = D(k\alpha - h\omega),$$

где k и h — некоторые постоянные. Зависимостью s_1 от α и ω , в силу линейности приближения, можно пренебречь.

В дальнейшем для учёта направления действия силы \mathbf{S} введём знакопеременную вспомогательную функцию

$$s(\alpha, \omega) = s_1(\alpha, \omega) \operatorname{sign} \cos \alpha.$$

1.4.2. Ключевые параметры

Таким образом линеаризованная модель силового воздействия среды содержит три параметра s , k , h , которые определяются формой пластины в плане. Как уже отмечалось, первый из этих параметров — коэффициент s — *размерный*. Параметры же k , h являются *безразмерными* в силу способа их введения.

Отметим, что величины s , k могут быть экспериментально определены путём весовых измерений в установках типа гидро- или аэродинамических труб. В [113, 400] имеется также информация о теоретическом определении этих величин для отдельных форм пластин (см. также [122, 129, 131, 137, 246, 384]). Эта информация позволяет считать, что $k > 0$. Что же касается параметра h , то даже сама необходимость введения его в модель априори не очевидна.

1.5. Линеаризованные уравнения движения

Уравнения движения центра масс в проекциях на оси Dx , Dy связанной системы координат и уравнение изменения кинетического момента относительно оси Кёнига с точностью до линейных по α , Ω членов имеют следующий вид (здесь σ — расстояние DC , I — центральный момент инерции тела):

$$\dot{v} = -\frac{sv^2}{m}, \tag{1}$$

$$v\dot{\alpha} - \frac{sv^2\alpha}{m} + v\Omega - \sigma\dot{\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$I\dot{\Omega} = sDv^2 \left(k\alpha - \frac{hD\Omega}{v} \right). \tag{3}$$

Считая $v \neq 0$, с помощью обычного для таких систем введения натурального параметра σ_1 ($v dt = D d\sigma_1$), замены $\omega = D\Omega/v$ (см. выше) переменной Ω и очевидной формулы дифференцирования

$$D(\dot{}) = v \frac{d}{d\sigma_1} () = v()'$$

приходим к системе

$$v' = -\frac{sv}{m}D, \quad (4)$$

$$I\omega' = \omega(I - mD^2h)\frac{Ds}{m} + sD^3k\alpha, \quad (5)$$

$$\alpha' = -\omega\left(1 + \frac{s\sigma D^2}{I}h\right) + sD\left(\frac{1}{m} + \frac{k\sigma D}{I}\right)\alpha, \quad (6)$$

в которой два последних уравнения отделились от первого, тем самым образовав независимую систему второго порядка (5), (6), и могут быть исследованы отдельно.

Преобразуем эти уравнения: исключив из них α , введя угол поворота ϕ по формуле $\phi' = \omega$, получим их линейный интеграл в форме

$$\alpha - \omega\left(\frac{I}{kmD^2} + \frac{\sigma}{D}\right) + \phi\left(1 + \frac{\sigma s}{m} + \frac{Is}{km^2D} - \frac{hsD}{km}\right) = b = \text{const},$$

с учётом которого уравнение для угла поворота ϕ примет вид

$$I\phi'' + \phi'sD\left(D^2h - D\sigma k - \frac{2I}{m}\right) + \phi sD^3\left(k + \frac{k\sigma s}{m} + \frac{Is}{m^2D} - \frac{hsD}{m}\right) = ksD^3b.$$

Нетрудно видеть, что оно имеет вид уравнения линейного маятника, при некоторых условиях совершающего колебания около некоторого положения ϕ_* , определяемого значением b линейного интеграла.

При $h = 0$ коэффициент так называемого приведённого демпфирования отрицателен, а коэффициент при позиционной составляющей положителен, что позволяет говорить о колебательной неустойчивости решения $\phi = \phi_*$. Напротив, при достаточно большом h решение $\phi = \phi_*$ можно сделать неустойчивым и к тому же теряющим свой колебательный характер, поскольку коэффициент позиционной составляющей становится отрицательным.

Но главное, что по причине многопараметричности данного линейного маятника при некоторых конечных значениях h допустима колебательная устойчивость решения $\phi = \phi_*$, поскольку оба вышеупомянутых коэффициента в принципе могут оказаться положительными.

1.6. Эксперимент

Для описания результатов и конкретных свойств движения тела в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова В. А. Ерошиным и В. М. Макариным были проведены эксперименты по регистрации движения в воде однородных круговых цилиндров. Благодаря эксперименту стало возможным определение безразмерных параметров k , h воздействия среды на твёрдое тело, чему посвящён, в частности, раздел 3.

Эксперимент позволил сделать несколько важных выводов.

Первый: *прямолинейное стационарное свободное торможение тела (в воде) неустойчиво*, по крайней мере по отношению к углу атаки и угловой скорости.

Второй вывод, полученный из проведённого натурального эксперимента, следующий: *при моделировании воздействия среды на тело необходимо учитывать дополнительный параметр, характеризующий вращательную производную момента по угловой скорости тела*. Этот параметр вносит в систему диссипацию. В данном линейном приближении учитываемый демпфирующий момент линейно зависит и от угловой скорости тела.

Для некоторых случаев величина коэффициента демпфирующего момента при движении тел в воде уже была оценена в [123, 124]. Данная оценка подтверждает неустойчивость прямолинейного движения твёрдого тела в воде. Чисто формально, увеличивая величину коэффициента демпфирования, возможно достижение устойчивости данного движения, но фактически обеспечить данную устойчивость трудно. Прямолинейное движение твёрдого тела в некоторых средах (например, в глине) устойчиво, как показывает эксперимент [46–48]. Возможно, данная устойчивость достигается благодаря наличию в системе значительного демпфирования со стороны среды или наличию сил, касательных к пластине.

Если считать, что дополнительное демпфирующее воздействие среды на тело носит чисто диссипативный характер, то можно ограничиться областью положительных значений параметра момента демпфирования, поскольку априори его знак не очевиден. Величина данного параметра пропорциональна поперечному размеру пластины, а для создания условий устойчивости рассматриваемого движения необходимо учитывать и длину движущегося тела. Поэтому для достаточно длинных тел, движущихся в воде, вклад дополнительной диссипации в характер изменения угла ориентации тела выражается лишь в некотором незначительном уменьшении положительного показателя экспоненты, отвечающей за неустойчивость движения.

1.7. Начало нелинейного анализа

Первый вывод, сделанный из эксперимента, заставляет нас рассматривать класс возможных движений тела при малых углах атаки в качестве опорного для изучения класса свободного торможения тела с конечными углами атаки. Для разных тел углы атаки при движении в среде при некоторых условиях вполне могут принимать практически любое значение из интервала $(0, \pi/2)$, и лишь при углах, близких к $\pi/2$, неизбежен замыв боковой поверхности. Таким образом, возникает необходимость продолжения функций y_N и s на конечные углы атаки, т. е. расширение области определения пары динамических функций на интервал $(0, \pi/2)$. Но фактически продолжать динамические функции необходимо на всю числовую прямую, что будет ясно из следующих рассуждений.

Представим летающий аппарат, совершающий плоскопараллельное движение над водой. При этом сам аппарат взаимодействует с водой посредством некоторой конструкции (например, киля), содержащей участок плоской поверхности (пластины), который и обтекается водой при движении над ней летательного аппарата. Можно считать, что плоская пластина взаимодействует с водой по законам струйного обтекания. Такой летательный аппарат подобен хорошо известному экраноплану [200].

Плоскопараллельное движение летательного аппарата над водой обеспечивается при помощи стабилизации поперечных колебаний, а в частности для экраноплана — наличием самого экрана [79, 80, 200].

При движении над водой такого летательного аппарата (или экраноплана) упомянутая плоская пластина может фактически двигаться в воде с любыми (вещественными) углами атаки, в том числе и «разрезать» воду, т. е. двигаться в воде с углами атаки, как близкими к $\pi/2$, так и принимающими это значение. Таким образом, динамические функции для такой пластины можно распространить на любые углы атаки.

1.7.1. Нелинейные уравнения

Для того чтобы в дальнейшем перейти к более полному описанию движения свободного тела, представим уравнения динамики

$$mw_c = F, \quad I\dot{\Omega} = M, \quad (7)$$

полученные ранее в линейном виде (см. (1)–(3)), следующим образом:

$$\dot{v} \cos \alpha - \dot{a}v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = \frac{F_x}{m}, \quad (8)$$

$$\dot{v} \sin \alpha + \dot{a}v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega} = 0, \quad (9)$$

$$I\dot{\Omega} = y_N(\alpha, \omega)F_x, \quad \omega = \frac{D\Omega}{v}. \quad (10)$$

В различных вариантах движения тела, рассматриваемых ниже, обобщённая сила F_x , как правило, квадратична по скоростям (v, Ω) и явно зависит от знакопеременной вспомогательной функции $s(\alpha, \omega)$ (например, в случае свободного торможения тела $F_x(\alpha, v, \Omega) = -s(\alpha, \omega)v^2$). Таким образом, класс мыслимых тел и их мыслимых движений определяет некоторую пару динамических функций $(s(\alpha, \omega), y_N(\alpha, \omega))$, принадлежащих к определённым функциональным классам.

1.7.2. Классы динамических функций

Первым этапом полного нелинейного исследования движения тела в среде в условиях квазистационарности является исследование соответствующих динамических систем, в которых не учитывается демпфирование (в частности, в линейном случае $h = 0$). Учёт демпфирования является следующим трудоёмким этапом исследования проблемы, который в данной работе проведён достаточно подробно.

Для начала рассмотрим случай, когда пара динамических функций (y_N, s) зависит лишь от угла атаки. При этом для качественного описания данной пары функций используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания.

Вводимые классы динамических функций достаточно широки. Они состоят из функций достаточно гладких, 2π -периодических ($y_N(\alpha)$ нечётная, а $s(\alpha)$ чётная), удовлетворяющих следующим условиям: $y_N(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причём $y'_N(0) > 0$, $y'_N(\pi) < 0$ (класс функций $\{y_N\} = Y$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причём $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{s\} = \Sigma$). Как y_N , так и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$. Таким образом,

$$y_N \in Y, \tag{11}$$

$$s \in \Sigma. \tag{12}$$

В частности, аналитические функции

$$y_N(\alpha) = y_0(\alpha) = A \sin \alpha \in Y, \tag{13}$$

$$s(\alpha) = s_0(\alpha) = B \cos \alpha \in \Sigma, \quad A, B > 0, \tag{14}$$

служат типичными представителями описанных классов и соответствуют функциям воздействия среды, полученным С. А. Чаплыгиным при исследовании плоскопараллельного обтекания плоской пластины бесконечной длины однородным потоком среды.

В дальнейшем в рассматриваемых динамических системах возникает произведение $F(\alpha) = y_N(\alpha)s(\alpha)$. Из вышеперечисленных условий следует, что F — достаточно гладкая нечётная π -периодическая функция, удовлетворяющая следующим условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{F\} = \Phi$). Таким образом,

$$F \in \Phi. \tag{15}$$

В частности, аналитическая функция

$$F = F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in \Phi \tag{16}$$

также является типичным представителем возникающего класса функций Φ (и также соответствует вышеупомянутому случаю С. А. Чаплыгина).

Объясним необходимость широкого выбора классов функций Y и Σ . Плоская пластина является геометрическим сечением плоскостью движения той части поверхности тела, которая взаимодействует со средой и является плоской. Геометрическая же форма такой плоской области может быть совершенно различной. Кроме того, хорда, лежащая в плоскости области, может по-разному определять плоскость движения самого тела (в случае плоскопараллельного движения). Последние обстоятельства и позволяют отнести две возникающие динамические функции к определённым классам. Как указано выше, на эти функциональные классы накладываются достаточно слабые условия, поэтому

данные классы достаточно широки. Они заведомо включают допустимые конкретные функции, взятые для каждого мыслимого тела и для каждого мыслимого движения.

Таким образом, для исследования обтекания пластины средой используются *классы динамических систем*, определённые с помощью пары динамических функций, что значительно усложняет проведение глобального нелинейного анализа.

Но, конечно, не каждой конкретной паре динамических функций можно поставить в соответствие мыслимое твёрдое тело со своим движением. Поэтому исследование данной проблемы для достаточно широких классов динамических функций позволяет говорить об относительно полном рассмотрении задачи о движении тела в среде в рамках данных модельных предположений в условиях квазистационарности.

1.8. Направления, развиваемые в работе

Укажем на следующие направления, развиваемые в работе. Первые два направления являются традиционными для аналитической механики.

1. *Разработка качественной методики исследования нелинейных систем диссипативного характера.*

Такая методика позволит ответить на ряд вопросов нелинейного анализа, в частности на главный для нас его вопрос: *возможно ли найти пару функций y_n и s из некоторых классов, такую, чтобы в конечной окрестности начала координат на фазовой плоскости y отщеплённой системы существовали бы устойчивые предельные циклы?*

2. *Поиск возможных интегрируемых случаев.*

Построить общую теорию исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, пусть даже и не самого общего вида, не представляется возможным. Поэтому данная работа не является очередной попыткой в этом направлении. Она лишь обобщает качественные исследования в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, начатые уже много лет назад. Тогда пришлось столкнуться с динамическими системами, обладающими очень интересными свойствами.

Третье направление характерно для прикладной аэродинамики и является специфическим в рамках данной работы.

3. *Поиск возможных аналогий между динамикой движения закреплённых тел и тел свободных.*

1.8.1. Главный прикладной вопрос нелинейного анализа

Неустойчивость прямолинейного поступательного торможения позволяет поставить главный вопрос нелинейного анализа в исследовании конечной окрестности такого движения. А именно, *возможно ли найти пару динамических функций y_N и s для описания мыслимого движения тела, такую, чтобы*

в конечной окрестности данного стационарного движения существовали бы устойчивые предельные циклы.

Одним из основных результатов работы является *частично отрицательный ответ* на этот вопрос, а именно, что *при квазистатическом описании взаимодействия среды с телом, когда динамические величины y_N и s зависят лишь от угла атаки, для любой допустимой пары полученных динамических функций $y_N(\alpha)$ и $s(\alpha)$ во всём диапазоне конечных углов атаки на интервале $\alpha \in (0, \pi/2)$ отсутствуют какие-либо автоколебания в системе.* Математическая сторона данного вопроса на качественном уровне исследуется в разделе 4.

Для возможного достижения *положительного ответа на главный вопрос нелинейного анализа* при моделировании взаимодействия тела со средой учитывается дополнительное демпфирующее воздействие со стороны среды, которое вносит в систему диссипацию. Поэтому, как будет показано в разделе 10, в принципе при выполнении некоторых дополнительных условий в рамках рассматриваемой модели возможно возникновение устойчивых автоколебаний, однако поиск тела, обладающего необходимыми свойствами, требует проведения дополнительного эксперимента. Данный результат не только является одним из основных в настоящей работе, но и открывает *новое направление* в аналитическом исследовании взаимодействия тела со средой при учёте демпфирующего воздействия со стороны среды.

1.8.2. О переменной диссипации в системе

Как будет показано в разделе 3, после некоторых упрощений общая система (8)—(10) приводится к маятниковым системам второго порядка, в которых присутствует линейная диссипативная сила с переменным коэффициентом, имеющим при разных углах атаки разный знак.

В данном случае, таким образом, будем говорить о системах с так называемой *переменной диссипацией*, где термин «переменный» относится не столько к величине коэффициента диссипации, сколько к его *знаку*.

В среднем за период по углу атаки диссипация может быть как положительной, так и отрицательной и равной нулю. В последнем случае будем говорить о *системах с переменной диссипацией с нулевым средним*.

1.8.3. Механические и топологические аналогии

В дальнейшем необходимо сразу же отметить важную механическую аналогию, возникающую на базе качественных свойств стационарного движения свободного тела и равновесия маятника в потоке среды. Такая аналогия позволяет перенести свойства нелинейных динамических систем для маятника на динамические системы для свободного тела и получить некоторые топологические аналогии. Например, при выполнении условия (16) угол поворота

маятника полностью эквивалентен углу атаки при движении свободного тела [218, 230, 232, 233, 407]. Если же условие (16) (группа условий (13), (14)) не выполнено, то угол атаки свободного тела и угол поворота маятника траекторно топологически эквивалентны (о такой эквивалентности см. разделы 5, 6, 8).

1.8.4. Общий характер симметрий в системе для плоской и пространственной динамики

Более того, при дополнительных условиях данная эквивалентность распространяется и на пространственный случай, что позволяет говорить об *общем характере симметрий, имеющих в системе как при плоскопараллельном, так и при пространственном движениях* (о плоском и пространственном вариантах маятника см. разделы 6 и 8, а также [269, 270, 274, 275, 279—282, 284—287, 291—294, 296, 300—302, 304, 306, 308, 311, 315, 320, 323—325, 329, 331, 336, 337, 347, 349, 353, 360, 368, 402, 404, 406, 408, 409, 423, 429, 433, 440, 449, 455]).

Мы подошли к ещё одной проблеме — *распространению модели описания свободного торможения на пространственный случай*. Данная задача является следующим трудоёмким этапом исследования, кроме того, степень сложности натурального эксперимента в данном случае значительно повышается. Необходимо также отметить, что при исследовании пространственного свободного торможения может быть получена аналогичная линейная динамическая система, позволяющая использовать методику определения параметров воздействия среды на твёрдое тело при пространственном движении (о такой методике для плоского движения см. раздел 3). При этом пучки траекторий из плоской динамики представляют собой проекции аналогичных пространственных пучков.

Заметим, что фактически при проведении каждого натурального эксперимента снималась информация лишь об одной точке. Если становится возможным проведение повторного эксперимента, то может быть получена информация хотя и близкая к предыдущей, но отличная от неё. Тем самым скопление большого количества экспериментальных точек создаёт не только более полное представление о действительной траектории движения, но и некоторые трудности в определении как действительных начальных условий движения, так и безразмерных параметров воздействия среды на тело. Для преодоления таких трудностей было бы целесообразно для каждой экспериментальной траектории получать информацию хотя бы о двух точках, которые будут отвечать одним и тем же начальным условиям движения (об исследовании эксперимента см. раздел 3) [236].

Поскольку выше сформулирован главный вопрос нелинейного анализа, после обсуждения линеаризованной задачи в разделе 3 сформирован ряд нелинейных динамических систем в пространстве квазискоростей, зависящий от двух динамических функций и описывающий различные классы движений тела в среде в условиях квазистационарности. Полный нелинейный анализ таких систем проводится в дальнейших разделах как ранее известными методами качественной

теории, так и новыми методами, полученными исключительно для возникающих систем с переменной диссипацией.

1.8.5. Общая методика исследования

Утверждения, полученные в работе для систем с переменной диссипацией (см. раздел 3), явились продолжением теории Пуанкаре—Бендиксона для систем на замкнутых двумерных многообразиях и топологической классификации таких систем.

Задачи, рассматриваемые в работе, стимулируют развитие качественного аппарата исследования, поэтому естественным образом возникает качественная теория систем с переменной диссипацией.

Основной упор при этом делается на топологическую классификацию типов траекторий и областей их расположения в фазовом пространстве. Анализ проводится подобно как классическим работам [9—21, 43, 49, 51, 70, 71, 78, 82, 85—87, 102, 103, 106, 110—112, 114, 139, 143, 146, 147, 159—162, 165—172, 182, 183, 197, 198, 207—211, 214—217, 237, 240, 244, 248, 258, 264, 265, 386], так и работам, выпущенным сравнительно недавно [22, 23, 25—31, 35—38, 44, 45, 52, 53, 58, 59, 68, 69, 101, 109, 115—117, 119, 119, 120, 138, 142, 144, 145, 150—158, 163, 181, 184—196, 204, 205, 241—243, 251—257, 261—263, 268, 385, 387, 390, 396—398]. На статье [23] (которая отражает весь спектр проблем качественного характера, изучаемых в работе) остановимся подробнее. В ней даётся обзор современных результатов, связанных с качественным исследованием динамических систем на замкнутых двумерных многообразиях, причём основной упор делается на вопросах полного топологического исследования (в том числе классификации).

Схема динамической системы на сфере, топологическая классификация систем Морса—Смейла [241, 242] на двумерных многообразиях, так называемые транзитивные [241] и сингулярные системы на торе, гомотопический класс вращения полутраекторий систем на замкнутых ориентируемых двумерных многообразиях, необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных систем на замкнутых ориентируемых двумерных многообразиях косвенным или прямым образом связаны с качественными вопросами, затрагиваемыми в работе (особенно в разделе 4). Она посвящена некоторым вопросам качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, как в применении к конкретным динамическим системам, возникающим в динамике твёрдого тела, так и в применении к произвольным динамическим системам на маломерных гладких многообразиях. Следуя Пуанкаре [214, 215], автор уточняет некоторые качественные методы нахождения ключевых траекторий, т.е. таких траекторий, от расположения и топологического типа которых зависит глобальное качественное расположение остальных траекторий. Таким образом можно естественно прийти к полному качественному исследованию динамической системы во всем фазовом пространстве. В разделе 4 также получены условия существования бифуркации рождения устойчивых и неустойчивых предельных циклов для систем, описывающих движение тела в сопротивляющейся

среде при струйном обтекании. Найдены способы нахождения любых замкнутых траекторий в фазовых пространствах таких систем, а также предъявлены признаки отсутствия любых таких траекторий. Теория плоских топографических систем Пуанкаре и систем сравнения распространена на пространственный случай. Изучаются некоторые элементы теории монотонных векторных полей на ориентируемых поверхностях. Предлагается достаточно простая методика доказательства устойчивости по Пуассону незамкнутых траекторий динамических систем.

1.9. Краткое содержание отдельных разделов работы

В разделе 5 вводятся определения относительной структурной устойчивости (относительной грубости) и относительной структурной неустойчивости (относительной негрубости) различных степеней. Последние свойства доказываются для динамических систем, возникающих в динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой.

В разделе 6 качественно исследованы и проинтегрированы два модельных варианта плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде, которые описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Один из случаев движения предполагает наличие некоторой связи в системе. Такая система является относительно структурно устойчивой и топологически эквивалентной закреплённому маятнику, помещённому в поток набегающей среды. Указан первый интеграл в системе, являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных и выражающийся через элементарные функции.

Задачи плоской динамики твёрдого тела, описываемые системами с переменной диссипацией с положительным средним, качественно исследованы в разделе 7. Наиболее интересная в прикладном отношении задача — свободное торможение тела в сопротивляющейся среде. Получены новые семейства топологически неэквивалентных фазовых портретов. Почти каждый портрет семейства (абсолютно) структурно устойчив.

В разделе 8 некоторые результаты плоской динамики переносятся на пространственный случай. В частности, проинтегрирована по Якоби задача о пространственном движении динамически симметричного закреплённого твёрдого тела, помещённого в поток набегающей среды. Данная система топологически эквивалентна пространственному движению твёрдого тела в сопротивляющейся среде, при котором на тело наложена некоторая связь. Пространственное движение твёрдого тела в сопротивляющейся среде, при котором центр масс совершает прямолинейное равномерное движение, также представляет собой динамическую систему с переменной диссипацией с нулевым средним. Её качественное исследование позволяет предъявить пространственную систему сравнения для исследования многих систем с переменной диссипацией с ненулевым средним.

В разделе 9 получено новое семейство фазовых портретов в задаче о пространственном свободном торможении тела в сопротивляющейся среде. Почти каждый трёхмерный портрет такого семейства является (абсолютно) грубым (структурно устойчивым) по Андронову—Понтрягину.

В разделе 10 обсуждаются некоторые следствия введения линейного демпфирования со стороны среды. В задаче о свободном торможении тела в среде на базе нелинейных уравнений исследуется устойчивость прямолинейного поступательного торможения при наличии линейного демпфирующего момента. Показано, что в рамках рассматриваемой модели в принципе могут возникнуть автоколебания, соответствующие предельным циклам, которые рождаются из слабого фокуса (известная бифуркация Андронова—Хопфа). Последний аспект является *возможным положительным ответом* на главный вопрос нелинейного анализа.

В задаче о движении тела в среде при наличии некоторой связи проводится полный нелинейный анализ динамических систем в пространстве квазискоростей. Такие системы также обладают свойством (абсолютной) грубости. Приведён список типичных глобальных фазовых портретов на фазовом цилиндре после перестроек фазовых портретов аналогичных задач, но без учёта демпфирования. Данный раздел открывает *новый этап* исследовательских работ по нелинейному анализу движения тела в сопротивляющейся среде в условиях квазистационарности при учёте демпфирования со стороны среды.

Данный раздел является первым этапом исследования движения тела в среде при учёте демпфирующего момента со стороны среды. Такой момент вносит в систему дополнительную диссипацию (демпфирование), в результате чего прямолинейное поступательное торможение тела, как уже отмечалось, в принципе может стать устойчивым.

Показано также, что для однородных круговых цилиндров, движущихся в воде, прямолинейное поступательное торможение неустойчиво при любых динамических и геометрических параметрах таких цилиндров. Это связано, по-видимому, с движением цилиндров в воде, когда демпфирование со стороны воды незначительно, что не позволяет говорить об устойчивости прямолинейного поступательного торможения. Однако для цилиндров, имеющих внутри себя полость, при некоторых условиях возможно достижение названной устойчивости.

Таким образом, учёт демпфирующего воздействия со стороны среды на твёрдое тело при некоторых условиях приводит к положительному ответу на главный вопрос нелинейного анализа: *при движении тела в среде с конечными углами атаки в принципе возможно возникновение устойчивых автоколебаний. Причём для круговых цилиндров с полостью в принципе возможно возникновение и устойчивых, и неустойчивых автоколебаний!*

Всё перечисленное выше позволяет оценивать результаты работы в совокупности как *новое направление в аналитической динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой.*

2. Полная интегрируемость некоторых классов неконсервативных систем

Как указано в разделе 1, результаты предлагаемой работы появились благодаря исследованию прикладной задачи о движении твёрдого тела в сопротивляющейся среде [178, 179], где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выраженных через конечную комбинацию элементарных функций. Это обстоятельство позволило провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, которыми обладали *грубостью* и сохранялись для систем более общего вида. Полная интегрируемость тех систем была связана с симметриями скрытого типа. Поэтому представляет интерес исследование достаточно широких классов динамических систем, обладающих аналогичными скрытыми симметриями.

Как известно, понятие интегрируемости, вообще говоря, достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать, в каком смысле оно понимается (имеется в виду некий критерий, по которому делается вывод о том, что траектории рассматриваемой динамической системы устроены особенно «привлекательно и просто»), в классе каких функций ищутся первые интегралы и т. д. (см. [1, 25, 28, 49, 70, 81, 84, 88, 89, 95, 96, 99, 103, 105, 108, 114, 119, 138, 147, 150, 156, 177, 182, 197, 215, 225, 228, 230, 239, 244, 245, 256, 262, 272, 291, 292, 295, 303, 309, 312, 313, 322, 330, 335, 338, 340, 343—347, 356—359, 361, 365, 366, 371—375, 420, 425, 426, 433, 444, 458—460]).

В работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причём элементарные. Здесь *трансцендентность понимается не в смысле теории элементарных функций* (например, тригонометрических), а в смысле наличия у функций существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки). При этом их необходимо формально продолжить в комплексную область. Такие системы являются, как правило, сильно неконсервативными (см. [3, 4, 25, 70, 214, 230, 234, 303, 330, 332, 351, 354, 358, 359]).

2.1. Предварительные сведения

Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно трудно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удаётся найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

В данной работе приводятся примеры систем из динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой, и теории колебаний (см. [359, 361]).

В более ранних работах автора рассматривался класс задач из динамики твёрдого тела, в которых характерное время движения тела относительно его центра масс соизмеримо с характерным временем движения самого центра. Как уже указывалось ранее, сложность решения таких задач зависит от многих факторов, в том числе и от характера внешнего силового поля. Например, в случае консервативного поля сил (тяжести) движение тела вокруг своего центра масс может быть сильно хаотичным (классическая задача о движении тяжёлого твёрдого тела вокруг неподвижной точки) [147, 150]. В этом случае построить сколько-нибудь общую теорию интегрирования невозможно; естественная возможность продвинуться дальше — это наложить какие-то ограничения на геометрию твёрдого тела, а также на необходимость обладания силовым полем какими-то группами, пусть даже и скрытых, симметрий.

Предлагаемая работа возникла из задачи движения в сопротивляющейся среде твёрдого тела, поверхностью контакта со средой которого является лишь плоский участок его внешней поверхности. Силовое поле в этом случае строится из соображений воздействия среды на тело при струйном (или отрывном) обтекании в условиях квазистационарности. Оказывается, что изучение движения такого класса тел сводится к системам либо с рассеянием энергии (*диссипативные системы*), либо с её подкачкой (так называемые *системы с антидиссипацией*). Отметим, что подобные задачи уже появлялись в прикладной аэродинамике в исследованиях ЦАГИ (см., например, [246]).

Были также рассмотрены классы плоскопараллельных и пространственных движений твёрдых тел, взаимодействующих со средой, среди которых (в зависимости от числа степеней свободы) можно назвать следующие: движения свободных тел в среде, покоящейся на бесконечности, и частично закреплённых тел, находящихся в потоке набегающей среды [292, 295, 324]. Обстоятельно изучена одна из таких задач, которая имеет наибольшее прикладное значение, — задача о свободном торможении твёрдого тела в сопротивляющейся среде. Кроме того, рассмотрены задачи о движении свободного тела при наличии следящей силы, а также о колебаниях закреплённого маятника, помещённого в поток набегающей среды.

Рассматриваемые ранее задачи стимулируют развитие качественного аппарата исследования, который существенным образом дополняет качественную теорию неконсервативных систем с диссипацией и антидиссипацией (т. е. *системы с диссипативными и разгоняющими силами*).

Итак, ранее было проведено исследование динамических уравнений движения, возникающих при изучении плоской и пространственной динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой, которое подвело к возможному обобщению полученных ранее методов исследования на общие системы, возникающие как в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории динамических систем, так и в теории колебаний.

Были также исследованы качественно нелинейные эффекты в плоской и пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой; проведено обоснование на качественном уровне необходимости введения определенных относительной грубости и относительной негрубости различных степеней (см. [12, 23, 32—34, 65, 85, 110, 112, 204, 230, 241, 242, 275, 279, 281, 282, 288, 299, 310, 317, 339, 364, 380, 396—398, 403, 410, 427, 428, 437, 443, 451—454]).

Проводя качественный анализ, автор ранее

- а) разработал методы качественного исследования диссипативных систем и систем с антидиссипацией, позволившие получить условия бифуркации рождения устойчивых и неустойчивых автоколебаний, а также условия отсутствия любых особых траекторий. Метод исследования плоских топографических систем Пуанкаре и систем сравнения удалось распространить на высшие размерности. Были получены достаточные условия устойчивости по Пуассону (всюду плотности возле себя) некоторых классов незамкнутых траекторий динамических систем (см. [247, 259, 260, 271, 276, 277, 289, 290, 297, 318, 334, 336, 359, 378, 379, 405, 406, 408, 409, 411, 414—417, 421, 438, 439, 441, 442]);
- б) в плоской и пространственной динамике твёрдого тела обнаружил полные списки первых интегралов диссипативных систем и систем с антидиссипацией, являющихся трансцендентными (в смысле классификации их особенностей) функциями, выражающимися в ряде случаев через элементарные функции. Были введены новые определения свойств относительной грубости и относительной негрубости различных степеней, которыми обладают проинтегрированные системы (см. [5, 6, 90, 91, 228, 230, 235, 295, 298, 303, 307, 309, 326—328, 346, 347, 412, 419, 422, 431, 432, 436, 445, 448, 450, 456, 457]);
- в) получил многопараметрические семейства топологически неэквивалентных фазовых портретов, возникающие в задаче о свободном торможении. Почти каждый портрет таких семейств (абсолютно) груб (см. [232, 234, 273, 278, 283, 305, 316, 333, 348, 350, 376, 413, 418, 424, 434, 435]);
- г) обнаружил новые качественные аналогии между свойствами движения свободных тел в сопротивляющейся среде, покоящейся на бесконечности, и закреплённых тел, находящихся в потоке набегающей среды. Техника, разработанная для исследования данных систем, может также быть использована в задачах дифференциальной и топологической диагностики (см., например, [61—67, 321, 338, 361, 379, 381—383, 439, 442, 446]).

Многие результаты данной работы регулярно докладывались на множестве семинаров, в том числе и на семинаре «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. профессора В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина.

Итак, в работе затронуты некоторые аспекты математического моделирования воздействия среды на твёрдое тело в условиях квазистационарности. Эти аспекты формируют начальное представление о возникающих далее проблемах качественного характера.

2.2. Динамические системы с переменной диссипацией и их общие свойства

2.2.1. Общая характеристика динамических систем с переменной диссипацией

Вообще говоря, динамика твёрдого тела, взаимодействующего со средой, как раз та область, где возникают либо диссипативные системы, либо системы с так называемой *антидиссипацией* (подкачкой энергии внутри самой системы). Поэтому становится актуальным построение методики именно для тех классов систем, которые возникают при моделировании движения тел, поверхностью контакта со средой которых является плоский участок — наиболее простая форма — их внешней поверхности.

Поскольку при таком моделировании используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания, возникает необходимость исследования класса динамических систем, которые обладают свойством (относительной) *структурной устойчивости*. Поэтому вполне естественно ввести определения относительной грубости для таких систем. При этом многие из рассматриваемых систем получаются (абсолютно) грубыми по Андронову—Понтрягину [19].

После некоторых упрощений общая система уравнений плоскопараллельного движения может быть сведена к маятниковым системам второго порядка, в которых присутствует линейная диссипативная сила с переменным коэффициентом, который при разных значениях имеющейся в системе периодической фазовой переменной имеет разный знак.

В данном случае будем говорить о системах с так называемой переменной диссипацией, где термин «переменный» относится не столько к величине коэффициента диссипации, сколько к возможной смене его знака (поэтому разумно употреблять термин «знакопеременный»).

В среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация может быть как положительной («чисто» диссипативные системы), так и отрицательной (системы с разгоняющими силами), а также равной нулю. В последнем случае будем говорить о *системах с переменной диссипацией с нулевым средним* (такие системы можно ассоциировать с «почти» консервативными системами).

Как уже отмечалось ранее, также были отмечены важные механические аналогии, возникающие при сравнении качественных свойств стационарного движения свободного тела и равновесия маятника в потоке среды. Такие аналогии носят глубокий опорный смысл, поскольку позволяют перенести свойства нелинейных динамических систем для маятника на динамические системы для свободного тела. И те и другие системы принадлежат к классу так называемых *маятниковых динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним*.

При дополнительных условиях вышеописанная эквивалентность распространяется и на случай пространственного движения, что позволяет говорить об *общем характере симметрий*, имеющихся в системе с переменной диссипацией с нулевым средним как при плоскопараллельном, так и при пространственном движениях (о плоском и пространственном вариантах маятника в потоке среды см. [178, 230, 232, 292, 295, 309, 327, 370]).

2.2.2. Примеры из динамики

Ниже будут отмечены классы существенно нелинейных систем второго и третьего порядков, интегрируемых в трансцендентных (в смысле теории функций комплексного переменного) элементарных функциях. К примеру, таковыми являются пятипараметрические динамические системы, включающие в себя большинство систем, исследовавшихся ранее в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= a \sin \alpha + b\omega + \gamma_1 \sin^5 \alpha + \gamma_2 \omega \sin^4 \alpha + \gamma_3 \omega^2 \sin^3 \alpha + \gamma_4 \omega^3 \sin^2 \alpha + \gamma_5 \omega^4 \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= c \sin \alpha \cos \alpha + d\omega \cos \alpha + \gamma_1 \omega \sin^4 \alpha \cos \alpha + \gamma_2 \omega^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha + \\ &+ \gamma_3 \omega^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \gamma_4 \omega^4 \sin \alpha \cos \alpha + \gamma_5 \omega^5 \cos \alpha.\end{aligned}$$

В этой связи было разумно ввести определения относительной структурной устойчивости (относительной грубости) и относительной структурной неустойчивости (относительной негрубости) различных степеней. Последние свойства доказываются для систем, возникающих в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, например, в [336, 359].

Как известно, (чисто) диссипативные динамические системы (впрочем, как и (чисто) антидиссипативные), которые в нашем случае могут принадлежать к системам с переменной диссипацией с ненулевым средним, являются, как правило, структурно устойчивыми ((абсолютно) грубыми), а вот системы с переменной диссипацией с нулевым средним (которые, как правило, обладают дополнительными симметриями) являются либо структурно неустойчивыми (негрубыми), либо только лишь относительно структурно устойчивыми (относительно грубыми). Последнее утверждение доказать в общем случае затруднительно. Тем не менее введение понятия относительной грубости (а также относительной негрубости различных степеней) позволяет предъявить классы конкретных систем из динамики твёрдого тела, которые обладают вышеуказанными свойствами.

Так, в [232] качественно исследованы и проинтегрированы два модельных варианта плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде, которые описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Такие случаи движения предполагают наличие некоторой неинтегрируемой связи в системе (которая реализуется с помощью некоторой дополнительной следящей силы).

Например, динамическая система вида

$$\dot{\alpha} = \Omega + \beta \sin \alpha, \quad \dot{\Omega} = -\beta \sin \alpha \cos \alpha$$

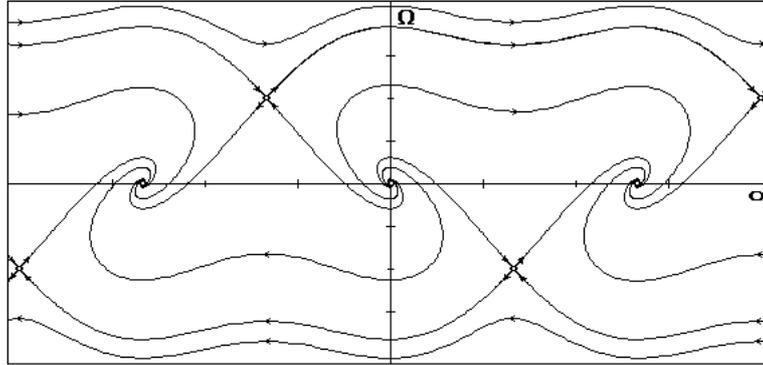


Рис. 3. Относительно грубая динамическая система

является относительно структурно устойчивой (относительно грубой) и топологически эквивалентной системе, описывающей закреплённый маятник, помещённый в поток набегающей среды [230] (её фазовый портрет изображён на рис. 3).

Можно указать её первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки после её продолжения в комплексную область) функцией фазовых переменных и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

Как видно, фазовый цилиндр $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$ квазискоростей рассматриваемой системы имеет интересную топологическую структуру разбиения на траектории. На цилиндре имеются две области (замыкание которых и есть фазовый цилиндр) с совершенно различным характером траекторий.

Первая область — колебательная или финитная (она односвязна (см. рис. 3)) — сплошь заполнена траекториями следующего типа. Почти любая такая траектория начинается в отталкивающейся точке $(2\pi k, 0)$ и кончается в притягивающей $((2k + 1)\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Исключение составляют лишь точки покоя $(\pi k, 0)$ и сепаратрисы, которые либо выходят из отталкивающих точек $(2\pi k, 0)$ и входят в седла S_{2k} и S_{2k+1} , либо выходят из седел S_{2k+1} и S_{2k+2} и входят в притягивающие точки $((2k + 1)\pi, 0)$. Здесь

$$S_k = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, (-1)^k \beta \right).$$

Вторая область — вращательная (она двусвязна (см. рис. 3)) — сплошь заполнена вращательными движениями, подобно вращениям на фазовой плоскости математического маятника. Данные фазовые траектории огибают фазовый цилиндр и являются на нём периодическими.

Хотя рассматриваемая динамическая система и неконсервативна, во вращательной области своей фазовой плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$ она допускает сохранение инвариантной меры с переменной плотностью. Данное свойство характеризует рассматриваемую систему как систему с переменной диссипацией с нулевым средним.

Ключевые сепаратрисы (например, сепаратриса, выходящая из точки $(-\pi/2, \beta)$ и входящая в точку $(3\pi/2, \beta)$) являются границами областей, в каждой из которых движение имеет различный характер. Так, в колебательной области, содержащей притягивающие и отталкивающие точки покоя, почти все траектории имеют в качестве предельных множеств аттракторы и репеллеры. Следовательно, не существует даже абсолютно непрерывной функции, являющейся плотностью инвариантной меры в данной области.

Иначе обстоит дело с областью, сплошь заполненной вращательными движениями. Как было показано ранее, существует гладкая функция, являющаяся плотностью инвариантной меры в области, сплошь заполненной периодическими траекториями, не стягиваемыми по фазовому цилиндру в точку [230].

2.2.3. Первые результаты

Некоторые результаты динамики плоскопараллельного движения переносятся и на пространственный случай, в связи с чем ранее автором ставилась пространственная задача. В частности, был найден полный список интегралов в задаче о пространственном (см., например, [292, 295, 309, 327, 370]) движении динамически симметричного закреплённого твёрдого тела, помещённого в поток набегающей среды. Данная система с переменной диссипацией с нулевым средним топологически эквивалентна пространственному движению твёрдого тела в сопротивляющейся среде, при котором на тело наложена неинтегрируемая связь (которая реализуется с помощью некоторой дополнительной следящей силы).

Пространственное движение твёрдого тела в сопротивляющейся среде, при котором центр масс совершает прямолинейное равномерное движение, также представляет собой динамическую систему с переменной диссипацией с нулевым средним. Её качественное исследование позволяет предъявить удобную пространственную систему сравнения для исследования многих систем с переменной диссипацией с ненулевым средним.

Отметим также, что в [304, 316, 336, 337, 348, 359, 413, 418, 424, 434, 435, 445] получено семейство фазовых портретов в задаче о пространственном свободном торможении тела в сопротивляющейся среде. В этих работах развивается техника исследования окрестности сингулярного положения равновесия, т. е. такого положения равновесия, в котором правые части динамических систем доопределяются лишь по непрерывности. К примеру, при малых фазовых переменных α и Ω у правой части системы имеется особенность типа $1/\alpha$. Эта трудность преодолевается особым построением функции Ляпунова [318].

В результате получено аналогичное плоскопараллельной динамике семейство трёхмерных фазовых портретов.

2.3. Одно из определений системы с переменной диссипацией с нулевым средним

Будем изучать системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих периодическую фазовую координату. Исследуемые системы обладают такими симметриями, при которых в среднем за период по периодической координате сохраняется их фазовый объём. Так, например, следующая маятниковая система с гладкой и периодической по α периода T правой частью $\mathbf{V}(\alpha, \omega)$ вида

$$\dot{\alpha} = -\omega + f(\alpha), \quad \dot{\omega} = g(\alpha), \quad f(\alpha + T) = f(\alpha), \quad g(\alpha + T) = g(\alpha),$$

сохраняет свою фазовую площадь на фазовом цилиндре за период T :

$$\int_0^T \operatorname{div} \mathbf{V}(\alpha, \omega) d\alpha = \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}(-\omega + f(\alpha)) + \frac{\partial}{\partial \omega} g(\alpha) \right) d\alpha = \int_0^T f'(\alpha) d\alpha = 0.$$

Рассматриваемая система эквивалентна уравнению маятника

$$\ddot{\alpha} - f'(\alpha)\dot{\alpha} + g(\alpha) = 0,$$

в котором интеграл от коэффициента $f'(\alpha)$ при диссипативном члене $\dot{\alpha}$ в среднем за период равен нулю.

Видно, что рассматриваемая система имеет такие симметрии, при которых она становится системой с переменной диссипацией с нулевым средним в смысле следующего определения (см. также [306, 336, 339, 354, 359, 438, 447]).

Определение. Рассмотрим гладкую автономную систему $(n + 1)$ -го порядка нормального вида, заданную на цилиндре $\mathbb{R}^n\{x\} \times \mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$, где α — периодическая координата периода $T > 0$. Дивергенцию правой части (которая, вообще говоря, является функцией всех фазовых переменных и не равна тождественно нулю) данной системы обозначим через $\operatorname{div}(x, \alpha)$. Назовём такую систему системой с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним, если функция

$$\int_0^T \operatorname{div}(x, \alpha) d\alpha$$

равна (не равна) тождественно нулю. При этом в некоторых случаях (например, когда в отдельных точках окружности $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$ возникают особенности) данный интеграл понимается в смысле главного значения.

Необходимо заметить, что дать общее определение системы с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним достаточно непросто. Приведённое только что определение использует понятие дивергенции (как известно, дивергенция правой части системы нормального вида характеризует изменение фазового объёма в фазовом пространстве данной системы).

2.4. Системы с симметриями и переменной диссипацией с нулевым средним

Рассмотрим системы вида (точкой обозначена производная по времени)

$$\dot{\alpha} = f_{\alpha}(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha), \quad \dot{\omega}_k = f_k(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha), \quad k = 1, \dots, n, \quad (17)$$

заданные на множестве $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus K \times \mathbb{R}^n\{\omega\}$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, где функции $f_{\lambda}(u_1, u_2, u_3)$, $\lambda = \alpha, 1, \dots, n$, трёх переменных u_1, u_2, u_3 таковы:

$$\begin{aligned} f_{\lambda}(-u_1, -u_2, u_3) &= -f_{\lambda}(u_1, u_2, u_3), & f_{\alpha}(u_1, u_2, -u_3) &= f_{\alpha}(u_1, u_2, u_3), \\ f_k(u_1, u_2, -u_3) &= -f_k(u_1, u_2, u_3). \end{aligned}$$

Множество K или пусто, или состоит из конечного числа точек окружности $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$.

Последние две переменные u_2, u_3 в функциях $f_{\lambda}(u_1, u_2, u_3)$ зависят от одного параметра α , но они выделены в разные группы по следующим причинам. Во-первых, не во всей области определения они однозначно выражаются друг относительно друга, а во-вторых, первая из них нечётная, а вторая — чётная функция α , что по-разному влияет на симметрии системы (17).

Ей поставим в соответствие уже неавтономную систему

$$\frac{d\omega_k}{d\alpha} = \frac{f_k(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}{f_{\alpha}(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)},$$

подстановкой $\tau = \sin \alpha$ приводимую к виду ($k = 1, \dots, n$)

$$\frac{d\omega_k}{d\tau} = \frac{f_k(\omega, \tau, \varphi_k(\tau))}{f_{\alpha}(\omega, \tau, \varphi_{\alpha}(\tau))}, \quad \varphi_{\lambda}(-\tau) = \varphi_{\lambda}(\tau), \quad \lambda = \alpha, 1, \dots, n.$$

Последняя система может иметь, в частности, алгебраическую правую часть (т. е. быть отношением двух полиномов), что иногда помогает искать её первые интегралы в явном виде.

Следующее утверждение погружает рассматриваемый класс систем (17) в класс динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним. Обратное вложение, вообще говоря, не выполняется.

Предложение 2.1. *Системы вида (17) являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним.*

Данное предложение доказывается с использованием вышеперечисленных симметрий системы (17).

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, поскольку можно предъявить множество динамических систем на двумерном цилиндре, являющихся системами с переменной диссипацией с нулевым средним, но не обладающих вышеперечисленными симметриями.

В данной работе в основном будет рассматриваться случай, когда функции $f_{\lambda}(\omega, \tau, \varphi_k(\tau))$ ($\lambda = \alpha, 1, \dots, n$) — полиномы по ω, τ .

Для начала рассмотрим некоторый класс автономных систем на двумерном цилиндре $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$. Так, к примеру, маятниковым системам (возникающим в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой) с параметром $\beta > 0$ [230, 334, 377] (см. также рис. 3 при $\omega \leftrightarrow \Omega$, $\alpha \leftrightarrow -\alpha$)

$$\dot{\alpha} = -\omega + \beta \sin \alpha, \quad \dot{\omega} = \sin \alpha \cos \alpha, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\omega + \beta \sin \alpha \cos^2 \alpha + \beta \omega^2 \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= \sin \alpha \cos \alpha - \beta \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \beta \omega^3 \cos \alpha \end{aligned} \quad (19)$$

в переменных (ω, τ) поставим в соответствие уравнения с алгебраическими правыми частями

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} &= \frac{\tau}{-\omega + \beta\tau}, \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= \frac{\tau + \beta\omega[\omega^2 - \tau^2]}{-\omega + \beta\tau + \beta\tau[\omega^2 - \tau^2]} \end{aligned}$$

соответственно. При этом системы (18) и (19) являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним, что нетрудно проверить напрямую.

Более того, каждая из них обладает первым интегралом, являющимся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного) функцией, выражающейся через конечную комбинацию элементарных функций [230, 232].

Например, система (18) обладает первым интегралом следующего вида (в зависимости от значения постоянной β возможны три случая, соответствующие наличию у фазового портрета системы фокусов, узлов или вырожденных узлов):

$$\begin{aligned} \beta^2 - 4 < 0: \quad & [\Omega^2 + \beta\Omega \sin \alpha + \sin^2 \alpha] \times \\ & \times \exp\left\{ \frac{2\beta}{\sqrt{-\beta^2 + 4}} \operatorname{arctg} \frac{2\Omega + \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \sqrt{-\beta^2 + 4}} \right\} = \text{const}; \\ \beta^2 - 4 > 0: \quad & |2\Omega + (\beta + \sqrt{\beta^2 - 4} \sin \alpha)|^{\sqrt{\beta^2 - 4} - \beta} \times \\ & \times |2\Omega + (\beta - \sqrt{\beta^2 - 4} \sin \alpha)|^{\sqrt{\beta^2 - 4} + \beta} = \text{const}; \\ \beta^2 - 4 = 0: \quad & |2\Omega + \beta \sin \alpha| \times \exp\left\{ -\frac{\beta \sin \alpha}{2\Omega + \beta \sin \alpha} \right\} = \text{const}. \end{aligned}$$

Система же (19) имеет фазовый портрет трёх различных типов в зависимости от различных значений параметра β (рис. 4, 5, 6, $\omega \leftrightarrow \Omega$, $\alpha \leftrightarrow -\alpha$).

В выражении её первого интеграла также в зависимости от значения постоянной β возможны три случая, соответствующие наличию у фазового портрета системы фокусов, узлов или вырожденных узлов.

Параметр β представим в виде произведения

$$\beta = \sigma^2 n_0^2,$$

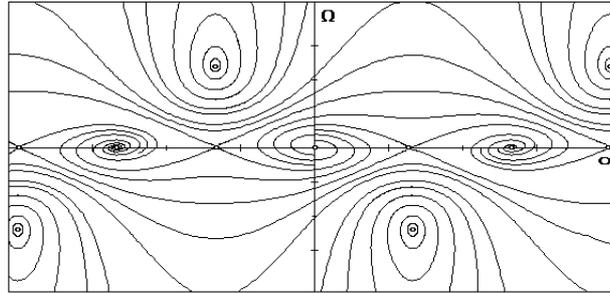


Рис. 4. Относительно грубая динамическая система с гетероклинической ситуацией

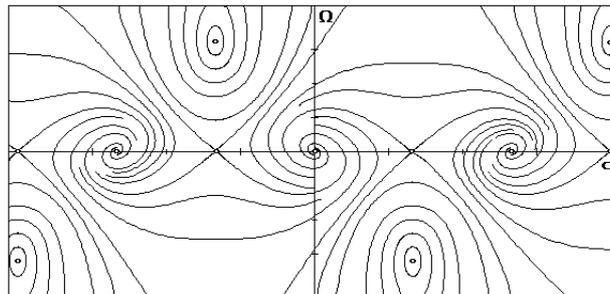


Рис. 5. Относительно негрубая динамическая система

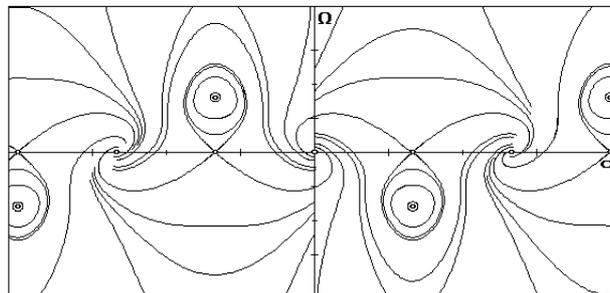


Рис. 6. Относительно грубая динамическая система с гомоклинической ситуацией

после чего поставим в соответствие системе (19) дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{-n_0^2\tau + \sigma\omega[\omega^2 - n_0^2\tau^2]}{\omega + \sigma n_0^2\tau + \sigma\tau[\omega^2 - n_0^2\tau^2]}, \quad \tau = -\sin \alpha.$$

Введём обозначения

$$C_1 = 2 - \sigma n_0, \quad C_2 = \sigma n_0, \quad C_3 = -2 - \sigma n_0.$$

Совершая ряд замен переменных по формулам

$$\omega - n_0\tau = u_1, \quad \omega + n_0\tau = v_1, \quad u_1 = v_1 t_1, \quad v_1^2 = p_1,$$

где $v_1 \neq 0$, получим уравнение типа Бернулли:

$$2p_1 \left[C_1 t_1 + C_2 + \frac{2\sigma}{n_0} t_1 p_1 \right] = \frac{dp_1}{dt_1} [C_3 - C_1 t_1^2].$$

Известной заменой $p^{-1} = q_1$ при $p_1 \neq 0$ приведём последнее уравнение к форме

$$\dot{q}_1 = a_1(t_1)q_1 + a_2(t_1),$$

где

$$a_1(t_1) = \frac{2(C_1 t_1 + C_2)}{C_1 t_1^2 - C_3}, \quad a_2(t_1) = \frac{4\sigma t_1}{n_0(C_1 t_1^2 - C_3)}.$$

(Точкой здесь обозначена производная по t_1 .)

Общее решение линейного однородного уравнения представится в виде

$$q_{1 \text{ одн}}(t_1) = k(C_1 t_1^2 - C_3)Q(t_1), \quad k = \text{const},$$

где функция Q в зависимости от значения постоянной C_1 имеет вид

$$Q(t_1) = \begin{cases} e^{t_1}, & C_1 = 0, \\ e^{2 \frac{C_2}{\sqrt{-C_1 C_3}} \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{C_1}{C_3}} t_1}, & C_1 > 0, \\ \left(\frac{\sqrt{-C_1} t_1 + \sqrt{-C_3}}{\sqrt{-C_1} t_1 - \sqrt{-C_3}} \right)^{\frac{C_2}{\sqrt{C_1 C_3}}}, & C_1 < 0. \end{cases}$$

Для получения решения неоднородного уравнения будем считать величину k функцией t_1 , она найдётся квадратурой

$$k(t_1) = \frac{4\sigma}{n_0} \int Q^{-1}(t_1) \frac{t_1}{(C_1 t_1^2 - C_3)^2} dt_1.$$

Таким образом, трансцендентный первый интеграл системы (19) примет вид

$$Q^{-1}(t_1)q_1(C_1 t_1^2 - C_3)^{-1} - \frac{4\sigma}{n_0} \int_{t_0}^{t_1} Q^{-1}(\tau_1) \frac{\tau_1}{(C_1 \tau_1^2 - C_3)^2} d\tau_1 = C^0,$$

где $C^0 = \text{const}$.

Как видно, окончательный вид первого интеграла зависит от знака постоянной C_1 , поэтому возможны три варианта. Разберём каждый из них.

Первый вариант. $C_1 = 0$. После элементарного вычисления получим дополнительный интеграл в виде

$$e^{-\frac{u_1}{v_1}} \left(v_1^{-2} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{u_1}{v_1} + 1 \right) \right) = \text{const.}$$

Итак, трансцендентный первый интеграл системы (19) при $C_1 = 0$ выражается через элементарные функции.

Второй вариант. $C_1 > 0$. Интегрирование приводит к функции

$$-\frac{\sigma}{4n_0} e^{-2\frac{C_2}{\sqrt{-C_1 C_3}} \zeta} \left(\frac{C_2}{\sqrt{-C_1 C_3}} \sin 2\zeta + \cos 2\zeta \right) + \text{const.},$$

где

$$\zeta = \text{arctg} \sqrt{-\frac{C_1}{C_3}} t_1.$$

Как видно, в случае $C_1 > 0$ дополнительный первый интеграл выражается через элементарные функции.

Третий вариант. $C_1 < 0$. Эквивалентными преобразованиями интеграл преобразуется к виду

$$\frac{\sigma}{C_1 C_2 n_0} \left(2 \frac{\zeta^{1-\gamma}}{\gamma-1} - 3 \frac{\zeta^{-\gamma}}{\gamma} + \frac{\zeta^{-1-\gamma}}{\gamma+1} \right) + \text{const.},$$

где

$$\gamma = \frac{C_2}{\sqrt{C_1 C_3}} > 1, \quad \zeta = \frac{\sqrt{-C_1} t_1 + \sqrt{-C_3}}{\sqrt{-C_1} t_1 - \sqrt{-C_3}}.$$

Поэтому и в случае $C_1 < 0$ дополнительный первый интеграл выражается через элементарные функции.

Итак, мы исследуем связь трёх на первый взгляд независимых, но достаточно гармонично сочетающихся на системах из динамики твёрдого тела свойств:

- 1) выделенный выше класс систем (17) с отмеченными симметриями;
- 2) обладание этим классом систем переменной диссипацией с нулевым средним (по переменной α), что позволяет рассматривать их как «почти» консервативные системы;
- 3) в некоторых (пусть и маломерных) случаях обладание ими, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.

Приведём ещё один важный пример системы более высокого порядка, обладающей только что перечисленными свойствами.

Следующей системе

$$\dot{\alpha} = -z_2 + \beta \sin \alpha, \quad \dot{z}_2 = \sin \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \dot{z}_1 = z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (20)$$

рассматриваемой уже в трёхмерной области

$$\mathbb{S}^1 \{ \alpha \bmod 2\pi \} \setminus \{ \alpha = 0, \alpha = \pi \} \times \mathbb{R}^2 \{ z_1, z_2 \}$$

(такая система также может быть приведена к эквивалентной системе на касательном расслоении двумерной сферы) и описывающей пространственное движение твёрдого тела в сопротивляющейся среде [359], поставим в соответствие систему с алгебраической правой частью

$$\frac{dz_2}{d\tau} = \frac{\tau - z_1^2/\tau}{-z_2 + \beta\tau}, \quad \frac{dz_1}{d\tau} = \frac{z_1 z_2/\tau}{-z_2 + \beta\tau}. \quad (21)$$

И в данном случае видно, что система (20) является системой с переменной диссипацией с нулевым средним; чтобы было полное соответствие с определением, достаточно ввести новую фазовую переменную $z_1^* = \ln |z_1|$.

Более того, эта система обладает двумя первыми интегралами (т. е. полным списком), являющимися трансцендентными функциями и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций [295, 309], что, как указывалось выше, и стало возможным после постановки ей в соответствие (вообще говоря, неавтономной) системы уравнений с алгебраической (полиномиальной) правой частью (21).

Итак, приведённые выше системы из динамики твёрдого тела мало того что попадают в класс систем (17) и обладают переменной диссипацией с нулевым средним, они ещё и имеют полный список трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. При этом интегрирование систем (18), (19) свелось к интегрированию соответствующих уравнений с алгебраическими правыми частями.

Как было отмечено, для поиска первых интегралов рассматриваемых систем лучше привести системы вида (17) к системам с полиномиальными правыми частями, от вида которых зависит возможность интегрирования в элементарных функциях исходной системы. Поэтому пойдём следующим путём: будем искать достаточные условия интегрируемости в элементарных функциях систем уравнений с полиномиальными правыми частями, исследуя при этом системы наиболее общего вида.

2.5. Системы на $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$, или двумерном цилиндре

Рассмотрим возможности полного интегрирования (в элементарных функциях) системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + f_1x^3 + f_2x^2y + f_3xy^2 + f_4y^3, \\ \dot{y} &= cx + dy + g_1x^3 + g_2x^2y + g_3xy^2 + g_4y^3 \end{aligned}$$

на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$. Кроме того, для определённости будем считать, что корни характеристического уравнения для λ -матрицы

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

вещественны. В этом случае можно считать, что $b = 0$. В случае же наличия комплексно-сопряжённых корней у данного уравнения можно считать, что $ad - bc = 1$.

Применяя подстановку $y = tx$, характерную для однородных систем, придём к интегрированию тождества

$$[at + bt^2 + f_1tx^2 + f_2t^2x^2 + f_3t^3x^2 + f_4t^4x^2 - c - dt - g_1x^2 - g_2tx^2 - g_3t^2x^2 - g_4t^3x^2] dx + [ax + btx + f_1x^3 + f_2tx^3 + f_3t^2x^3 + f_4t^3x^3] dt = 0.$$

Видно, что нелинейность характеризуют восемь параметров. Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества как однородного уравнения достаточно наложить пять независимых соотношений:

$$g_1 = 0, \quad f_1 = g_2 = \beta_1, \quad f_2 = g_3 = \beta_2, \quad f_3 = g_4 = \beta_3, \quad f_4 = 0.$$

Предложение 2.2. Семипараметрическое семейство систем уравнений на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + \beta_1x^3 + \beta_2x^2y + \beta_3xy^2, \\ \dot{y} &= cx + dy + \beta_1x^2y + \beta_2xy^2 + \beta_3y^3 \end{aligned}$$

обладает (вообще говоря, трансцендентным) первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.

Схема доказательства. После несложных преобразований приходим к необходимости интегрирования уравнения Бернулли

$$[at + bt^2 - c - dt] \frac{dx}{dt} + [a + bt]x + [\beta_1 + \beta_2t + \beta_3t^2]x^3 = 0,$$

которое заменой $x^{-3} = u$ сводится к линейному неоднородному уравнению

$$\left(-\frac{at + bt^2 - c - dt}{2} \right) \frac{du}{dt} + [a + bt]u = -\beta_1 - \beta_2t - \beta_3t^2.$$

Поскольку первообразная функции $\frac{a+bt}{at+bt^2-c-dt}$ выражается через элементарные функции, общее решение однородной части последнего уравнения тоже выражается через элементарные функции.

Если же мы считаем, что без ограничения общности $b = 0$, то частное решение последнего неоднородного уравнения выражается через конечную комбинацию элементарных функций.

Замечание. Первый интеграл системы можно также искать из уравнения

$$\left(\frac{x}{y} \right)' = (a - d) \frac{x}{y} + b - c \left(\frac{x}{y} \right)^2.$$

Следствие 2.1. Системы вида

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= a \sin \alpha + b\omega + \beta_1 \sin^3 \alpha + \beta_2 \omega \sin^2 \alpha + \beta_3 \omega^2 \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= c \sin \alpha \cos \alpha + d\omega \cos \alpha + \beta_1 \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \beta_2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_3 \omega^3 \cos \alpha \end{aligned}$$

при любых параметрах $a, b, c, d, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ имеют трансцендентный первый интеграл, выражающийся через элементарные функции.

В частности, система (18) получается из последней системы при

$$a = \beta, \quad b = -1, \quad c = 1, \quad d = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0,$$

а система (19) — при

$$a = \beta, \quad b = -1, \quad c = 1, \quad d = -\beta, \quad \beta_1 = -\beta, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \beta.$$

Обобщим предыдущие рассуждения. Рассмотрим возможности полного интегрирования (в элементарных функциях) систем более общего вида. Нелинейность теперь характеризуется произвольной однородной формой нечётной степени $2n - 1$.

Тогда справедливо более общее утверждение, чем предложение 2.2.

Предложение 2.3. $(2n + 3)$ -параметрическое семейство систем уравнений на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + \delta_1 x^{2n-1} + \delta_2 x^{2n-2} y + \dots + \delta_{2n-2} x^2 y^{2n-3} + \delta_{2n-1} x y^{2n-2}, \\ \dot{y} &= cx + dy + \delta_1 x^{2n-2} y + \delta_2 x^{2n-3} y^2 + \dots + \delta_{2n-2} x y^{2n-2} + \delta_{2n-1} y^{2n-1} \end{aligned} \quad (22)$$

обладает (вообще говоря, трансцендентным) первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.

Семейство уравнений (22) действительно зависит от $2n - 1 + 4$ независимых параметров, поскольку общая нелинейность нечётной степени в данном случае характеризуется $4n$ параметрами, на которые накладываются $2n + 1$ условий (ещё четыре параметра присутствуют в линейной части).

Следствие 2.2. Системы вида

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= a \sin \alpha + b \omega + \delta_1 \sin^{2n-1} \alpha + \delta_2 \omega \sin^{2n-2} \alpha + \dots + \delta_{2n-1} \omega^{2n-2} \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= c \sin \alpha \cos \alpha + d \omega \cos \alpha + \delta_1 \omega \sin^{2n-2} \alpha \cos \alpha + \delta_2 \omega^2 \sin^{2n-3} \alpha \cos \alpha + \dots + \\ &+ \delta_{2n-1} \omega^{2n-1} \cos \alpha \end{aligned}$$

при любых параметрах $a, b, c, d, \delta_1, \dots, \delta_{2n-1}$ имеют трансцендентный первый интеграл, выражающийся через элементарные функции.

Сделаем важное замечание. Системы (18), (19), как указывалось, являются относительно грубыми, но если мы нарушим в данных системах симметрии (например, добавим в их правых частях дополнительные члены), введённые для систем более общего вида (17), то количество получившихся топологически различных фазовых портретов может сильно измениться.

Так, например, следующие системы, являющиеся «возмущением» системы вида (19), становятся динамическими системами с переменной диссипацией с ненулевым средним и имеют бесчисленное множество топологически неэквивалентных фазовых портретов (см., например, рис. 7–16 — портреты многопараметрического семейства портретов без предельных циклов и рис. 17–24 — портреты многопараметрического семейства портретов, когда при выполнении

некоторых соотношений на параметры в системе имеются простые и сложные предельные циклы) [286, 305].

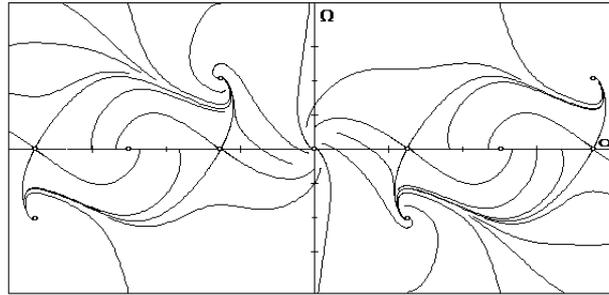


Рис. 7. Семейство портретов без предельных циклов

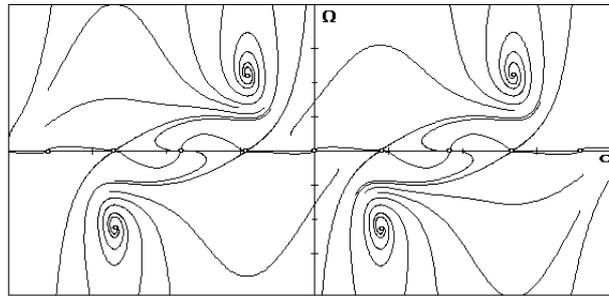


Рис. 8. Семейство портретов без предельных циклов

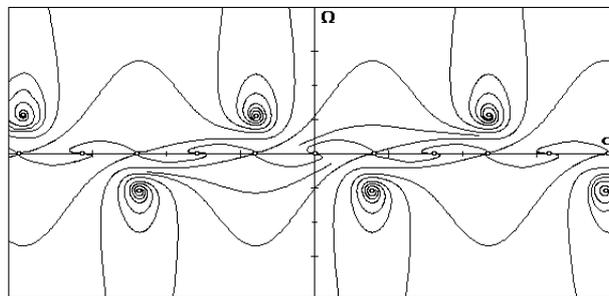


Рис. 9. Семейство портретов без предельных циклов

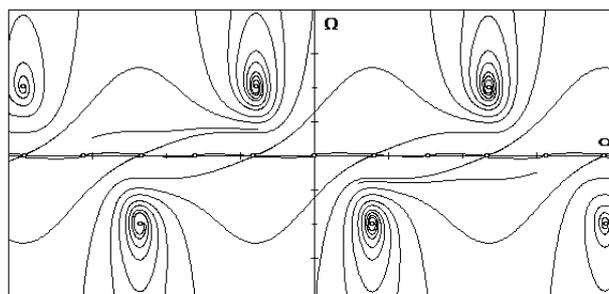


Рис. 10. Семейство портретов без предельных циклов

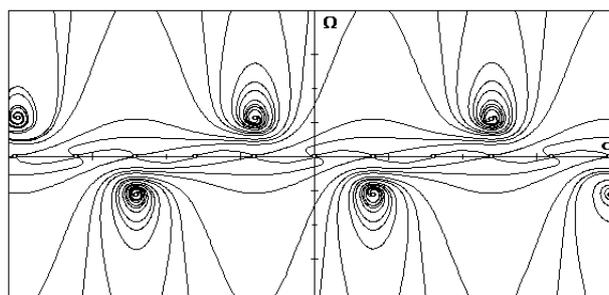


Рис. 11. Семейство портретов без предельных циклов

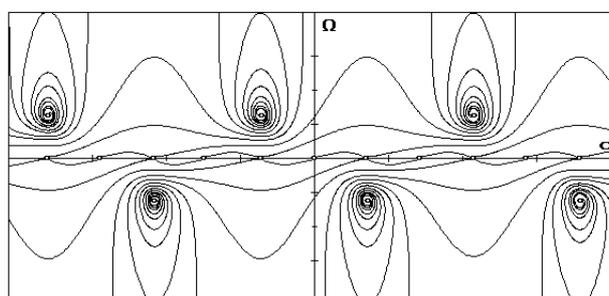


Рис. 12. Семейство портретов без предельных циклов

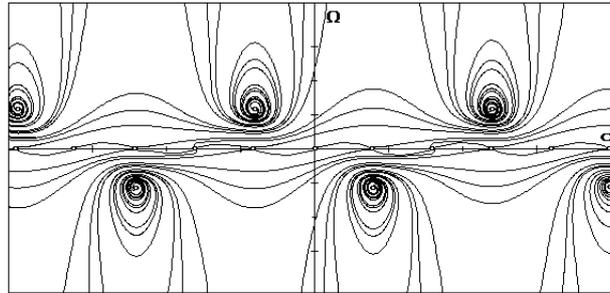


Рис. 13. Семейство портретов без предельных циклов

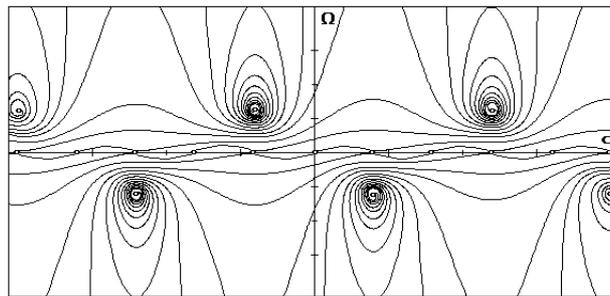


Рис. 14. Семейство портретов без предельных циклов

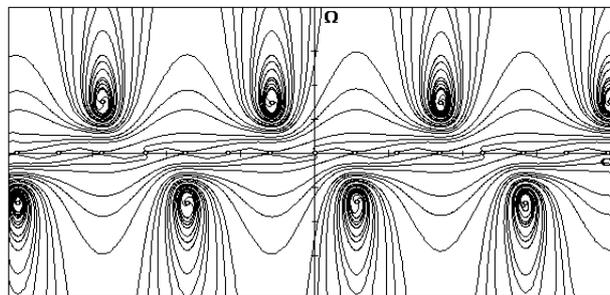


Рис. 15. Семейство портретов без предельных циклов

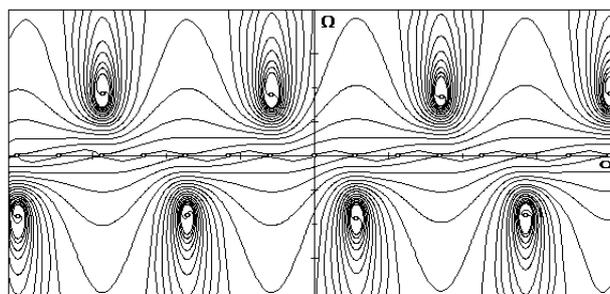


Рис. 16. Семейство портретов без предельных циклов

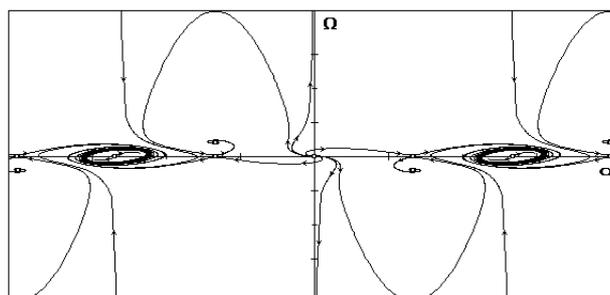


Рис. 17. Семейство портретов с предельными циклами

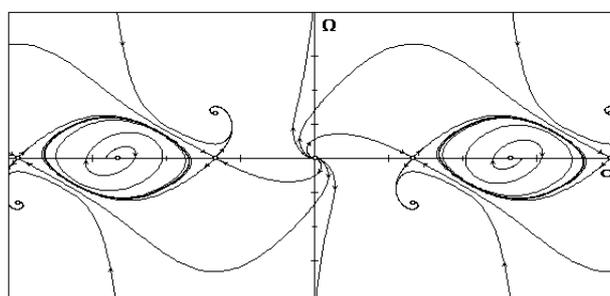


Рис. 18. Семейство портретов с предельными циклами

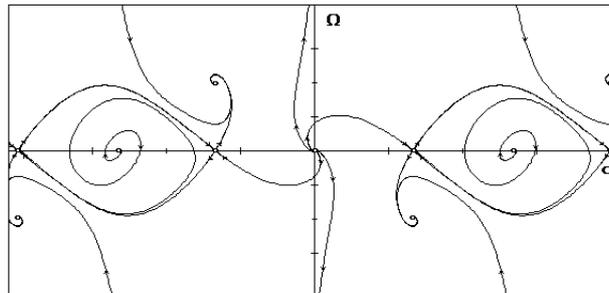


Рис. 19. Семейство портретов с предельными циклами

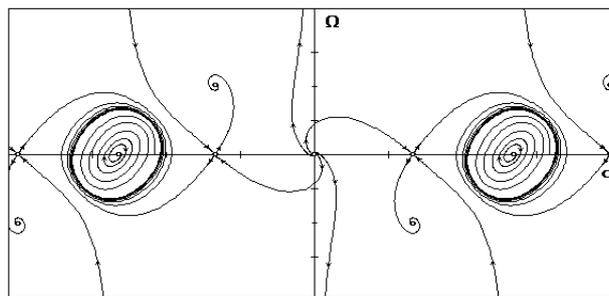


Рис. 20. Семейство портретов с предельными циклами

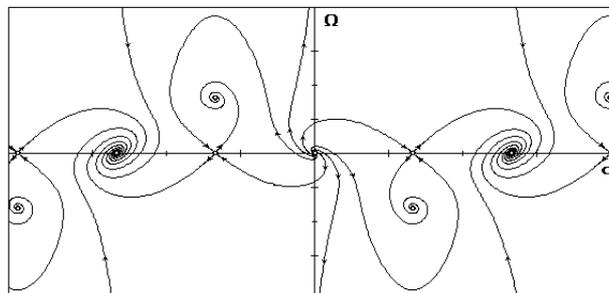


Рис. 21. Семейство портретов с предельными циклами

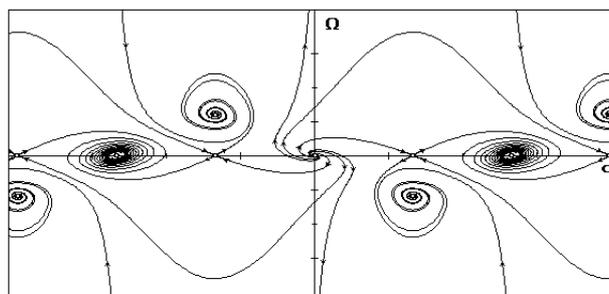


Рис. 22. Семейство портретов с предельными циклами

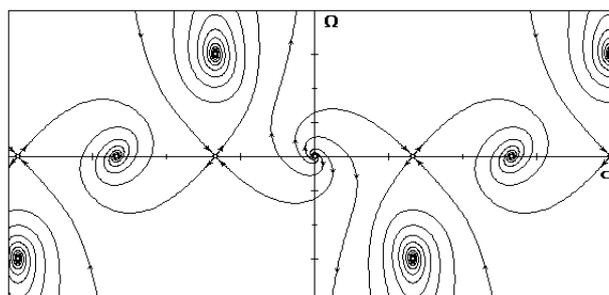


Рис. 23. Семейство портретов с предельными циклами

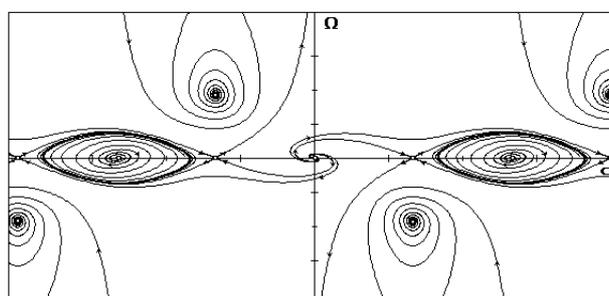


Рис. 24. Семейство портретов с предельными циклами

2.6. Системы

на $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus \{\alpha = 0, \alpha = \pi\} \times \mathbb{R}^2\{z_1, z_2\}$,
или касательном расслоении к двумерной сфере

Исследуем систему вида (20), которая сводится к (21), а также систему

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -z_2 + \beta(z_1^2 + z_2^2) \sin \alpha + \beta \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\ \dot{z}_2 &= \sin \alpha \cos \alpha + \beta z_2(z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \beta z_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \dot{z}_1 &= \beta z_1(z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \beta z_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},\end{aligned}$$

также возникающую в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, которая соответствует следующей системе с алгебраической правой частью:

$$\begin{aligned}\frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{\tau + \beta z_2(z_1^2 + z_2^2) - \beta z_2 \tau^2 - z_1^2/\tau}{-z_2 + \beta \tau(z_1^2 + z_2^2) + \beta \tau(1 - \tau^2)}, \\ \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{\beta z_1(z_1^2 + z_2^2) - \beta z_1 \tau^2 + z_1 z_2/\tau}{-z_2 + \beta \tau(z_1^2 + z_2^2) + \beta \tau(1 - \tau^2)}.\end{aligned}\tag{23}$$

Аналогичным образом производится переход к однородным координатам u_k , $k = 1, 2$, по формулам $z_k = u_k \tau$.

Система (21) приводится к системе

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{\tau - u_1^2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau}, \quad \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{u_1 u_2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau},$$

которая, в свою очередь, соответствует уравнению

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - \beta u_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1 u_2 - \beta u_1}.\tag{24}$$

Данное уравнение интегрируется в элементарных функциях, поскольку интегрируется тождество

$$d\left(\frac{1 - \beta u_2 + u_2^2}{u_1}\right) + du_1 = 0,$$

и имеет в координатах (τ, z_1, z_2) первый интеграл вида (ср. [328, 331])

$$\frac{z_1^2 + z_2^2 - \beta z_2 \tau + \tau^2}{z_1 \tau} = \text{const.}$$

Система же (23) после её приведения соответствует системе

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{\tau + \beta u_2 \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) - \beta u_2 \tau^3 - u_1^2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) + \beta \tau (1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{\beta u_1 \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) - \beta u_1 \tau^3 + u_1 u_2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) + \beta \tau (1 - \tau^2)},\end{aligned}$$

которая также приводится к (24).

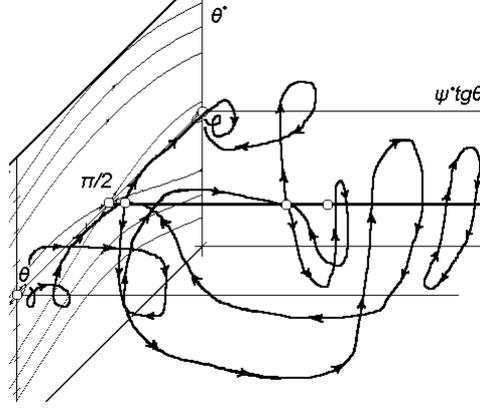


Рис. 25. Относительно грубый фазовый портрет в трёхмерной области

Система вида (20) эквивалентна следующей системе на касательном расслоении двумерной сферы $T_*\mathbb{S}^2$ (при этом $\beta \mapsto -\beta$):

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta}\cos\theta + \sin\theta\cos\theta - \psi^2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= 0, \\ \ddot{\psi} + \beta\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\theta}\psi\left[\frac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right] &= 0.\end{aligned}$$

Её фазовый портрет изображён на рис. 25 (при $\alpha = \theta$, $z_1 = \psi\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$).

Зададим вопрос: каковы возможности интегрирования в элементарных функциях в трёхмерных фазовых областях системы более общего вида

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{ax + by + cz + c_1z^2/x + c_2zy/x + c_3y^2/x}{dx + ey + fz}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{gx + hy + iz + i_1z^2/x + i_2zy/x + i_3y^2/x}{dx + ey + fz},\end{aligned}\tag{25}$$

включающей в себя рассмотренные выше системы (21), (23), имеющей особенность типа $1/x$.

Вводя, как и ранее, подстановки $y = ux$, $z = vx$, получим, что система (25) приводится к системе

$$\begin{aligned}x\frac{dv}{dx} + v &= \frac{ax + bux + cvx + c_1v^2x + c_2vux + c_3u^2x}{dx + eux + fvx}, \\ x\frac{du}{dx} + u &= \frac{gx + hux + ivx + i_1v^2x + i_2vux + i_3u^2x}{dx + eux + fvx},\end{aligned}$$

которой мы поставим в соответствие уравнение с алгебраической правой частью

$$\frac{dv}{du} = \frac{a + bu + cv + c_1v^2 + c_2vu + c_3u^2 - v[d + eu + fv]}{g + hu + iv + i_1v^2 + i_2vu + i_3u^2 - u[d + eu + fv]}.$$

Интегрирование последнего уравнения сводится к интегрированию уравнения в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} [g + hu + iv + i_1v^2 + i_2vu + i_3u^2 - du - eu^2 - fuv] dv = \\ = [a + bu + cv + c_1v^2 + c_2vu + c_3u^2 - dv - euv - fv^2] du. \end{aligned} \quad (26)$$

Имеем, вообще говоря, 15-параметрическое семейство уравнений вида (26). Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества как однородного уравнения достаточно наложить семь соотношений:

$$g = 0, \quad i_3 = e, \quad i_1 = 0, \quad i = 0, \quad c_2 = e, \quad c = h, \quad 2c_1 = i_2 + f. \quad (27)$$

Введём восемь параметров β_1, \dots, β_8 и рассмотрим их как независимые:

$$\begin{aligned} g = 0, \quad h = \beta_1, \quad i_1 = 0, \quad i = 0, \quad i_2 = \beta_2, \quad i_3 = \beta_3, \quad d = \beta_4, \quad e = \beta_3, \\ f = \beta_5, \quad a = \beta_6, \quad b = \beta_7, \quad c = \beta_1, \quad c_1 = \frac{\beta_2 + \beta_5}{2}, \quad c_2 = \beta_3, \quad c_3 = \beta_8. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (26) при выполнении группы условий (27) сводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta_6 + \beta_7u + (\beta_1 - \beta_4)v + (\beta_2 - \beta_5)v^2/2 + \beta_8u^2}{(\beta_1 - \beta_4)u + (\beta_2 - \beta_5)vu}, \quad (28)$$

после чего исследуемое уравнение интегрируется в элементарных функциях.

Действительно, интегрируя тождество (26), получаем соотношение

$$d \left[\frac{(\beta_1 - \beta_4)v}{u} \right] + d \left[\frac{(\beta_2 - \beta_5)v^2}{2u} \right] + d \left[\frac{\beta_6}{u} \right] - d[\beta_7 \ln |u|] - d[\beta_8 u] = 0,$$

которое в координатах (x, y, z) позволяет получить первый интеграл в виде

$$\frac{(\beta_2 - \beta_5)z^2/2 - \beta_8y^2 + (\beta_1 - \beta_4)zx + \beta_6x^2}{yx} - \beta_7 \ln \left| \frac{y}{x} \right| = \text{const}. \quad (29)$$

Таким образом, можно сделать вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря неконсервативной, системы третьего порядка, зависящей от восьми параметров:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\beta_6x + \beta_7y + \beta_1z + (\beta_2 - \beta_5)z^2/2x + \beta_3zy/x + \beta_8y^2/x}{\beta_4x + \beta_3y + \beta_5z}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\beta_1y + \beta_2zy/x + \beta_3y^2/x}{\beta_4x + \beta_3y + \beta_5z}. \end{aligned}$$

Следствие 2.3. Система третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \beta_4 \sin \alpha + \beta_3 z_1 + \beta_5 z_2, \\ \dot{z}_2 &= \beta_6 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_7 z_1 \cos \alpha + \beta_1 z_2 \cos \alpha + \\ &\quad + \frac{\beta_2 + \beta_5}{2} z_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_3 z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_8 z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \dot{z}_1 &= \beta_1 z_1 \cos \alpha + \beta_2 z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_3 z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned} \quad (30)$$

на множестве

$$\mathbb{S}^1 \{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus \{\alpha = 0, \alpha = \pi\} \times \mathbb{R}^2 \{z_1, z_2\},$$

зависящая от восьми параметров, обладает, вообще говоря, трансцендентным первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.

В частности, система (30) при

$$\beta_1 = \beta_3 = \beta_7 = 0, \quad \beta_2 = \beta_6 = 1, \quad \beta_5 = \beta_8 = -1, \quad \beta_4 = \beta$$

приводится к системе (20).

Для нахождения дополнительного первого интеграла неавтономной системы (25) используется найденный первый интеграл (29), выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

2.7. Системы из динамики четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой

2.7.1. Повышение размерности в динамике твёрдого тела

В работах [230, 232] была показана полная интегрируемость плоской (т. е. тело находится в евклидовой плоскости \mathbb{E}^2) задачи о движении твёрдого тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует один первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (*одномерной*) пластины.

Позднее [295, 296, 309] плоская задача была обобщена на пространственный (*трёхмерный*) случай (т. е. движение происходит в евклидовом пространстве \mathbb{E}^3), при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь предполагалось, что всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (*двумерного*) диска.

Часто структура динамических уравнений движения сохраняется при переносе динамических свойств на случаи большей размерности. Например, в настоящее время (см. [28, 53—56, 92—99, 199]) развивается теория движения четырёхмерного (более того, n -мерного) твёрдого тела. Авторам последних работ (школы С. П. Новикова и О. И. Богоявленского) удалось показать гамильтоновость уравнений движения многомерного твёрдого тела около неподвижной точки.

Настоящий раздел посвящён изучению движения четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой по законам «струйного обтекания» и впервые представляет результаты по изучению данного вопроса.

В работе предполагается, что всё взаимодействие (четырёхмерного) твёрдого тела со средой сосредоточено на той части (гладкой *трёхмерной*) поверхности

тела, которая имеет форму (*трёхмерного*) шара. При этом тензор угловой скорости движения такого тела шестимерен, а скорость центра масс четырёхмерна.

2.7.2. Постановка задачи и уравнения на алгебре $\mathfrak{so}(4)$

Пусть четырёхмерное твёрдое тело движется в сопротивляющейся среде, заполняющей четырёхмерную область евклидова пространства \mathbb{E}^4 и всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части (гладкой трёхмерной) поверхности тела, которая имеет форму трёхмерного диска D^3 . Расстояние от точки N приложения силы сопротивления до центра D диска является функцией лишь одного параметра — угла атаки α , который измеряется между скоростью \mathbf{v} точки D и средним перпендикуляром к диску, опущенным из центра масс C тела, в четырёхмерном пространстве (см. [312–314, 319, 320, 322, 324, 325, 329, 336, 343–345, 351, 357, 362, 367, 372, 375, 440, 457]).

Сила сопротивления ортогональна в четырёхмерном пространстве к диску D^3 , и её величина имеет вид

$$S = s_1(\alpha)v^2,$$

где s_1 — неотрицательный коэффициент сопротивления.

Свяжем с телом систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$, ось Dx_1 которой совпадает с осью CD , а оси Dx_2 , Dx_3 , Dx_4 лежат в гиперплоскости диска.

Если оператор инерции в системе $Dx_1x_2x_3x_4$ имеет диагональный вид

$$\text{diag}\{I_1, I_2, I_3, I_4\},$$

где Ω — тензор угловой скорости твёрдого тела, $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$, то та часть уравнений движения четырёхмерного твёрдого тела, которая отвечает алгебре $\mathfrak{so}(4)$, имеет вид (см. [253, 256])

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}, \\ \lambda_1 &= \frac{-I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{2}, & \lambda_2 &= \frac{I_1 - I_2 + I_3 + I_4}{2}, \\ \lambda_3 &= \frac{I_1 + I_2 - I_3 + I_4}{2}, & \lambda_4 &= \frac{I_1 + I_2 + I_3 - I_4}{2}, \end{aligned}$$

M — момент внешних сил, действующих на тело в \mathbb{R}^4 , спроектированный на естественные координаты в алгебре $\mathfrak{so}(4)$, $[\dots]$ — коммутатор в $\mathfrak{so}(4)$.

Матрицу $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ — компоненты *тензора угловой скорости* в проекциях на естественные координаты в алгебре $\mathfrak{so}(4)$.

Коэффициент сопротивления s_1 удобно представлять в виде

$$s_1(\alpha) = s(\alpha) \operatorname{sign} \cos \alpha.$$

Если $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ — координаты точки N в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, $\{-S, 0, 0, 0\}$ — координаты вектора силы сопротивления в той же системе, то при вычислении момента силы сопротивления необходимо построить отображение

$$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathfrak{so}(4), \quad (33)$$

переводящее пару векторов из \mathbb{R}^4 в некоторый элемент из алгебры $\mathfrak{so}(4)$.

В проекциях на координаты в группе $\mathfrak{so}(4)$ момент силы сопротивления имеет вид

$$(0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S) \in \mathbb{R}^6 \cong M \in \mathfrak{so}(4), \quad (34)$$

Здесь необходимо учесть, что если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — сферические координаты скорости центра D трёхмерного диска в \mathbb{R}^4 , то

$$x_{2N} = R(\alpha) \cos \beta_1, \quad x_{3N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \cos \beta_2, \quad x_{4N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \sin \beta_2.$$

С учётом всего этого можно получить уравнения движения в рассмотренном неконсервативном поле силы сопротивления:

$$(\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0, \quad (35)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = 0, \quad (36)$$

$$(\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = x_{4N}S, \quad (37)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = 0, \quad (38)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = -x_{3N}S, \quad (39)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = x_{2N}S. \quad (40)$$

2.7.3. Динамика на \mathbb{R}^4

По аналогии с трёхмерным случаем можно вывести формулы, подобные формулам Эйлера и Ривальса: скорости и ускорения любых двух точек A и B четырёхмерного твёрдого тела в любой системе координат связаны соотношениями

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \mathbf{A} \mathbf{B}, \quad \mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \Omega^2 \mathbf{A} \mathbf{B} + E \mathbf{A} \mathbf{B}, \quad (41)$$

где $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$, $E = \dot{\Omega} \in \mathfrak{so}(4)$. Матрица E называется *матрицей (соответствующей тензору) ускорения* четырёхмерного твёрдого тела.

С помощью формул (41) можно получить уравнения движения центра масс четырёхмерного твёрдого тела в \mathbb{R}^4 .

2.7.4. Движение в сопротивляющейся среде под действием неинтегрируемой связи

Рассмотрим класс движений тела, при которых всё время выполнено условие

$$v = |\mathbf{v}| = \text{const.} \quad (42)$$

При этом предположим, что на тело действует некоторая (следящая) сила тяги, обеспечивающая выполнение условия (42) и являющаяся реакцией данной неинтегрируемой связи (ср. с двумерным и трёхмерным случаями [230, 309]).

Определённым выбором величины тяги вдоль прямой CD выполнение условия (42) может быть достигнуто (см. [232]).

2.7.5. Случай динамически симметричного твёрдого тела

Пусть по аналогии с трёхмерным случаем выполнены равенства

$$I_2 = I_3 = I_4. \quad (43)$$

В таком случае существуют три циклических первых интеграла у уравнений (35)–(40):

$$\omega_1 = \omega_1^0, \quad \omega_2 = \omega_2^0, \quad \omega_4 = \omega_4^0.$$

Рассмотрим для простоты движения на их нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \quad (44)$$

Для описания движения тела используется пара динамических функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. По аналогии со случаями достаточно малых размерностей без ограничения общности [230, 266, 267] можно считать, что

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad A > 0, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad B > 0. \quad (45)$$

Тогда уравнения, соответствующие $\text{so}(4)$, примут вид (здесь $n_0^2 = AB/2I_2$)

$$\dot{\omega}_3 = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2, \quad (46)$$

$$\dot{\omega}_5 = -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, \quad (47)$$

$$\dot{\omega}_6 = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta_1. \quad (48)$$

Если ввести естественную замену угловых скоростей по формулам

$$z_1 = \omega_3 \cos \beta_2 + \omega_5 \sin \beta_2, \quad (49)$$

$$z_2 = -\omega_3 \sin \beta_2 \cos \beta_1 + \omega_5 \cos \beta_2 \cos \beta_1 + \omega_6 \sin \beta_1, \quad (50)$$

$$z_3 = \omega_3 \sin \beta_2 \sin \beta_1 - \omega_5 \cos \beta_2 \sin \beta_1 + \omega_6 \cos \beta_1, \quad (51)$$

то полная система динамических уравнений движения на прямом произведении $\text{so}(4) \times \mathbb{R}^4$ (после учёта четырёх уравнений (42) и (44)) примет симметричный вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha} &= -z_3 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha, \\
 \dot{z}_3 &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha - (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\
 \dot{z}_2 &= z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\
 \dot{z}_1 &= z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_1 z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\
 \dot{\beta}_1 &= z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\
 \dot{\beta}_2 &= -z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}.
 \end{aligned} \tag{52}$$

У системы (52), (53) шестого порядка существует независимая подсистема пятого порядка (52). Для полного интегрирования данной системы необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \longrightarrow z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, z_* = \frac{z_2}{z_1} \tag{54}$$

система (52), (53) приведётся к виду

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha} &= -z_3 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha, \\
 \dot{z}_3 &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha - z^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},
 \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= z z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\
 \dot{z}_* &= \sqrt{1 + z_*^2} z \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1},
 \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}_1 &= \frac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\
 \dot{\beta}_2 &= -Z_1(z, z_*) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}.
 \end{aligned} \tag{57}$$

Видно, что система (52) пятого порядка распалась на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (55) третьего порядка и система (56) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (55)—(57) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (55), один — системы (56) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (57).

Система (55) появляется в динамике трёхмерного твёрдого тела [309]. Она обладает двумя трансцендентными интегралами:

$$\frac{z^2 + z_3^2 - \sigma n_0^2 v z_3 \sin \alpha + n_0^2 v^2 \sin^2 \alpha}{z \sin \alpha} = C_1 = \text{const}, \tag{58}$$

$$G\left(\frac{z}{\sin \alpha}, \frac{z_3}{\sin \alpha}, \sin \alpha\right) = C_2 = \text{const}. \tag{59}$$

Система (56) имеет первый интеграл вида

$$\frac{\sqrt{1+z_*^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = \text{const}, \quad (60)$$

и, в свою очередь, дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (57), имеет вид

$$\pm \frac{\cos \beta_1}{\sqrt{C_3^2 - 1}} = \sin\{C_3(\beta_2 + C_4)\}, \quad C_4 = \text{const}. \quad (61)$$

2.7.6. Новое направление

Ранее рассматривались лишь такие движения четырёхмерного тела, когда $M \equiv 0$ (или же поле сил было консервативным). Данная работа открывает развиваемое автором новое направление в исследовании уравнений движения твёрдого тела на прямом произведении $\text{so}(4) \times \mathbb{R}^4$ (M не равно нулю тождественно) в неконсервативном поле сил.

Методика интегрирования рассматриваемых динамических систем иногда может быть распространена и на пространство $\text{so}(n) \times \mathbb{R}^n$ произвольного динамически симметричного n -мерного твёрдого тела.

Итак, рассматриваемые в данной работе динамические системы относятся к системам с переменной диссипацией с нулевым средним по имеющейся периодической координате. Более того, такие системы часто обладают полным списком первых интегралов, выражающихся через элементарные функции.

Метод приведения исходных систем уравнений с правыми частями, содержащими полиномы от тригонометрических функций, к системам с полиномиальными правыми частями позволяет искать первые интегралы (или же доказывать их отсутствие) для систем более общего вида, а не только тех, которые обладают указанными симметриями.

3. Класс порождающих динамических систем на маломерных многообразиях: ещё раз о воздействии сопротивляющейся среды на твёрдое тело

Несмотря на сведения предыдущего раздела, которые носят сугубо математический характер, автор счёл нужным поместить в данную работу следующий материал, касающийся приложений. Данный материал как бы укрепляет уверенность читателя в том, что исследуемые (в том числе порождающие) системы обыкновенных дифференциальных уравнений взяты из важной модельной задачи о движении твёрдых тел в жидкости.

Итак, в построенной выше математической модели торможения твёрдого тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании в условиях квазистационарности режим поступательного торможения (см. рис. 1), как правило, неустойчив. Это позволило разработать достаточно простую методику экспериментального определения параметров воздействия среды на тело. Приводится пример использования этой методики для тела цилиндрической формы: задача о входе в воду кругового цилиндра. Данное исследование составляет ту часть, которая посвящена изучению линейной модели взаимодействия. Как указано в разделе 1, в дальнейшей мы в основном ограничимся распространением модели на нелинейный случай, описываемый системой (8)—(10). Поэтому в конце данного раздела будет получен ряд нелинейных динамических систем, описывающих несколько вариантов движения тела. Такие системы являются системами с переменной диссипацией.

3.1. Предварительные сведения

Для начала в данном разделе исследуются линеаризованные уравнения торможения тела в среде. Напомним, что в [178, 179] уже разобран вопрос об устойчивости стационарного прямолинейного торможения свободного тела. Исследование проведено именно на базе линеаризованных уравнений. Показано, что неустойчивость такого движения иногда связана с раскачкой угловых колебаний тела. Однако экспериментально обеспечить равномерное движение тела затруднительно. Поэтому задача о торможении тела представилась более удобной для экспериментальной проверки эффекта раскачки.

Предварительные исследования [130] позволили его обнаружить и показали, что для лучшего количественного совпадения расчётных и экспериментальных траекторий необходимо дополнить квазистатическую модель ещё одним параметром — *вращательной производной момента по угловой скорости тела*. Этот параметр обычно вносит в систему диссипацию, однако здесь она оказалась недостаточной, чтобы подавить эффект раскачки. Данное исследование позволило разработать достаточно простую и эффективную методику определения неизвестных параметров модели.

Наряду с углом φ , определяющим ориентацию тела на плоскости, вполне естественно ввести ординату точки D (см. рис. 1 и 2) в неподвижной системе координат, т. е. боковое смещение a , как функцию натурального безразмерного параметра τ . Таким образом, пара функций $(\varphi(\tau), a(\tau))$ однозначно определяет положение тела на плоскости в линейном приближении.

Боковое смещение $a(\tau)$ при условии, что $a(0) = 0$, можно определить по формуле

$$a(\tau) = \int_0^{\tau} (\alpha(q) + \varphi(q)) dq. \quad (62)$$

Конечно, трудно рассчитывать на какое-либо прикладное значение неустойчивого движения. Однако такое движение можно использовать в методических целях для определения неизвестных параметров, в частности безразмерных параметров воздействия среды на тело k , h . К методике определения этих параметров мы переходим в следующем разделе.

3.2. Методика определения неизвестных безразмерных параметров воздействия среды на тело

Как было указано выше, рассматриваемая линеаризованная модель силового воздействия сопротивляющейся среды на тело содержит три параметра s , k , h , которые определяются формой пластины в плане. Первый из этих параметров — коэффициент сопротивления s — размерный. Последние два параметра — k и h — уже по способу их введения являются безразмерными.

В Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова (ср. [134, 140, 141, 227, 236]) В. А. Ерошиным и В. М. Макариным проведены эксперименты по регистрации движения в воде двух однородных круговых цилиндров со следующими параметрами:

$$m = 178 \text{ г}, \quad 2\sigma = 35 \text{ мм}, \quad D = 30 \text{ мм} \quad (\text{стальная модель}), \quad (63)$$

$$m = 178 \text{ г}, \quad 2\sigma = 60 \text{ мм}, \quad D = 30 \text{ мм}, \quad (\text{титановая модель}) \quad (64)$$

при скоростях $v \cong 150\text{--}250 \text{ м/сек}$ (для обеих цилиндрических моделей $c_x = 0,82$). Регистрация осуществлялась путём фотографирования цилиндра в некоторых точках траектории на интервале $0 < \tau < 45$.

С фотографии снимались продольное смещение τ_i точки D цилиндра вдоль линии L_1 (располагающейся в неподвижном пространстве) невозмущённого движения, поперечное смещение $a_i = a(\tau_i)$ точки D и угол $\varphi_i = \varphi(\tau_i)$ ориентации оси цилиндра относительно линии L_1 . Некоторые экспериментальные результаты изображены точками на рис. 26—29 (для стальной модели). Подобные картинки можно привести и для титановой модели.

Номинальные начальные условия для обеих моделей выбираются следующим образом: $\varphi_0 = 0$, $\omega = \omega_0$, $\alpha_0 = \omega_0 \sigma / D$. Экспериментальную зависимость $\varphi(\tau_i)$ можно интерпретировать как колебания около некоторого отрицательного значения с возрастающей амплитудой, что может служить проявлением описанной выше неустойчивости поступательного движения. Кроме того, разброс экспериментальных точек, особенно по боковому смещению, позволяет предположить не только погрешность измерений, но и ошибки в реализации начальных условий. Поэтому для обработки использовался приём так называемых «накрывающих пучков».

Сущность этого приёма в применении к данной задаче состоит в том, что экспериментальные данные, обозначаемые на рис. 26—29 точками, покрываются

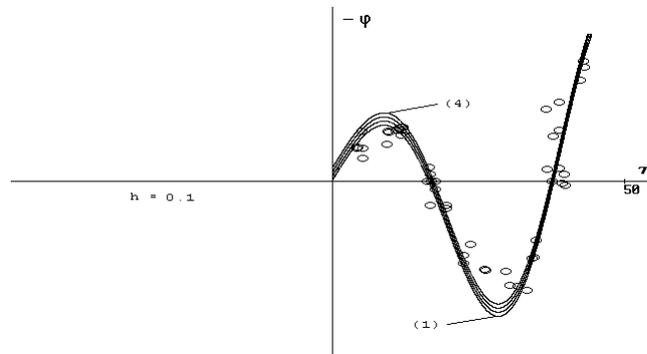


Рис. 26. Изменение угла отклонения

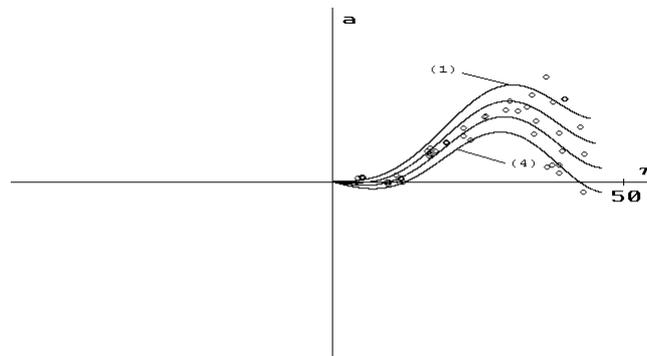


Рис. 27. Изменение бокового смещения

пучками кривых, являющихся решениями соответствующего дифференциального уравнения при различных начальных условиях. При этом начальные условия выбираются так, чтобы удовлетворительно накрыть всю сеть экспериментальных точек.

Как и в [126] (ср. [121]), для параметра k принята оценка $k = 0,1$, а для начальных условий по углам атаки и отклонения — около 0. Построены три группы траекторий для каждой модели при различных начальных условиях для $h = 0$, $h = 0,1$, $h = 0,2$. При этом угловая скорость выбиралась в пределах $10^{-2} - 10^{-3}$.

В каждой такой группе содержатся пучки траекторий для различных начальных условий. Так, например, для стальной модели можно показать пучки интегральных траекторий, отвечающих начальным условиям

$$\varphi_0 = 0^0; -0,5^0; -1^0; -1,5^0; \quad \omega_0 = -0,02; \quad \alpha_0 = 0^0.$$

Интересны также рисунки, соответствующие начальным условиям

$$\varphi_0 = 0^0; \quad \alpha_0 = 0^0; \quad \omega_0 = -0,01; -0,015; -0,02$$

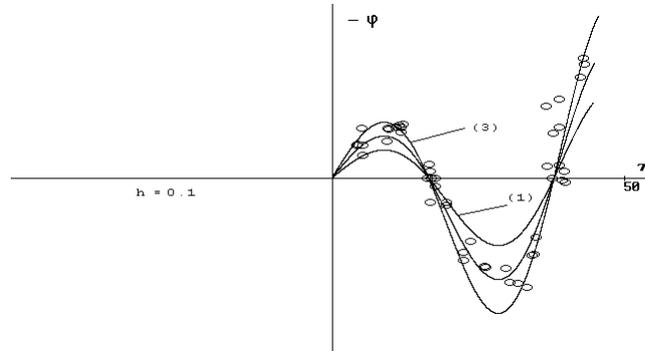


Рис. 28. Изменение угла отклонения

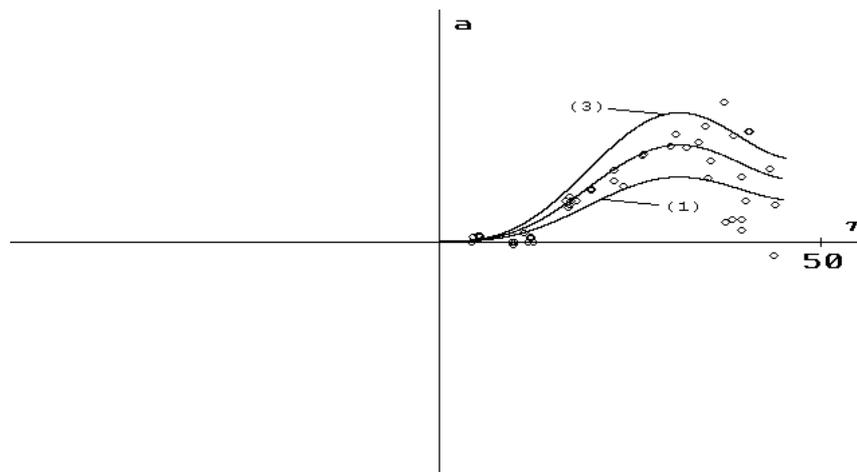


Рис. 29. Изменение бокового смещения

и начальным условиям

$$\varphi_0 = 0^0; \quad \omega_0 = -0,017; \quad \alpha_0 = -1^0; \quad -0,5^0; \quad 0^0; \quad 0,5^0.$$

Аналогичным образом всё производится и для титановой модели.

Изображения на рис. 27, 29 (для стальной модели) показывают, что все пучки удовлетворительно «накрывают» экспериментальные точки $a(\tau_i)$. В то же время степень соответствия для $\varphi(\tau_i)$ (рис. 26, 28) различна для различных значений h , что позволяет принять в качестве предварительной оценки значение $h_{\text{экс}} = 0,1$.

Следует также заметить, что разброс начальных условий, позволяющий «накрыть» экспериментальные точки «сетью» решений соответствующего дифференциального уравнения, как по углам атаки и отклонения, так и по начальной скорости лежит в пределах того же порядка, что и начальные условия для так называемых «канонических» траекторий [134, 236].

В заключение отметим, что уже на базе линейных уравнений движения тела показано, что неустойчивый характер прямолинейного поступательного торможения можно использовать для построения методики определения параметров взаимодействия тела со средой. Но эффект раскачки угловых колебаний тела приводит к необходимости учёта нелинейных членов в полной системе уравнений. Поэтому в следующем разделе приводятся нелинейные динамические системы, описывающие различные варианты движения тела.

3.3. Нелинейные динамические системы, описывающие различные варианты движения тела в среде

Выше исследовалась линейная модель взаимодействия тела со средой. Как указано выше, в основном мы ограничимся нелинейной моделью взаимодействия, описываемой системой (8)–(10) при условиях (11), (13) (или (15)).

Как уже отмечалось, одной из целей настоящего исследования является изучение конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения по части переменных (α, Ω) и нахождение такой пары (y_N, s) динамических функций, которая бы «отлавливала» возможные автоколебания в системе.

Поскольку неустойчивость прямолинейного поступательного движения имеет место по части переменных (α, Ω) , рассмотрим возможности отщепления независимой подсистемы на плоскости от общей системы (8)–(10). Для этого будем рассматривать классы движений, которые позволяют определить характер изменения величины v и тем самым провести изучение пары переменных (α, Ω) как независимых. Величина v должна удовлетворять некоторому условию, для обеспечения которого на систему необходимо наложить управляющую тягу T , действующую, к примеру, по прямой CD (см. рис. 2).

Укажем на достаточные условия отщепления независимой подсистемы второго порядка от общей системы (8)–(10).

Допустим, что величина тяги представляется в виде

$$T = \tau_1(\alpha)v^2 + \tau_2(\alpha)v\Omega + \tau_3(\alpha)\Omega^2,$$

где $\tau_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$, — достаточно гладкие функции. Тогда система (8)–(10) является эйлеровской однородной системой по части квазискоростей (Ω, v) степени однородности 2. Действительно, после замены независимого переменного (времени t) по формуле $d\bar{q} = v dt$, при которой якобиан замены v нигде не обращается в нуль, из (8)–(10) получаем новую систему

$$\varphi' = \omega, \quad (65)$$

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (66)$$

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha + \frac{s(\alpha) - \bar{\tau}(\alpha, \omega)}{m}\sin\alpha, \quad (67)$$

$$\omega' = \frac{1}{I}F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha, \omega), \quad (68)$$

где

$$\Psi(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\sin\alpha - \sigma\omega^2\cos\alpha + \frac{\bar{\tau}(\alpha, \omega) - s(\alpha)}{m}\cos\alpha, \\ \bar{\tau}(\alpha, \omega) = \tau_1(\alpha) + \tau_2(\alpha)\omega + \tau_3(\alpha)\omega^2.$$

В системе (66)–(68) третьего порядка появляется независимая подсистема (67), (68) второго порядка, которая может быть рассмотрена отдельно на её двумерном фазовом цилиндре.

3.3.1. Движение тела при наличии некоторой связи

Рассмотрим далее плоскопараллельное движение твёрдого тела при условии, когда на систему наложена неинтегрируемая сервосвязь вида

$$v = v_0 = \text{const}. \quad (69)$$

При этом уравнение (8) (в котором величина продольной составляющей суммарной силы, действующей на тело, представляется в виде $F_x = T - s(\alpha)v^2$) удовлетворяется тождественно.

Уравнение (69) задаёт в фазовом пространстве класс поверхностей уровня связи

$$\Phi_0 = v = \text{const}.$$

При этом функция T есть управление (модуль реакции сервосвязи), поддерживающее движение системы при условии (69).

При выполнении условия (69) у системы (8)–(10) появляется независимая подсистема вида

$$\alpha\dot{v}\cos\alpha + \Omega v\cos\alpha - \sigma\dot{\Omega} = 0, \quad I\dot{\Omega} = F(\alpha)v^2, \quad (70)$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v (см. [177, 218, 230–233, 259, 260, 269–271, 273, 275, 279, 282]).

Как видно из (70), на многообразии

$$O = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Lambda_i, \quad \Lambda_i = \left\{ (\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi i \right\} \quad (71)$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot{\alpha}$. Формально, таким образом, на многообразии O происходит *нарушение теоремы единственности*.

Из этого следует, что система (70) вне и только вне многообразия O эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\Omega + A_1 \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}, & \dot{\Omega} &= A_2 F(\alpha), \\ A_1 &= \frac{\sigma v}{I}, & A_2 &= \frac{v^2}{I}, \end{aligned} \quad (72)$$

которую мы будем исследовать при условии (15) (на многообразии O исследуемую систему доопределим по непрерывности).

В частности, если выполнено условие (16), то система (72) примет вид аналитической:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\Omega + A_1 \sin \alpha, & \dot{\Omega} &= A_2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ A_1 &= \frac{\sigma v AB}{I}, & A_2 &= \frac{v^2 AB}{I}. \end{aligned} \quad (73)$$

Нарушение теоремы единственности для системы (70) на многообразии O происходит в следующем смысле: почти через любую точку из O проходит неособая фазовая траектория системы (70), пересекая O под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой.

Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения тяги \mathbf{T} . Покажем это.

Для поддержания связи вида (69) необходимо выбрать величину реакции \mathbf{T} в виде

$$T_v(\alpha, \Omega) = \sigma m \Omega^2 + v^2 \left(s(\alpha) - \frac{m\sigma}{I} F(\alpha) \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (74)$$

(На многообразии O доопределим по непрерывности.)

Пусть

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} = L.$$

Заметим, что $|L| < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\left| F' \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| < +\infty.$$

При $\alpha = \pi/2$ нужная величина тяги найдётся из равенства

$$T_v \left(\frac{\pi}{2}, \Omega \right) = \sigma m \Omega^2 - \frac{m\sigma}{I} L v^2,$$

где значение Ω произвольно.

С другой стороны, поддерживая с помощью тяги \mathbf{T} вращение вокруг некоторой точки W , необходимо выбрать значение тяги в виде

$$T_v \left(\frac{\pi}{2}, \Omega \right) = \frac{m v^2}{R_0}, \quad (75)$$

где R_0 — расстояние CW .

Равенства (74) и (75) определяют, вообще говоря, различные значения $T = T_v$ для почти всех точек многообразия O , что и доказывает замечание.

3.3.2. Движение с постоянной скоростью центра масс

Изучаемая динамическая система (8)–(10) может описывать также класс движений, при которых скорость центра масс постоянна как вектор [231–233, 269, 270, 272]. Последнее достигается, в частности, выбором управляющей тяги из условия

$$\mathbf{T} = -\mathbf{S}. \quad (76)$$

Условие (76) также является достаточным условием понижения порядка системы (8)–(10), и её можно преобразовать к виду

$$\varphi' = \omega, \quad (77)$$

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (78)$$

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha, \quad (79)$$

$$\omega' = \frac{1}{I}F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha, \omega), \quad (80)$$

где

$$\Psi(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\sin\alpha - \sigma\omega^2\cos\alpha.$$

Условие (77) (как и (65)) является новым кинематическим соотношением, а система (78)–(80) (как и (66)–(68)) — новой полной системой, рассмотренной в динамическом пространстве квазискоростей.

Функция F , входящая в правую часть системы (78)–(80), по-прежнему удовлетворяет условию (15).

В частности, если выполнено условие (16), то система (78)–(80) примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (81)$$

$$\alpha' = -\omega + \sigma\frac{AB}{I}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha, \quad (82)$$

$$\omega' = \frac{AB}{I}\sin\alpha\cos\alpha - \omega\Psi(\alpha, \omega), \quad (83)$$

где

$$\Psi(\alpha, \omega) = \sigma\frac{AB}{I}\sin^2\alpha\cos\alpha - \sigma\omega^2\cos\alpha.$$

3.3.3. Свободное торможение твёрдого тела

Вернёмся к рассмотрению свободного торможения тела (см. [132–134, 178, 179, 234, 236, 269, 270, 274, 280, 283, 286]). Имеем

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}. \quad (84)$$

Условие (84) (как и (74), (75), (76)) является достаточным для понижения порядка системы (8)–(10), которую можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \varphi' &= \omega, \\ v' &= v\Psi(\alpha, \omega), \end{aligned} \quad (85)$$

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma}{I}F(\alpha) \cos \alpha + \sigma\omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha, \quad (86)$$

$$\omega' = \frac{1}{I}F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha, \omega), \quad (87)$$

где

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma\omega^2 \cos \alpha + \frac{\sigma}{I}\mathcal{F}(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha.$$

Уравнения (86), (87) образуют замкнутую подсистему второго порядка. При этом считаем, что функции F , s , входящие в правую часть системы (85)–(87), удовлетворяют условиям (15), (13).

В частности, если выполнены условия (16), (14), то система (85)–(87) примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (88)$$

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma}{I}AB \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sigma\omega^2 \sin \alpha + \frac{B}{m} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (89)$$

$$\omega' = \frac{1}{I}AB \sin \alpha \cos \alpha - \omega\Psi(\alpha, \omega), \quad (90)$$

где

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma\omega^2 \cos \alpha + \frac{\sigma}{I}AB \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{B}{m} \cos^2 \alpha.$$

3.3.4. Нелинейный приведённый осциллятор

Рассмотрим для примера систему вида (72) на плоскости. Пусть

$$g(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}$$

(на многообразии \mathcal{O} доопределим по непрерывности). В силу (15) функция g достаточно гладкая.

После регулярной в $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$ замены

$$y_2 = -\Omega + A_1g(\alpha), \quad y_1 = \alpha$$

фазовые траектории системы (72) эквивалентны траекториям системы

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -A_2g(y_1) \cos y_1 + A_1y_2g'(y_1), \end{aligned}$$

которая описывает нелинейный маятник с переменной диссипацией. Движение происходит под действием двух сил: потенциальной $A_2g(y_1) \cos y_1$ и линейной по скорости y_2 , коэффициент $A_1g'(y_1)$ которой, вообще говоря, меняет знак.

В тех полосах на фазовом цилиндре, где коэффициент $A_1g'(y_1)$ имеет строго положительный знак, происходит подкачка энергии со стороны среды. В тех

же полосах, где коэффициент силы, линейной по скорости y_2 , имеет строго отрицательный знак, сила, действующая на тело, рассеивает энергию, заставляя маятник тормозить своё движение.

Последние замечания показывают, что мы имеем дело с диссипативной системой с переменной диссипацией (а точнее с системой, имеющей диссипацию переменного знака). Фазовая плоскость $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$ складывается в объединение чередующихся областей, в каждой из которых присутствует диссипация только одного знака.

3.3.5. Ещё о диссипативных системах и о системах с переменной диссипацией с нулевым и ненулевым средним

Системы (72); (73); (79), (80); (82), (83) являются системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Дать достаточно общее и строгое определение таких систем нелегко. В настоящей работе будем определять такие системы следующим образом. Система на фазовом цилиндре имеет переменную диссипацию с нулевым средним, если в среднем по цилиндру диссипация равна нулю. Например, для системы (73) её фазовый цилиндр является замыканием объединения полос

$$\Pi = \left\{ (\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right\}$$

и

$$\Pi' = \left\{ (\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} < \alpha < 3\frac{\pi}{2} \right\},$$

в каждой из которых диссипация в системе имеет строго определённый знак: в полосе Π — отрицательный (т. е. происходит подкачка энергии), а в полосе Π' — положительный (т. е. происходит рассеяние энергии). Отличительным признаком подкачки или рассеяния энергии в данном случае является знак дивергенции векторного поля системы. Действительно, указанная дивергенция для системы (73) равна $A_1 \cos \alpha$ и в полосе Π положительна, что объясняет «расширение» фазового объёма в силу фазового потока, а в полосе Π' отрицательна, что объясняет его «сокращение» (см. раздел 6). В среднем по цилиндру дивергенция равна нулю, так как

$$A_1 \int_0^{2\pi} \cos \alpha \, d\alpha = 0.$$

Ниже будет показано, что перечисленные системы имеют дополнительные симметрии, поэтому их фазовые цилиндры и являются объединением чередующихся полос, в каждой из которых имеется диссипация только одного знака.

Системы же (86), (87) и (89), (90) не обладают описанным свойством, несмотря на то что на их фазовых цилиндрах действительно имеется диссипация разных знаков. В среднем же по фазовому цилиндру для названных систем диссипация строго положительна (см. раздел 7), поэтому данные системы являются системами с переменной диссипацией с ненулевым средним.

В дальнейших разделах мы переходим к построению качественной методики исследования полученных динамических систем. Аналогичные системы, полученные из пространственной динамики, исследуются аналогичными методами многомерной качественной теории. Исследование систем пространственной динамики (ввиду его сложности) выносится в разделы 8 и 9.

4. Некоторые вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений в динамике систем с переменной диссипацией

В данном разделе затрагиваются некоторые вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, от решения которых зависит исследование как диссипативных динамических систем, так и систем с переменной диссипацией, рассматриваемых ниже и возникающих, в частности, в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, и теории колебаний. Рассматриваются такие проблемы, как бифуркация рождения предельного цикла из слабого фокуса; вопросы существования так называемых монотонных предельных циклов; наличия замкнутых траекторий, стягиваемых в точку по двумерным поверхностям, или траекторий, не стягиваемых в точку по фазовому цилиндру; качественные вопросы теории топографических систем Пуанкаре и более общих систем сравнения; проблемы существования и единственности траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удалённые точки для систем на плоскости; элементы качественной теории монотонных векторных полей, а также вопросы существования семейств длиннопериодических и устойчивых по Пуассону траекторий. В заключение исследуются возможности перенесения теории двумерных топографических систем Пуанкаре и систем сравнения на многомерный случай.

4.1. Замечания по бифуркации рождения цикла Пуанкаре—Андрона—Хопфа

4.1.1. Общие теоремы о рождении предельного цикла

Цель этого раздела — предложить достаточно простое, хотя и не исчерпывающее, изложение того, что обычно называют бифуркацией рождения предельного цикла из слабого фокуса, а также её приложений к задачам динамики твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. Исторически вопрос восходит к работам А. Пуанкаре [214, 215] (1892 г.). Эта тема также обсуждалась А. А. Андроновым [9—19] начиная с 1930 г. Основные же работы Хопфа по данному вопросу появились в 1942 г. Хотя термин «бифуркация Пуанкаре—Андрона—Хопфа» (сюда иногда даже включают Фридрихса) был бы

более точным, в западной литературе более распространён термин «бифуркация Хопфа». Причиной этого является то, что самый существенный вклад Хопфа — обобщение результата с двумерного случая на высшие размерности.

Бифуркация рождения цикла — это появление периодических орбит («автоколебаний») из устойчивой неподвижной точки при прохождении параметра через критическое значение. Хотя в наше время доказана возможность применения бифуркационной теории Хопфа к нелинейным параболическим уравнениям с частными производными, мы ограничимся применением этой теории к обыкновенным дифференциальным уравнениям на плоскости.

Как было указано ранее, обычно к указанной бифуркации относят бифуркацию рождения устойчивого цикла из слабого асимптотически устойчивого положения равновесия [9—19].

Теорема 4.1 ([69, 214, 215, 359]). *Рассмотрим на плоскости автономную систему*

$$\begin{aligned}x'_1 &= X_1(x_1, x_2, \mu), \\x'_2 &= X_2(x_1, x_2, \mu),\end{aligned}\tag{91}$$

заданную достаточно гладкими функциями $X_1(x_1, x_2, \mu)$, $X_2(x_1, x_2, \mu)$, зависящими от параметра μ . Пусть для любого μ система имеет в начале координат неподвижную точку. Если $\lambda_i(\mu)$ ($i = 1, 2$) являются собственными значениями линеаризованной системы в начале координат и они комплексно-сопряжённые (а также чисто мнимые при $\mu = \mu_0$), то пусть

$$\left. \frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda_i(\mu) \right|_{\mu=\mu_0} > 0 \quad (< 0).$$

При этом предположим, что начало координат при $\mu = \mu_0$ асимптотически устойчиво. Тогда

- 1) $\mu = \mu_0$ — точка бифуркации системы;
- 2) существует $\mu_1 < \mu_0$ ($\mu_1 > \mu_0$), такое что для любого $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$ ($\mu \in (\mu_0, \mu_1)$) начало координат — устойчивый фокус;
- 3) существует $\mu_2 > \mu_0$ ($\mu_2 < \mu_0$), такое что для любого $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$ ($\mu \in (\mu_2, \mu_0)$) начало координат — неустойчивый фокус, окружённый устойчивым предельным циклом, размер которого растёт с возрастанием (убыванием) μ от μ_0 до μ_2 как $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$.

Доказательство этой (а также более общей) теоремы можно найти в [69]. Основная техника, используемая в доказательстве, — это метод инвариантных многообразий. Суть доказательства лежит в применении теоремы о неявной функции.

Используя теорему 4.1, можно сформулировать аналогичную теорему для рождения неустойчивого предельного цикла.

Теорема 4.2. Пусть система (91) имеет неподвижную точку в начале координат для любого μ . Если $\lambda_i(\mu)$ ($i = 1, 2$) — собственные значения линеаризованной системы и они комплексно-сопряжённые (а также чисто мнимые при

$\mu = \mu_0$), то пусть

$$\left. \frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda_i(\mu) \right|_{\mu=\mu_0} < 0 \quad (> 0).$$

При этом предположим, что при $\mu = \mu_0$ существует такая окрестность начала координат, что любая нетривиальная траектория покидает её за конечное время. Тогда

- 1) $\mu = \mu_0$ — точка бифуркации системы;
- 2) существует $\mu_1 < \mu_0$ ($\mu_1 > \mu_0$), такое что для любого $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$ ($\mu \in (\mu_0, \mu_1)$) начало координат — неустойчивый фокус;
- 3) существует $\mu_2 > \mu_0$ ($\mu_2 < \mu_0$), такое что для любого $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$ ($\mu \in (\mu_2, \mu_0)$) начало координат — устойчивый фокус, окружённый неустойчивым предельным циклом, размер которого растёт с возрастанием (убыванием) μ от μ_0 до μ_2 как $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$.

Теорему 4.2 можно доказать либо методом, используемым при доказательстве теоремы 4.1, либо сведением системы (91) к новой системе при помощи замены независимого переменного $t \Rightarrow -t$ и параметра $\mu \Rightarrow -\mu$, в которой произойдёт рождение устойчивого предельного цикла согласно теореме 4.1.

Замечание. Теоремы, изложенные выше, существенно связаны с однопараметрическими семействами дифференциальных уравнений. Поэтому никаких равномерных оценок на параметры, при которых происходит бифуркация рождения цикла, вообще говоря, не существует.

Таким образом, если система уравнений зависит от m параметров, то, вообще говоря, рождение цикла связано с изменением лишь одного параметра при фиксированных остальных $m - 1$ параметрах.

Замечание. Основным моментом существования указанной бифуркации является наличие негрубого положения равновесия (но только фокуса — аттрактора или репеллера). Можно привести примеры, когда выполнены все условия теоремы, кроме одного: как в линейном, так и в нелинейном случае положение равновесия является центром. Последнее условие и является ключевым в данном вопросе. Оно будет противоречить рождению грубого предельного цикла (ср. [69, 359]).

4.1.2. Рождение предельных циклов в задаче о движении тела в среде при наличии неголономной связи

Рассмотрим системы вида (72) с дополнительным слагаемым

$$\alpha' = -\Omega + A_1 \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha}, \quad \Omega' = A_2 \mathcal{F}(\alpha) - h\Omega, \quad (92)$$

на множестве

$$\Pi = \left\{ (\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

При $h = 0$ маятниковая система (92) совпадает с (72). При $h \neq 0$ в системе присутствует линейный демпфирующий момент [273] (см. раздел 10).

Лемма 4.1. Пусть

- 1) $A_1 > 0$, $\mathcal{F}'(0) > 0$, $\mathcal{F}(-\alpha) = -\mathcal{F}(\alpha)$, $\mathcal{F}(\varepsilon_0) > 0$ для всех $\varepsilon_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $A_1^2 \mathcal{F}'(0) - A_2 < 0$;
- 2) $\mathcal{F} \in C^2((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$, $|\mathcal{F}(\alpha)| < \mathcal{F}'(0)|\alpha| \cos \alpha$ ($|\mathcal{F}(\alpha)| > \mathcal{F}'(0)|\alpha| \cos \alpha$) в некоторой окрестности начала координат (либо $\mathcal{F}'''(0) + 3\mathcal{F}'(0) < 0$ ($\mathcal{F}'''(0) + 3\mathcal{F}'(0) > 0$));
- 3) $\frac{d}{d\alpha} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha} \geq 0$ для всех $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Тогда

- 1) при $h \leq 0$ не существует в полосе Π замкнутых кривых из траекторий;
- 2) точка $h = h_0 = A_1 \mathcal{F}'(0)$ — точка бифуркации системы;
- 3) существует $h_1 < h_0$, такое что для любого $h \in (h_1, h_0)$ точка $(0, 0)$ — неустойчивый фокус, окружённый единственным устойчивым предельным циклом, размер которого растёт с уменьшением h от h_0 до h_1 (для любого $h \in (h_1, h_0)$ точка $(0, 0)$ — неустойчивый фокус);
- 4) существует $h_2 > h_0$, такое что для любого $h \in (h_0, h_2)$ точка $(0, 0)$ — устойчивый фокус (для любого $h \in (h_0, h_2)$ точка $(0, 0)$ — устойчивый фокус, окружённый единственным неустойчивым предельным циклом, размер которого растёт с ростом h от h_0 до h_2).

Данная лемма доказывается с помощью уточнения метода Бендиксона [43], а также построения вспомогательной функции Ляпунова.

Замечание. Условие 3) леммы 4.1 часто лишнее, как будет показано ниже.

Следствие 4.1. Функция $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = AB \sin \alpha \cos \alpha$, $AB > 0$ (см. (16)), удовлетворяет условию леммы 4.1. В этом случае в полосе Π появится устойчивый предельный цикл.

Лемма 4.2. Рассмотрим системы вида (92) в полосе Π' при условиях леммы 4.1,

$$\Pi' = \left\{ (\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} < \alpha < 3\frac{\pi}{2} \right\},$$

а также при условии $\mathcal{F}(\alpha + \pi) = -\mathcal{F}(\alpha)$. Тогда

- 1) при $h \geq 0$ не существует замкнутых кривых из траекторий в полосе Π' ;
- 2) точка $h = h_0 = -A_1 \mathcal{F}'(0)$ — точка бифуркации системы;
- 3) существует $h_1 > h_0$, такое что для любого $h \in (h_0, h_1)$ точка $(\pi, 0)$ — устойчивый фокус, окружённый единственным неустойчивым предельным циклом, размер которого растёт с ростом h от h_0 до h_1 (для любого $h \in (h_0, h_1)$ точка $(\pi, 0)$ — устойчивый фокус);
- 4) существует $h_2 < h_0$, такое что для любого $h \in (h_2, h_0)$ точка $(\pi, 0)$ — неустойчивый фокус (для любого $h \in (h_2, h_0)$ точка $(\pi, 0)$ — неустойчивый фокус, окружённый единственным устойчивым предельным циклом, размер которого растёт с уменьшением h от h_0 до h_2).

Лемма 4.2 следует из леммы 4.1 и теоремы Четаева о неустойчивости.

4.1.3. Рождение предельных циклов в задаче о свободном торможении твёрдого тела в сопротивляющейся среде

Рассмотрим системы вида (86), (87) в полосе Π' и, если не будет оговорено, при условиях (15), (13).

Если

$$n_0^2 = \frac{\mathcal{F}'(0)}{I}, \quad B = s(0),$$

то введём два безразмерных параметра

$$\mu_1 = 2 \frac{B}{mn_0} > 0, \quad \mu_2 = \sigma n_0 > 0.$$

Пусть

$$\mu = \mu_1 - \mu_2.$$

Далее будут получены достаточные условия наличия слабого аттрактора и наличия слабого репеллера, что позволит найти бифуркацию рождения цикла.

Лемма 4.3. *Рассмотрим систему (86), (87) в полосе Π' . Пусть*

$$\mathcal{F} \in C^3 \left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right) \cap \Phi, \quad s \in C^2 \left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right) \cap \Sigma,$$

а также

$$\sigma n_0 < 2, \quad \text{In} = -\frac{\sigma}{I} f_3 + 4 \frac{s_2}{m} - 4\sigma n_0^2, \quad f_1 = \mathcal{F}'(0), \quad f_3 = \mathcal{F}'''(0), \quad s_2 = s''(0).$$

Тогда

- 1) если $\text{In} < 0$, то
 - а) при $\mu_1 = \mu_2$ происходит бифуркация системы;
 - б) зафиксируем $\mu_2^0 < 2$. Существует $\bar{\mu}_1 < 0$, такое что для любого $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (\bar{\mu}_1, 0)$ точка $(\pi, 0)$ — устойчивый фокус; существует $\bar{\mu}_2 > 0$, такое что для любого $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (0, \bar{\mu}_2)$ точка $(\pi, 0)$ — неустойчивый фокус, окружённый устойчивым предельным циклом, размер которого растёт с ростом $\bar{\mu}$ от 0 до $\bar{\mu}_2$;
- 2) если $\text{In} > 0$, то
 - а) при $\mu_1 = \mu_2$ происходит бифуркация системы;
 - б) зафиксируем $\mu_2^0 < 2$. Существует $\bar{\mu}_1 > 0$, такое что для любого $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (0, \bar{\mu}_1)$ точка $(\pi, 0)$ — неустойчивый фокус; существует $\bar{\mu}_2 < 0$, такое что для любого $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (\bar{\mu}_2, 0)$ точка $(\pi, 0)$ — устойчивый фокус, окружённый неустойчивым предельным циклом, размер которого растёт с уменьшением $\bar{\mu}$ от 0 до $\bar{\mu}_2$.

В лемме 4.3 не существует равномерных оценок на оба параметра μ_1 и μ_2 .

Следствие 4.2. Пусть выполнены условия (16), (14) и $\sigma n_0 < 2$. Тогда

- 1) при $2 \frac{B}{mn_0} = \sigma n_0$ происходит бифуркация системы;

- 2) зафиксируем $\sigma n_0 = \mu_2^0 < 2$. Существует $\bar{\mu}_1 < 0$, такое что для любого $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (\bar{\mu}_1, 0)$ точка $(\pi, 0)$ — устойчивый фокус; существует $\bar{\mu}_2 > 0$, такое что для любого $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (0, \bar{\mu}_2)$ точка $(\pi, 0)$ — неустойчивый фокус, окружённый устойчивым предельным циклом, размер которого растёт с ростом $\bar{\mu}$ от 0 до $\bar{\mu}_2$.

Замечание. Цепочка равенств $\mu_1 = \mu_2, \text{In} = 0, \dots$ задаёт в бесконечномерном пространстве коэффициентов тейлоровских разложений функций \mathcal{F} и s некоторое множество. В силу того что при $\mu_1 \neq \mu_2$ или $\text{In} \neq 0$ удаётся определить характер траекторий возле точки $(\pi, 0)$, величины $\mu = \mu_1 - \mu_2$ и In являются функциями от первых двух коэффициентов функции последования.

Действительно, $\mu = 0$ и $\text{In} = 0$ тогда и только тогда, когда либо линейный, либо коэффициент при кубе разложения функции последования равны нулю [214].

4.2. О замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых в точку по фазовой поверхности

В данном разделе мы исследуем вопросы существования замкнутых кривых из траекторий систем дифференциальных уравнений на двумерных поверхностях. Рассматриваемые фазовые кривые стягиваются в точку по фазовой поверхности. Таким образом, искомые замкнутые фазовые траектории являются подмножеством той части фундаментальной группы данной двумерной фазовой поверхности, которая представляет тривиальную компоненту.

Важность отыскания такого класса замкнутых кривых, состоящих из фазовых траекторий, состоит в том, что для любого гладкого фазового двумерного многообразия существуют кривые, стягиваемые по нему в точку. И хотя последние кривые могут и не быть фазовыми траекториями, необходимость ответа на вопрос о существовании такого типа замкнутых траекторий очевидна [38]. К тому же замкнутые траектории всегда являются ключевыми (по крайней мере для систем на двумерных многообразиях), поскольку от их расположения зависит глобальное расположение многих остальных фазовых траекторий. Последний факт объясняется тем, что фазовые кривые, состоящие из траекторий динамических систем на двумерных многообразиях и стягиваемые по ним в точку, разделяют фазовое многообразие на две части [38].

Если искомые кривые существуют, то основным методом их исследования является построение и изучение функции последования Пуанкаре.

4.2.1. Вопросы существования монотонных предельных циклов

Рассмотрим замкнутую траекторию данного векторного поля в многомерном пространстве и трансверсальную площадку коразмерности 1 в какой-нибудь точке. Отображение последования переводит векторы поля, приложенные к площадке, в векторы поля, также приложенные к данной площадке. Поэтому

существует по крайней мере один собственный вектор с собственным значением, равным 1, для данного отображения последования. Последний собственный вектор является вектором поля, приложенным к данной точке замкнутой траектории (цикла).

Допустим, что векторное поле задано в трёхмерном пространстве. Тогда трансверсальная площадка двумерна и можно рассмотреть вектор нормали в данной точке цикла. На вектор поля системы и на построенную нормаль в данной точке можно натянуть соприкасающуюся плоскость. В ней можно определить координаты вдоль вектора поля и вектора нормали в данной точке.

Пусть трансверсальная площадка проходит через вектор нормали и вектор бинормали в данной точке.

Определение. Если для каждой точки исследуемого цикла близлежащие траектории, пересекающие построенную перпендикулярную площадку, стремятся к циклу строго монотонно, то цикл назовём монотонным.

Другими словами, строгая монотонность означает, что близлежащие вектора поля не параллельны векторам поля вдоль цикла. Можно дать ряд эквивалентных определений монотонных циклов. Ограничимся одним.

Определение. Цикл называется монотонным, если ни один близлежащий вектор поля к вектору поля вдоль цикла не проектируется на перпендикулярную площадку в нулевой вектор возле любой точки цикла.

В частности, для динамических систем на плоскости можно дать следующее определение.

Определение. Предельный цикл на плоскости назовём монотонным, если при развёртке его на прямую близкие траектории стремятся к циклу строго монотонно.

Рассмотрим системы вида (72) в полосе Π .

Из определения монотонного цикла нетрудно выводится следующая лемма.

Лемма 4.4. Если $\mathcal{F}(\alpha) \neq 0$ при $\alpha \neq 0$, то монотонных предельных циклов не существует.

Следствие 4.3. Если выполнено условие (15), то лемма 4.4 выполнена во всей плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$, а именно во всей плоскости не существует монотонных предельных циклов.

Замечание. Ниже будет показано, что при $A_1 A_2 \neq 0$ у систем вида (72) не существует никаких замкнутых кривых из траекторий во всей плоскости (по крайней мере при $\mathcal{F} \in \Phi$). Таким образом, локальные соображения о несуществовании монотонных циклов позволяют в дальнейшем исследовать вопрос о несуществовании любых замкнутых кривых из траекторий.

Теорема 4.3. Пусть у векторного поля на плоскости (обозначим его v) в области D существуют такие точки покоя, что

$$\text{ind}_{\partial D} v = 1.$$

Если существует прямая L , пересекающая ∂D , такая что ненулевая компонента векторного поля на ней $v|_L$ образует постоянный угол с ней, то у поля не существует монотонного предельного цикла, содержащего внутри себя точку покоя поля, лежащую на прямой L .

Теорема 4.3 имеет простой наглядный смысл и легко обобщается на случай высших размерностей.

4.2.2. Об отсутствии замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых в точку на двумерных поверхностях

В предыдущем разделе уже частично рассматривались вопросы существования циклов динамических систем в связи с определением монотонных предельных циклов. Ниже будут рассмотрены вопросы существования общих замкнутых кривых из траекторий динамических систем, стягиваемых в точку по фазовой двумерной поверхности.

С помощью теоремы Стокса можно доказать следующее утверждение (ср. [119, 359]).

Теорема 4.4. *Рассмотрим ориентируемое риманово многообразие $N^2 \subset \mathbb{R}^3$ с векторным полем v на нём. Пусть w — такое ненулевое поле, что*

$$(w, v)|_{N^2} = 0.$$

Если существует такая достаточно гладкая функция F на многообразии, что

$$(\operatorname{rot} Fw, n)|_{N^2}$$

не меняет знака в данной односвязной области, граница которой стягиваема по многообразию N^2 в точку, то в этой области не существует замкнутой кривой из траекторий поля v , стягиваемой по многообразию в точку [271] (здесь n — внешняя нормаль).

В частности, на плоскости для отсутствия данных замкнутых кривых из траекторий достаточно, чтобы существовала гладкая функция F , такая что дивергенция поля Fv не меняла знака.

В каждом конкретном случае данную теорему можно усилить.

В качестве следствия приведём следующую лемму.

Лемма 4.5. *Рассмотрим систему (72) в полосе Π . Если*

$$A_1 \neq 0, \quad \mathcal{F} \in C^1 \left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

и величина

$$\frac{d \mathcal{F}(\alpha)}{d\alpha \cos \alpha}$$

знакопостоянна при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, то в полосе Π не существует замкнутой кривой из траекторий.

Замечание. Можно доказать, что и при более слабых условиях на функцию \mathcal{F} замкнутые кривые из траекторий поля системы (72) будут отсутствовать. При этом условие знакопостоянства последней производной оказывается лишним. Это будет доказано, когда будут рассмотрены системы сравнения для (72).

Замечание. В силу теоремы Лиувилля о сохранении фазового объёма с постоянной плотностью условия леммы 4.5 являются достаточными для отсутствия сохранения интегрального инварианта.

Тем же методом можно доказывать отсутствие замкнутых кривых из траекторий у полей в \mathbb{R}^n , интегрируя нормальные поля вдоль 1-путей [103].

4.3. Об отсутствии замкнутых кривых из траекторий, не стягиваемых в точку по фазовому цилиндру

4.3.1. Общие утверждения об отсутствии замкнутых траекторий, огибающих цилиндр, для систем, обладающих центральной симметрией

В предыдущем разделе рассматривались замкнутые траектории систем дифференциальных уравнений, стягиваемых в точку по двумерной фазовой поверхности. Такие траектории представляют часть тривиальной компоненты фундаментальной группы. Эта компонента всегда существует для двумерных гладких многообразий. В отличие от траекторий, рассматриваемых в предыдущем разделе, замкнутые кривые, которые не стягиваются по фазовому многообразию в точку, могут не существовать. Последнее связано с тем, что топология фазового многообразия может препятствовать существованию нетривиальной компоненты у фундаментальной группы данного многообразия.

Рассмотрим для простоты случай двумерного цилиндра, топология которого допускает существование замкнутых кривых, не стягиваемых по цилиндру в точку. Примером такой кривой может служить огибающая цилиндра окружность. К тому же в дальнейших разделах часто будут рассматриваться динамические системы на двумерном цилиндре.

В предыдущих разделах уже употреблялся термин «кривая, состоящая из фазовых траекторий». В этой связи дадим традиционное определение.

Определение. Фазовой характеристикой назовём кривую, касающуюся векторного поля. В частности, кривая, состоящая из фазовых кривых поля, будет являться фазовой характеристикой.

Определение. Центром симметрии векторного поля, заданного в координатах (x, y) , назовём такую точку (x_0, y_0) , что после замены переменных

$$\begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x \\ y_0 + y \end{pmatrix}$$

векторное поле меняет знак на противоположный.

Справедлива следующая теорема [38, 359].

Теорема 4.5. *Рассмотрим автономную систему*

$$\psi' = \Psi(\psi, y), \quad y' = Y(\psi, y) \quad (93)$$

на цилиндре

$$G = \mathbb{S}^1\{\psi \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{y\},$$

где $\psi, Y \in C^1(G)$. Пусть существует достаточно гладкая функция $M: G \rightarrow \mathbb{R}$, такая что величина $\operatorname{div} Mv(\psi, y)$ является знакоопределённой (здесь $v(\psi, y) = (\Psi(\psi, y), Y(\psi, y))$) в области Ω , огибающей цилиндр. Тогда в Ω нет более одной замкнутой кривой из траекторий системы (93), не стягиваемой по цилиндру в точку.

Если же при этом существует центр симметрии x_0 векторного поля системы (93), такой что ни одна нетривиальная фазовая характеристика не продолжается через x_0 , то у системы (93) не существует даже одной замкнутой кривой из траекторий системы (93).

Для объяснения последней теоремы заметим, что если существует центр симметрии поля, обладающий указанным свойством, то кривых из траекторий будет существовать по крайней мере две (если они вообще есть).

4.3.2. Замечания из динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой

Хотя утверждения этого раздела достаточно простые, идеология поиска фазовых характеристик, огибающих фазовый цилиндр (см. предыдущий раздел), прекрасно отражается на следствиях из теоремы 4.5.

Следствие 4.4. *Рассмотрим системы (92) на цилиндре. Если*

$$|h| \geq A_1 \max \left| \frac{d}{d\alpha} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha} \right|,$$

то у систем вида (92) существует не более одной кривой из фазовых траекторий, огибающей цилиндр. Если же при этом $\mathcal{F} \in \Phi$, то таких кривых вообще нет.

И хотя данное следствие носит очевидный характер, при условии, когда $\mathcal{F} \in \Phi$, у систем вида (92) при любом $h \neq 0$ не существует замкнутых характеристик, огибающих фазовый цилиндр (см. раздел 10). При $h = 0$ таких кривых бесконечно много.

Замечание. Когда будут разбираться системы сравнения [214, 215, 297], будет показано, что для системы, описывающей свободное торможение тела в среде (она задана на цилиндре), при некоторых естественных условиях не будет существовать ни одной фазовой характеристики, огибающей фазовый цилиндр.

4.4. О существовании топографических систем Пуанкаре в динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой

Для исследования замкнутых траекторий динамических систем, возникающих в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, применим (а в некоторых случаях и видоизменим) теорию *топографических систем Пуанкаре* (ТСП) [214, 215, 297].

4.4.1. Топографические системы Пуанкаре

Пуанкаре предложил метод (хотя и не совсем общий) отыскания замкнутых орбит дифференциального уравнения (91). Для этого ему потребовалось ввести понятие «топографических систем».

Он первым рассмотрел алгебраическую функцию $F(x_1, x_2)$, которая

- 1) является достаточно гладкой и ограниченной в любой ограниченной области, стремится к бесконечности, когда одна из её переменных стремится к бесконечности;
- 2) равна нулю при $x_1 = x_2 = 0$ и положительна в остальных точках;
- 3) имеет первые производные, обращающиеся в нуль лишь при $x_1 = x_2 = 0$;
- 4) такова, что при $x_1 = x_2 = 0$ выполнено неравенство

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right) \left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \right) < 0.$$

Это неравенство означает, что кривая контактов имеет в начале координат изолированную особую точку (о кривых контактов см. ниже и [214, 215, 297]);

- 5) такова, что кривая, заданная уравнением

$$X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0,$$

не уходит на бесконечность.

При выполнении условий 1)–5) уравнение

$$F(x_1, x_2) = k$$

даёт так называемую топографическую систему вложенных друг в друга кривых, имеющую вершину в начале.

Надо сказать, что не все аналитические условия 1)–5) нам понадобятся. Мы будем учитывать лишь геометрию расположения кривых контактов, траекторий исследуемой динамической системы и кривых *топографической системы Пуанкаре*.

Ниже рассмотрим системы вида (72); (92); (86), (87); (79), (80) на цилиндре $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$ (или $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\Omega\}$) или на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ (или $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$).

Если не будет дополнительно оговорено, можно считать, что выполнены условия (15), (13).

Под ТСП будем понимать систему вложенных друг в друга замкнутых кривых, полученных с помощью поверхностей уровня неотрицательной функции, которая равна нулю лишь в точке, к которой сходятся полученные вложенные замкнутые кривые. С помощью такой системы можно успешно «ловить» замкнутые траектории исследуемой динамической системы: вычисляя угол между векторами поля, образующими семейство ТСП, и векторами исследуемого поля динамической системы, можно получить информацию о расположении траекторий исследуемого векторного поля. Чтобы доказать отсутствие замкнутых фазовых характеристик, достаточно выполнения неравенства

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} X_2 \leq (\geq) 0.$$

Здесь $F(x_1, x_2) = \text{const}$ — семейство замкнутых кривых, $X = \{X_1, X_2\}$ — исходное векторное поле. Таким образом, с помощью последнего неравенства можно исследовать качественное поведение траекторий исходной системы. Заметим, что векторное поле обязательно должно быть задано в некоторых координатах.

Выше указывалось, что можно определить ТСП более корректно, но это нам не потребуется. Более того, нас интересуют лишь геометрические свойства взаимного расположения кривых ТСП и фазовых кривых исследуемого поля.

4.4.2. Характеристические функции и кривые контактов векторных полей и динамика твёрдого тела, взаимодействующего со средой

С понятием топографической системы Пуанкаре тесно связано понятие характеристической функции двух полей на плоскости. Последняя функция определяет кососимметрическую форму на плоскости. Если $F(x_1, x_2) = \text{const}$ — семейство замкнутых кривых, то система, имеющая явный вид гамильтоновой,

$$x'_1 = -\frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad x'_2 = \frac{\partial F}{\partial x_1},$$

задаёт векторное поле, касательное к семейству кривых ТСП. Тогда последнее неравенство эквивалентно

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \leq (\geq) 0,$$

в котором $Y_1 = -\frac{\partial F}{\partial x_2}$, $Y_2 = \frac{\partial F}{\partial x_1}$ — векторное поле системы. Оно касается кривых ТСП.

Рассмотрим две системы уравнений на плоскости. Эти уравнения задаются полями $X = \{X_1, X_2\}$ и $Y = \{Y_1, Y_2\}$ в некоторых координатах. Естественно рассмотреть функцию $\chi = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$, которая отвечает за знак синуса угла

между полями X и Y . Очевидно, $\chi = 0$ там и только там, где поля X и Y касаются.

Функция χ удовлетворяет следующим свойствам:

$$\chi(X, Y) = -\chi(Y, X), \quad \chi(\lambda X, Y) = \lambda\chi(X, Y)$$

для любой действительной функции λ .

Определение. Функцию χ мы назовём характеристической функцией двух векторных полей, а уравнение $\chi = 0$ назовём уравнением кривой контактов для полей X и Y .

Как применение метода ТСП к динамическим системам, возникающим в динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой, рассмотрим системы вида (72) в полосе Π . Ранее (раздел 4.2) было показано, что при некоторых условиях у данной системы не существует монотонных предельных циклов. Оказывается, при тех же условиях у такой системы не существует никакой замкнутой кривой, состоящей из фазовых траекторий.

Лемма 4.6. Пусть $A_1 A_2 \neq 0$. Если $\mathcal{F}(\alpha) \neq 0$ при $\alpha \neq 0$ в полосе Π , то у системы вида (72) не существует замкнутой кривой из траекторий в полосе Π , если $\mathcal{F}'(0) > 0$, $\mathcal{F}(0) = 0$.

Доказательство. Систему (72) при $A_1 = 0$ будем называть системой (72)'. Для системы (72)' начало координат является особой точкой, имеющей топологический тип центра. Таким образом, существует семейство периодических траекторий, подходящих как угодно близко к точкам

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Характеристическая функция, отвечающая системам (72) и (72)', равна

$$A_1 A_2 \frac{\mathcal{F}^2(\alpha)}{\cos \alpha}.$$

Единственная кривая контактов — прямая

$$\{(\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = 0\}.$$

В остальных точках полосы Π характеристическая функция положительна.

От противного. Пусть существует замкнутая кривая из траекторий γ_0 , ограничивающая область S_0 . Пусть $(\alpha_0, 0) \in \gamma_0$, где

$$0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим точку $(\alpha_0 + \varepsilon, 0)$, ε достаточно мало. Через неё проходит траектория ТСП γ_ε , ограничивающая область S_ε . Очевидно, что, выходя из точки $(\alpha_0, 0)$, траектория γ_0 никогда не попадет в область S_ε в силу положительности почти всюду характеристической функции. Но $(\alpha_0, 0) \in S_\varepsilon$. Противоречие. Лемма доказана. \square

Следствие 4.5. Если $\mathcal{F} \in \Phi$, то в полосе Π не существует замкнутой характеристики системы (72).

Рассмотрим систему (79), (80) в полосе Π .

Лемма 4.7. У системы (79), (80) в полосе Π при $\sigma \neq 0$ не существует замкнутой кривой из траекторий, если $\mathcal{F}(\alpha) \neq 0$ при $\alpha \neq 0$, а также $\mathcal{F}'(0) > 0$, $\mathcal{F}(0) = 0$.

Следствие 4.6. Если $\mathcal{F} \in \Phi$, то в полосе Π не существует замкнутой характеристики системы (79), (80).

Теперь рассмотрим систему (86), (87) в полосе Π .

Лемма 4.8. У системы вида (86), (87) в полосе Π при $\sigma \neq 0$ не существует замкнутой кривой из траекторий, если $\mathcal{F}(\alpha) \neq 0$ при $\alpha \neq 0$, а также $s(\alpha)|_{\Pi} \geq 0$, $\mathcal{F}'(0) > 0$, $\mathcal{F}(0) = 0$.

Следствие 4.7. Если $\mathcal{F} \in \Phi$, $s \in \Sigma$, то в полосе Π не существует замкнутой характеристики системы (86), (87).

Замечание. Как было показано, в полосе Π' у системы вида (86), (87) возможны при некоторых условиях предельные циклы.

Рассмотрим систему (86), (87) в области

$$\mathcal{O}' = \{\Pi_{(0,\pi)} \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\}\}.$$

Если $s(\frac{\pi}{2}) = \mathcal{F}(\frac{\pi}{2}) = 0$, то существует особая точка

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma}\right).$$

Здесь

$$\Pi_{(0,\pi)} = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \alpha < \pi\}.$$

Лемма 4.9. Рассмотрим систему вида (86), (87) в области \mathcal{O}' . Пусть для простоты $\mathcal{F} \in \Phi$, $s \in \Sigma$. Тогда вокруг точки покоя $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma})$ в области \mathcal{O}' не существует замкнутой кривой из траекторий, если равенство

$$\omega^2 s(\alpha) \cos \alpha - \frac{\sigma}{I} \omega \mathcal{F}(\alpha) s(\alpha) + \frac{1}{I} \mathcal{F}(\alpha) s(\alpha) \sin \alpha = 0 \quad (94)$$

выполнено в области \mathcal{O}' только при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что равенство (94) возникает при изучении так называемых нетривиальных положений равновесия (НПР) системы (86), (87). Об НПР см. раздел 6.

Вообще говоря, при исследовании системы (86), (87), в зависимости от области, используется одна из систем вида (79), (80) или (79), (80)'. Система (79), (80)' — это система (79), (80) при $\sigma = 0$.

4.5. Кривые контактов и системы сравнения.

Замечания о предельных циклах и проблеме различения центра и фокуса

4.5.1. Системы сравнения и исследование топологической структуры расположения траекторий

Метод ТСП, о котором говорилось в разделе 4.4, является частным случаем метода исследования с помощью систем сравнения. Рассмотрим две системы уравнений на плоскости и характеристическую функцию определяющих их векторных полей, которая, как указывалось, отвечает за знак синуса угла между векторными полями данных систем. Зная фазовую топологию разбиения на траектории одной из них, возможен анализ устройства фазовой плоскости другой системы. В частности, ТСП позволяет, к примеру, исследовать вопрос существования предельных циклов [276, 297]. Таким образом, основной упор делается на вычисление угла между двумя полями рассматриваемых систем в одной и той же области фазовой поверхности.

Вычислять характеристическую функцию можно для любых двух векторных полей на плоскости. В этой связи назовём системой сравнения для данной системы ту систему, качественное расположение траекторий которой полностью известно.

Ранее уже проводилось сравнение векторных полей систем (72)'; (86), (87); (79), (80).

Предложение 4.1. *Рассмотрим системы вида (79), (80) и (86), (87) на плоскости. Система (79), (80) является системой сравнения для системы (86), (87) следующим образом: почти всюду угол от вектора одного поля до вектора другого поля лежит в пределах от 0 до π и лишь на множестве нулевой меры этот угол равен нулю, если выполнены все условия леммы 4.9.*

Действительно, если $\mathcal{F} \in \Phi$, $s \in \Sigma$, то в силу леммы 4.9 характеристическая функция во всей фазовой плоскости является знакоопределённой.

Замечание. Если выполнены условия (16), (14), то угол между векторами полей систем (86), (87) и (79), (80) меняется монотонно относительно параметра

$$\mu_1 = \frac{B}{2mn_0}.$$

В частности, при $\mu_1 = 0$ последняя характеристическая функция тождественно равна нулю.

Замечание. Поскольку система (79), (80) на плоскости имеет три топологически различных типа фазового портрета [272], для исследования системы (86), (87) в каждой из областей её параметров можно использовать свой топологический тип (см. раздел 6).

В качестве системы сравнения для системы (86), (87) можно использовать систему (79), (80)', описывающую консервативную систему — физический маятник на плоскости.

Замечание. У системы (86), (87) не существует замкнутых кривых из траекторий, огибающих фазовый цилиндр, если выполнены все условия предложения 4.1.

Предложение 4.2. Рассмотрим системы (86), (87) и (79), (80)' во всей плоскости. Система (79), (80)' является системой сравнения для системы (86), (87) следующим образом: в полосе Π почти всюду угол от вектора одного поля до вектора другого поля лежит в пределах от 0 до π и лишь на множестве нулевой меры этот угол равен нулю, а в полосе Π' при условии, что

$$\frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} \geq \frac{\sigma}{I} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\sin \alpha} \quad \text{для всех } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

существует кривая контактов рассматриваемых двух полей, которая является топологической окружностью.

Доказательство. Действительно, если $\mathcal{F} \in \Phi$, $s \in \Sigma$, то в полосе Π кривая контактов — начало координат. Перенесём начало координат в точку $(\pi, 0)$ и перепишем уравнение кривой контактов в виде

$$\sigma \cos \alpha \left\{ \left(\frac{\mathcal{F}(\alpha)}{I} \right)^2 + \omega^4 \right\} = \frac{1}{I} \mathcal{F}(\alpha) \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha + \omega^2 \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha. \quad (95)$$

Тогда уравнение (95) кривой контактов, которую назовём нетривиальной, можно разрешить относительно ω^2 :

$$2\sigma\omega^2 = \frac{s(\alpha)}{m} \pm \sqrt{\frac{s^2(\alpha)}{m^2} + 4\sigma \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{I} \sin \alpha \left\{ \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} - \frac{\sigma}{I} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\sin \alpha} \right\}}. \quad (96)$$

В полосе Π уравнение (96), взятое со знаком минус, задаёт лишь точку $(0, 0)$, а взятое со знаком плюс — точку $(0, 0)$ и нетривиальную кривую контактов.

Нетривиальная кривая контактов симметрична относительно обеих осей координат (после переноса из полосы Π' в полосу Π), пересекает обе оси под прямым углом и только два раза (по теореме о неявной функции). Тем самым предложение доказано. \square

4.5.2. Некоторые общие утверждения о ТСП и системах сравнения

С целью рассмотрения вопросов существования ключевых траекторий (замкнутых фазовых характеристик и др.) докажем одну общую теорему. Для этого заметим, что вплоть до прямых Λ_{-1} и Λ_0 (а также Λ_0 и Λ_1) существует семейство замкнутых кривых, которое является ТСП (интегральные кривые системы (79), (80)'). Здесь

$$\Lambda_k = \left\{ (\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}.$$

Поставим также вопрос о существовании замкнутых кривых из траекторий для системы (86), (87) в полосе Π' . Для этого докажем утверждение, обобщающее рассуждения доказательств лемм 4.6, 4.7, 4.8, 4.9.

Теорема 4.6. Пусть в односвязной области D плоскости, содержащей точку покоя x_0 достаточно гладкого векторного поля v_1 , существует кривая $\gamma \ni x_0$, соединяющая две точки $A, B \in \partial D$ (точки A, B могут быть бесконечно удалёнными), такая что существует ТСП с центром в x_0 , задаваемая достаточно гладкой функцией V , продолжающаяся вдоль γ до A и B , заполняющая область $K \subseteq D$ и обладающая свойством

$$(v_1, v_2)|_{\mathbb{R}^2} > 0$$

(где $v_2 = \text{grad } V$) почти всюду в K , за исключением, быть может, некоторых кривых, не охватывающих x_0 . (Здесь $V = \text{const}$ — семейство кривых ТСП.) Тогда во всей области D вокруг точки x_0 не существует ни одной замкнутой кривой из траекторий поля v_1 .

Доказательство. От противного. Пусть такая кривая γ_0 существует, ограничивая область $S_0 \ni x_0$. Пусть $\{N_1, N_2\} = \gamma \cap \gamma_0 \neq \emptyset$ (поскольку $x_0 \in \gamma$) и точка N_1 — неособое начальное условие при движении по кривой γ_0 . Через точку N_1 проходит замкнутая кривая $\bar{\gamma}$ из ТСП, причём $\bar{\gamma} \subset K$. Если кривая $\bar{\gamma}$ ограничивает область \bar{S} , то существует $\varepsilon > 0$ (которое уменьшим насколько нужно), такое что

- 1) $N_\varepsilon \in \bar{\gamma}_\varepsilon \cap \gamma$, где $\bar{\gamma}_\varepsilon$ — кривая ТСП;
- 2) расстояние между точками N_ε и N_1 равно ε ;
- 3) $\bar{\gamma}_\varepsilon$ ограничивает область $\bar{S}_\varepsilon \supset \bar{S}$.

Выбранное значение ε таково, что через конечное время точка, двигаясь по траектории γ_0 с начальным условием N_1 , покинет область \bar{S}_ε . Поскольку $\bar{S}_\varepsilon \subset K$ и выполнено неравенство $(v_1, v_2)|_{\mathbb{R}^2} > 0$ почти всюду в K , за исключением, быть может, некоторых кривых, не охватывающих x_0 , то точка с начальным условием N_1 никогда больше в область $\bar{S}_\varepsilon \subset K \subset D$ не вернётся. Так как $\bar{S} \subset \bar{S}_\varepsilon$, то приходим к противоречию с замкнутостью кривой γ_0 . \square

Как уже отмечалось, в полосе Π' для систем вида (86), (87) при некоторых условиях существует ТСП с центром в точке $(\pi, 0)$, продолжающаяся до точек $(\frac{\pi}{2}, 0)$ и $(3\frac{\pi}{2}, 0)$. При этом нетривиальная кривая контактов системы сравнения (ТСП) и поля системы (86), (87) ограничивает область, целиком содержащую ТСП. Таким образом, из теоремы 4.6 следует справедливость следующей леммы.

Лемма 4.10. Рассмотрим систему (86), (87) в полосе Π' , если нетривиальная кривая контактов системы сравнения (79), (80)' и системы (86), (87) ограничивает область, целиком содержащую ТСП, продолжающуюся до точек $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(3\frac{\pi}{2}, 0)$. Тогда в полосе Π' не существует замкнутой кривой из траекторий системы (86), (87).

Замечание. Рассмотрим системы вида (86), (87) при условиях (15), (13). Выше ставился вопрос о существовании замкнутых кривых из траекторий в полосе Π' , т. е. кривых, окружающих точку $(\pi, 0)$. Поставим также более общий вопрос о существовании любых замкнутых кривых из траекторий системы (86), (87), стягиваемых по фазовому цилиндру в точку.

Очевидно, что сумма индексов особых точек, находящихся внутри таких кривых, должна равняться 1. Значит, такие кривые могут возникнуть вокруг точек $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Внутри таких кривых не могут содержаться одновременно два седла $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 0)$, $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 0)$ и точка $(2\pi k, 0)$, поскольку сумма индексов при этом равна -1 . Такие кривые не могут содержать внутри себя одновременно точки $(\pi k, 0)$ и $(\pi(k+1), 0)$, поскольку в силу центральной симметрии поля системы (86), (87) относительно точек $(\pi k, 0)$ и теоремы единственности это невозможно.

Остаётся единственная возможность существования такой кривой, содержащей более одной особой точки внутри себя. Пусть для определённости $k = 0$. Такая кривая может содержать точки

$$(0, 0), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{\sigma}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma}\right),$$

сумма индексов которых равна 1. Но в силу леммы 4.9 это невозможно, хотя бы потому, что траектория, имеющая в качестве ω -предельного множества точку $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma})$, имеет в качестве α -предельного множества бесконечно удалённую точку (см. следующий раздел).

Таким образом, вопрос существования замкнутых кривых из траекторий системы (86), (87), стягиваемых по фазовому цилиндру в точку, при условии выполнения леммы 4.9 свёлся к отысканию таких кривых в полосе Π' вокруг точки $(\pi, 0)$. Как было показано в разделе 4.1, при некоторых условиях такие кривые существуют.

4.5.3. Проблема различения центра и фокуса и системы сравнения

Первая проблема различения в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений — проблема центра и фокуса — возникает в точке $(\pi, 0)$ в полосе Π' для динамической системы вида (86), (87) при условиях (15), (13), а также при $\mu_1 = \mu_2$ и $0 < \mu_2 < 2$ (см. раздел 4.1). В разделе 4.1 данная проблема решена при $\text{Im} \neq 0$ в пользу слабого фокуса. Таким образом, в достаточно малой окрестности точки $(\pi, 0)$ все траектории-спирали приближаются к точке $(\pi, 0)$ либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$ (здесь t — независимый параметр вдоль траекторий).

Поставим вопрос о расширении данной окрестности точки $(\pi, 0)$ в полосе Π' (на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$). Для этого переведём начало координат в точку $(\pi, 0)$. После такой замены переменных система (86), (87) (рассматриваемая уже в полосе Π) примет вид

$$\begin{aligned}\alpha' &= \omega - \frac{\sigma}{I}\mathcal{F}(\alpha)\cos\alpha - \sigma\omega^2\sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha, \\ \omega' &= -\frac{1}{I}\mathcal{F}(\alpha) - \sigma\omega^3\cos\alpha + \frac{\sigma}{I}\omega\mathcal{F}(\alpha)\sin\alpha + \frac{\omega}{m}s(\alpha)\cos\alpha.\end{aligned}\tag{97}$$

Для простоты рассмотрим систему (97) при условиях (16), (14), что $\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}_0(\alpha)$, $s(\alpha) = s_0(\alpha)$. После замены в полосе Π по формуле $\tau = \sin\alpha$, $|\tau| < 1$, системе (97) поставим в соответствие уравнение

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{-n_0^2\tau - \sigma\omega^3 + \sigma n_0^2\omega\tau^2 + \frac{\sigma n_0^2}{2}\omega\sqrt{1-\tau^2}}{\omega - \sigma n_0^2\tau(1-\tau^2) - \sigma\omega^2\tau + \frac{\sigma n_0}{2}\tau\sqrt{1-\tau^2}}.\tag{98}$$

В уравнении (98) уже учтено условие $\mu_1 = \mu_2$, которое эквивалентно условию

$$\frac{B}{mn_0} = \frac{\sigma n_0}{2}.$$

Пусть формально $\tau = x$, $\omega = y$. Система (97), фазовые траектории которой совпадают с интегральными траекториями уравнения (98) и которая рассматривается в полосе

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1 < x < 1\},$$

приводится к виду

$$\begin{aligned}x' &= y - \sigma n_0^2 x + \sigma n_0^2 x^3 - \sigma y^2 x + \frac{\sigma n_0}{2} x \sqrt{1-x^2}, \\ y' &= -n_0^2 x - \sigma y^3 + \sigma n_0^2 y x^2 + \frac{\sigma n_0^2}{2} y \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}\tag{99}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}x' &= y - \frac{\sigma n_0^2}{2} x + \frac{3\sigma n_0^2}{4} x^3 - \sigma y^2 x, \\ y' &= -n_0^2 x + \frac{\sigma n_0^2}{2} y - \sigma y^3 + \frac{3\sigma n_0^2}{4} y x^2,\end{aligned}\tag{100}$$

которая является системой сравнения для системы (99). Характеристическая функция пары систем (99) и (100) является, как уже отмечалось, кососимметрической билинейной функцией.

Для упорядоченной пары систем X и Y их характеристическую функцию будем обозначать через $\chi(X, Y)$.

Предложение 4.3. *Характеристическая функция $\chi((99), (100))$ при $\sigma n_0 < 2$ в полосе $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1 < x < 1\}$ положительно определена (она равна нулю лишь в начале координат).*

Действительно,

$$\chi((99), (100)) = \frac{\sigma n_0^2}{2} [y^2 - \sigma n_0^2 xy + n_0^2 x^2] \left(\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \sqrt{1-x^2} \right).$$

Заметим, что правые части системы (100) отличаются от правых частей системы (99) лишь членами пятого порядка малости по $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, т. е.

членами порядка $O(\rho^5)$. В связи со сделанным только что замечанием о представлении векторного поля системы (99) около точки $(0, 0)$ справедливо следующее предложение.

Предложение 4.4. *Точка $(0, 0)$ является сложным устойчивым фокусом при $\sigma n_0 < 2$ для системы (100).*

Поставим следующий вопрос: как соотносится знак характеристической функции как формы от упорядоченной пары систем на плоскости и угол поворота от поля одной системы к другой. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x' &= y - \sigma n_0^2 x + \sigma n_0^2 x^3 - \sigma y^2 x + \lambda x \sqrt{1 - x^2}, \\ y' &= -n_0^2 x - \sigma y^3 + \sigma n_0^2 y x^2 + \lambda y \sqrt{1 - x^2}, \end{aligned} \quad (101)$$

зависящую от параметра $\lambda > 0$. Векторное поле системы (101) обладает некоторым свойством строгой монотонности (см. далее) при некоторых условиях и при $\sigma n_0 < 2$ в любой области без особых точек. Если при $\lambda = \lambda_1$ систему (101) обозначить через $(101)'$, а при $\lambda = \lambda_2$ — через $(101)''$, то справедливо равенство

$$\chi((101)', (101)'') = (\lambda_2 - \lambda_1)[y^2 - \sigma n_0^2 x y + n_0^2 x^2] \sqrt{1 - x^2}.$$

Таким образом, при $\lambda_2 > \lambda_1$ последняя функция является положительно определённой в полосе

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1 < x < 1\}$$

(равна нулю лишь в начале координат). Но, как легко понять, начало координат для системы $(101)''$ является «более неустойчивой» особой точкой, чем начало координат для системы $(101)'$. Таким образом, векторное поле системы $(101)''$ поворачивается при $\lambda_2 > \lambda_1$ около векторного поля системы $(101)'$ на положительный угол.

Прежде чем говорить о характере траекторий системы (99), сформулируем одно вспомогательное утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Для поиска подходящей системы сравнения в целях исследования существования предельных циклов, проблемы различения центра и фокуса и т. д. вовсе не обязательно иметь ТСП с центром в данной особой точке. Искомая система сравнения может иметь либо притягивающую, либо отталкивающую особую точку.

Пусть в области D , содержащей единственную особую точку системы (А), заданной для простоты на плоскости, стоит проблема различения центра и фокуса. Пусть в этой же области система (Б) имеет ту же единственную особую точку x_0 .

Рассмотрим для определённости так называемые отрицательно ориентируемые системы, в которых траектории обходят точку x_0 против часовой стрелки. Аналогично могут быть рассмотрены положительно ориентируемые системы.

Лемма 4.11. *Пусть область D является притягиваемой (отталкиваемой) точкой x_0 отрицательно ориентируемой системы (Б). Тогда если характеристическая функция $\chi((A), (B))$ является положительно (отрицательно) определённой*

в области D , то область D является притягиваемой (отталкиваемой) точкой x_0 (отрицательно ориентируемой) системы (А).

Лемма 4.11 носит явно геометрический характер. Действительно, векторное поле системы (Б) повёрнуто относительно векторного поля системы (А) на неотрицательный (неположительный) угол.

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для устойчивых и неустойчивых предельных циклов и т. д.

Итак, в качестве системы (А) возьмём систему (99) (которая является отрицательно ориентируемой), а в качестве системы (Б) — систему (100) (которая также отрицательно ориентируема). Возникает вопрос о размерах области D , фигурирующей в лемме 4.11.

Предложение 4.5. Система (100) при $\sigma n_0 < 2$ в полосе $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1 < x < 1\}$ обладает первым интегралом, который одновременно является и трансцендентной функцией в полосе, и мероморфной функцией во множестве $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1 < x < 1\}$ без начала координат. Последняя точка — единственная существенно особая точка для данного первого интеграла.

Доказательство. После замены переменных

$$\frac{\sqrt{3}}{2}n_0x - y = u, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}n_0x + y = v$$

система (100) приведётся к уравнению

$$du \left[u \left(\frac{\sigma n_0}{2\sqrt{3}} + \frac{7}{12} \right) - \frac{v}{12} - \frac{\sigma}{\sqrt{3}n_0}uv^2 \right] + dv \left[\frac{u}{12} + v \left(-\frac{\sigma n_0}{2\sqrt{3}} + \frac{7}{12} \right) + \frac{\sigma}{\sqrt{3}n_0}u^2v \right] = 0.$$

После же замены $u = tv$, $v^2 = p$, $v \neq 0$ уравнение примет вид

$$dp[C_1t^2 + C_2] + 2p \left[C_1t - 1 - u\sqrt{3}\frac{\sigma}{n_0}tp \right] = 0.$$

Здесь введены обозначения

$$C_1 = 7 + 2\sqrt{3}\sigma n_0, \quad C_2 = 7 - 2\sqrt{3}\sigma n_0.$$

Заменой $p = q^{-1}$ приводим последнее уравнение к линейному неоднородному уравнению вида

$$\frac{dq}{dt}[C_1t^2 + C_2] + 2[1 - C_1t]q + 8\sqrt{3}\frac{\sigma}{n_0}t = 0 \tag{102}$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$q_0(t) = C \frac{C_1t^2 + C_2}{\exp \frac{2}{C_1} \operatorname{arctg} \sqrt{C_2t/C_1}}.$$

Варьируя постоянную C , имеем дифференциальное уравнение, позволяющее получить мероморфное решение уравнения (102). Особенности возникают лишь при $u = v = 0$, т. е. когда значение t не определено. Но последнее уравнение и задаёт начало координат на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$. \square

Следствие 4.8. Для системы (100) область притяжения — вся полоса $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1 < x < 1\}$.

Следствие 4.9. У системы (99) в полосе $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1 < x < 1\}$ не существует замкнутых характеристик.

Следствие 4.10. При $\sigma n_0 < 2$, а также при $\frac{B}{mn_0} < \frac{\sigma n_0}{2}$ у систем вида (86), (87) в полосе Π' не существует простых и сложных предельных циклов, а также любых замкнутых кривых, составленных из траекторий.

4.6. О траекториях, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удалённые точки плоскости

4.6.1. Примеры из динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой

В этом разделе будут рассмотрены вопросы существования и единственности траекторий динамических систем (91) на плоскости, имеющих в качестве α - и ω -предельных множеств бесконечно удалённые точки [277]. Таким образом, на сферах Римана или Пуанкаре предельными множествами данных траекторий будет северный полюс. Такие траектории уже по определению являются ключевыми, поскольку бесконечно удалённая точка всегда является особой.

Для начала рассмотрим системы вида (79), (80) и (86), (87).

Лемма 4.12. Рассмотрим систему (79), (80) на множестве

$$\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \omega > 0\}.$$

Тогда для любой достаточно гладкой функции \mathcal{F} существует единственная траектория, уходящая в бесконечность (имеющая в качестве ω -предельного множества точку $(-0, +\infty)$).

Доказательство. Дополним фазовую плоскость $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ бесконечно удалённой точкой. Получим расширенную фазовую плоскость $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$. Отобразим область $\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \omega > 0\}$ на сферу Римана или Пуанкаре. В окрестности северного полюса сферы существуют новые координаты (α, y) , $y = \frac{1}{\omega}$, в которые переводятся старые координаты из рассматриваемой области расширенной фазовой плоскости неособым преобразованием.

В переменных (α, y) система (79), (80) эквивалентна уравнению

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{y + \frac{\sigma}{I}y^2\mathcal{F}(\alpha)\cos\alpha + \sigma\sin\alpha}{\frac{y^4}{I}\mathcal{F}(\alpha) - \sigma y\cos\alpha + \frac{\sigma}{I}y^3\mathcal{F}(\alpha)\sin\alpha}.$$

При этом траектории данного уравнения параметризованы по-другому, нежели траектории системы (79), (80).

Видно, что у уравнения существует особая точка $(0, 0)$, соответствующая бесконечно удалённой точке $(0, +\infty)$ системы (79), (80). Нетрудно убедиться в том, что точка $(0, 0)$ уравнения является гиперболическим седлом, что и доказывает лемму. \square

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 4.13. *Рассмотрим систему (86), (87) на множестве*

$$\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\}$$

Тогда для любых достаточно гладких функций \mathcal{F} и s существует единственная траектория, уходящая в бесконечность (имеющая в качестве ω -предельного множества точку $(0, +\infty)$).

4.6.2. Существование и единственность траекторий, уходящих на бесконечность

Рассмотрим произвольную автономную систему дифференциальных уравнений (91) на плоскости. Будем ставить в соответствие данной системе уравнение, фазовые траектории которого параметризованы по-другому и отображены с расширенной фазовой плоскости системы на сферу Римана (или Пуанкаре). При этом, как уже отмечалось, бесконечно удалённые точки перейдут в северный полюс сферы.

Теорема 4.7.

1. Если после замены фазовых переменных $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, y)$, где $y = \frac{1}{x_2}$, у уравнения, заданного на сфере, появилась особая точка $(x_1^0, 0)$, то у рассматриваемой системы существует траектория, стремящаяся к прямой

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_1^0\}$$

и имеющая в качестве предельного множества бесконечно удалённую точку.

2. Если после замены фазовых переменных $(x_1, x_2) \rightarrow (y, x_2)$, где $y = \frac{1}{x_1}$, у уравнения, заданного на сфере, появилась особая точка $(0, x_2^0)$, то у рассматриваемой системы существует траектория, стремящаяся к прямой

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_2^0\}$$

и имеющая в качестве предельного множества бесконечно удалённую точку.

Замечание. Количество траекторий, уходящих на бесконечность, определяется через топологический тип бесконечно удалённой особой точки. В частности, в системах (79), (80); (86), (87) существует единственная траектория, уходящая на бесконечность, поскольку бесконечно удалённая особая точка является седлом (если, конечно, отображать не плоскость, а фазовый цилиндр).

Замечание. Могут существовать фазовые траектории, уходящие на бесконечность на фазовой плоскости, вдоль которых обе фазовые переменные неограниченно возрастают. В этом случае после замены $x_1 = \frac{1}{y_1}$, $x_2 = \frac{1}{y_2}$, исследуя топологический тип северного полюса сферы, который всегда является особой точкой, можно попытаться доказать существование и единственность траекторий, приближающихся к прямым вида

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0,$$

где $A_1A_2 \neq 0$.

Действительно, в этом случае к северному полюсу сферы траектория будет стремиться под определённым углом, что соответствует стремлению траектории на плоскости к прямой, имеющей ненулевой и конечный угловой коэффициент наклона.

4.6.3. Элементы теории монотонных векторных полей

Рассмотрим семейство достаточно гладких векторных полей v_ε в области D двумерной ориентированной римановой поверхности. В касательном пространстве T_qD каждой точки $q \in D$ можно измерять углы между векторами рассматриваемого семейства.

Определение. Однопараметрическое семейство полей v_ε ($\varepsilon \in \mathcal{E}$) обладает свойством монотонности в D , если для любых точек $q \in D$, $\varepsilon_1 \in \mathcal{E}$, $\varepsilon_2 \in \mathcal{E}$ в касательном пространстве T_qD угол между векторами $v_{\varepsilon_1}, v_{\varepsilon_2} \in T_qD$ является монотонной функцией разности параметров $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$; при этом сохраняется ориентация изменения угла. Если рассматриваемая монотонная зависимость строгая, то говорим, что v_ε обладает строгим свойством монотонности (ср. [8, 12, 17, 18, 37, 50, 74–77, 276]).

Теорема 4.8. Пусть поле v_ε обладает свойством монотонности в области D плоскости \mathbb{R}^2 . Пусть x_0 — неособое начальное условие для фазовой траектории поля v_ε при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$. Тогда если для любого $\varepsilon \in \mathcal{E}$ предельное множество траекторий, начинающихся в x_0 , есть множество γ_0 , причём $\{A, B\} = \partial\gamma_0$, A — предельное множество траектории поля v_{ε_1} , а B — предельное множество траектории v_{ε_2} , $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ тогда и только тогда, когда существует множество C , являющееся предельным множеством траектории поля v_ε , причём при увеличении ε предельное множество монотонно смещается от A до B . (Здесь речь идёт одновременно либо об α -, либо об ω -предельных множествах семейства траекторий.) При этом искомая фазовая траектория единственна, если свойство монотонности строгое.

Схема доказательства. Можно считать, что для любого ε множество γ_0 состоит из ω -предельных множеств. Согласно теореме о непрерывной зависимости решений от начальных условий и правых частей уравнений при малом изменении параметра ε предельное множество останется в близкой окрестности первоначального (если множество γ_0 односвязно). Если последнее множество

многосвязно, то последовательно перебираем каждую из компонент связности. Поскольку выполняется свойство монотонности, применяя теорию систем сравнения, исключаем немонотонную зависимость траектории от параметра ε .

Пусть система обладает строгим свойством монотонности. Проведём доказательство от противного. Пусть для точки $M \in \gamma_0$ существуют хотя бы два параметра $\varepsilon^1, \varepsilon^2$, при которых траектории полей $v_{\varepsilon^1}, v_{\varepsilon^2}$ стремятся к точке M . Тогда траектории всех полей $v_{\bar{\varepsilon}}, \bar{\varepsilon} \in [\varepsilon^1, \varepsilon^2]$, стремятся к точке M (из-за свойства монотонности). Поскольку свойство монотонности строгое, для любого $\delta > 0$ система с векторным полем $v_{\varepsilon+\delta}$ ($\varepsilon + \delta \in \mathcal{E}$) является системой сравнения для v_{ε} . Легко понять, что траектория поля $v_{\varepsilon+\delta}$, выпущенная из неособого начального условия, никогда не пересечёт соответствующую траекторию поля v_{ε} , выпущенную из того же начального условия. Поэтому траектории полей v_{κ_1} и v_{κ_2} будут иметь разные предельные множества, причём $\varepsilon^1 < \kappa_1 < \kappa_2 < \varepsilon^2$. Противоречие. \square

Аналогично может быть доказана качественно другая лемма, которая верна и на любых гладких двумерных ориентированных многообразиях.

Лемма 4.14. *Рассмотрим семейство полей v_{ε} ($\varepsilon \in \mathcal{E}$) в области сферы \mathbb{S}^2 [277] следующего вида. Южный (S) и северный (N) полюса сферы являются седлами. Пусть данное семейство полей обладает строгим свойством монотонности и при некотором ε_1 ω -предельным множеством траектории, выходящей из южного полюса, является южный полюс, а при некотором $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ω -предельным множеством траектории, выходящей из северного полюса, является северный полюс. При этом обе рассмотренные ситуации — это гомоклинические ситуации на сфере, когда существует лишь одна точка покоя (кроме N и S), которая содержится в области, ограниченной указанными сепаратрисами. Других нетривиальных предельных множеств в этой области сферы нет. Тогда существует единственное значение параметра $\varepsilon = \varepsilon_0 \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, такое что траектория, выходящая из южного (северного) полюса, входит в северный (южный) полюс (это гетероклиническая ситуация на сфере).*

Доказательство. Единственность. Проведём доказательство от противного. Пусть два параметра $\bar{\varepsilon}, \bar{\bar{\varepsilon}}$ обладают указанным свойством. Тогда в силу строгого свойства монотонности все параметры из интервала $(\bar{\varepsilon}, \bar{\bar{\varepsilon}})$ обладают указанным свойством. Рассуждая как в теореме 4.8, приходим к противоречию со свойством монотонности.

Существование. По доказанному существует единственное значение параметра $\varepsilon = \varepsilon_0$, такое что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ реализуется одна гомоклиническая ситуация на сфере, а при $\varepsilon > \varepsilon_0$ — другая. Проведём доказательство от противного. Пусть при $\varepsilon = \varepsilon_0$ реализуется одна из гомоклинических ситуаций. Тогда существует окрестность значения $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$U_{\varepsilon_0}^{\delta} = \{\varepsilon: |\varepsilon - \varepsilon_0| < \delta\},$$

такая что для любого $\varepsilon \in U_{\varepsilon_0}^{\delta}$ справедлива одна и та же гомоклиническая ситуация. Противоречие. Лемма полностью доказана. \square

Замечание. Мы получили ещё один метод доказательства лемм 4.12 и 4.13. Действительно, искомые поля удовлетворяют условиям леммы 4.14, поскольку бесконечно удалённая точка проектируется в северный полюс сферы Римана (или Пуанкаре), а точка $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ — в южный.

4.7. Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в фазовых пространствах динамических систем

Часто в системах обыкновенных дифференциальных уравнений существуют бесконечные всюду плотные в некоторых множествах семейства замкнутых траекторий. При этом незамкнутые траектории также оказываются всюду плотными в некоторой области фазового пространства. Здесь наряду с понятием «всюду плотность во множестве» возникает более конкретное понятие всюду плотности возле себя. Последнее свойство траекторий имеет классическое название *устойчивости по Пуассону* [26, 27, 49, 214, 215, 289, 311, 334, 336, 337, 352, 377, 405, 421].

Напомним, что траектория в фазовом пространстве устойчива по Пуассону, если через конечное время она возвращается в любую достаточно малую окрестность любой своей точки.

Достаточные условия существования устойчивых по Пуассону траекторий формулируются в следующей теореме.

Теорема 4.9. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad (103)$$

зависящую от параметра $\mu \in M \subseteq \mathbb{R}^1$ в области $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}\{x, t\}$. Пусть для некоторых начальных условий $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}$ проекция интегральной траектории $(x_*(t), t)$ с данными начальными условиями и параметром $\mu = \mu_0$ на пространство $\mathbb{R}^n\{x\}$ является незамкнутой кривой и продолжаема на всю ось времени. Тогда если в любой окрестности U_{μ_0} точки $\mu = \mu_0 \in M$ существует такое значение μ , что проекция интегральной траектории $x(t, \mu)$ с произвольными начальными условиями $(x_1, t_1) \in (x_*(t), t)$ на пространство $\mathbb{R}^n\{x\}$ — замкнутая кривая, то кривая $x_*(t)$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежащая пространству $\mathbb{R}^n\{x\}$, всюду плотна возле себя (устойчива по Пуассону).

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку x_1 проекции незамкнутой интегральной кривой $x_*(t)$ и проекцию решения системы (103) с начальным условием $(x_1, t_1) \in (x_*(t), t)$ при $\mu = \mu_0$. Поскольку это решение продолжаемо на всю ось времени, по теореме о непрерывной зависимости решения от правых частей и параметра для любого $\varepsilon > 0$ существуют достаточно близкое значение μ_1 к значению μ_0 и положительное число T_1 , такие что при $t_1 \leq t \leq T_1$ выполнено условие

$$|x_*(t) - x^0(t)| < \varepsilon.$$

Здесь $x_*(t)$ — решение системы (103) при $\mu = \mu_0$ с начальным условием (x_1, t_1) , а $x^0(t)$ — решение системы (103) при $\mu = \mu_1$ с тем же начальным условием. Таким

образом, для любого $\varepsilon > 0$ в ε -окрестности $U_{x_1}^\varepsilon$ точки $x_1 \in \mathbb{R}^n\{x\}$ существует решение системы (74) при $\mu = \mu_1$ и при некотором $T_1 > 0$. Отсюда вытекает плотность траектории $x_*(t)$, принадлежащей пространству $\mathbb{R}^n\{x\}$, возле себя. При этом пространство $\mathbb{R}^n\{x\}$ является проекцией пространства $\mathbb{R}^{n+1}\{t, x\}$. Теорема 4.9 доказана. \square

Замечание. Под замкнутыми кривыми в пространстве $\mathbb{R}^n\{x\}$ следует понимать проекции периодических решений системы (103) как интегральных кривых из пространства $\mathbb{R}^{n+1}\{x, t\}$ в пространство $\mathbb{R}^n\{x\}$ [336, 337].

Замечание. Если рассмотреть замыкание Z_1 устойчивой по Пуассону траектории $x_*(t)$ как множества в пространстве $\mathbb{R}^n\{x\}$, то во множестве Z_1 рассматриваемое семейство замкнутых траекторий всюду плотно. В свою очередь, если рассмотреть замыкание Z_2 семейства замкнутых траекторий как множества в пространстве $\mathbb{R}^n\{x\}$, то во множестве Z_2 устойчивая по Пуассону траектория $x_*(t)$ также всюду плотна.

Следствие 4.11. Множества Z_1 и Z_2 совпадают. И прямое, и обратное включения следуют из плотности семейства замкнутых кривых и устойчивости по Пуассону.

Как будет показано в разделах 6, 8, у некоторых неавтономных систем в \mathbb{R}^3 и в \mathbb{R}^4 существуют устойчивые по Пуассону траектории.

4.8. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения

4.8.1. Топографические системы в пространственном случае

Пространственные ТСП можно определить аналогично ТСП на плоскости. При этом (невырожденные) гиперповерхности уровня коразмерности 1 в пространстве \mathbb{R}^n образуют топографическую систему вложенных друг в друга гиперповерхностей, имеющих вершину в особой точке [214, 215, 290, 297, 315, 411, 416, 417].

Теорема 4.10. Пусть в односвязной области D пространства \mathbb{R}^n , содержащей единственную точку покоя x_0 достаточно гладкого векторного поля v_1 , существует гиперповерхность $\Gamma \ni x_0$, продолжающаяся до границы ∂D и пересекающая её по поверхности γ (поверхность γ может быть бесконечно удалённой), такая что существует ТСП с центром в x_0 , задаваемая гладкой функцией v , продолжающаяся вдоль Γ до γ , заполняющая область $K \subseteq D$ и обладающая свойством

$$(v_1, v_2)|_{\mathbb{R}^n} > 0$$

($v_2 = \text{grad } V$) почти всюду в K , за исключением, быть может, некоторых гиперповерхностей, не содержащих внутри себя x_0 . (Здесь $v = \text{const}$ — семейство гиперповерхностей ТСП.) Тогда во всей области D не существует ни одной

замкнутой кривой, состоящей из траекторий поля v_1 , пересекающей гиперповерхность Γ .

Доказательство. От противного. Пусть такая кривая γ_0 существует, $\{N_1, N_2\} = \Gamma \cap \gamma_0 \neq \emptyset$ и точка N_1 — неособое начальное условие при движении по кривой γ_0 . Через точку N_1 проходит замкнутая гиперповерхность $\bar{\Gamma}$ из ТСП, причём $\bar{\Gamma} \subset K$. Если гиперповерхность Γ ограничивает область \bar{S} , то существует $\varepsilon > 0$ (которое уменьшим насколько нужно), такое что

- 1) $N_\varepsilon \in \bar{\Gamma}_\varepsilon \cap \Gamma$, где $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ — гиперповерхность ТСП;
- 2) расстояние между точками N_ε и N_1 равно ε ;
- 3) $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ ограничивает область $\bar{S}_\varepsilon \supset \bar{S}$.

Выбранное значение ε таково, что через конечное время точка, двигаясь по траектории γ_0 с начальным условием N_1 , покинет область \bar{S}_ε . Поскольку $\bar{S}_\varepsilon \subset K$ и выполнено неравенство теоремы почти всюду в K , за исключением, быть может, некоторых гиперповерхностей, не содержащих внутри себя x_0 , то точка с начальным условием N_1 никогда больше в область $\bar{S}_\varepsilon \subset K \subset D$ не вернётся. Так как $\bar{S} \subset \bar{S}_\varepsilon$, то приходим к противоречию с замкнутостью кривой γ_0 . \square

Напомним, что пространственные ТСП особенно удачно помогают решить в ряде случаев проблему различения центра и фокуса. В последнем случае вовсе не обязательно иметь ТСП с центром в данной особой точке. Система сравнения может иметь либо притягивающую, либо отталкивающую особую точку.

Пусть в области D , содержащей единственную особую точку системы (А), заданной для простоты на плоскости, стоит проблема различения центра и фокуса. Пусть в этой же области система (Б) имеет ту же единственную особую точку x_0 .

Характеристическая функция в пространственном случае строится следующим образом. Пусть v_1, v_2 — два гладких векторных поля в пространстве \mathbb{R}^n . По полю v_1 строится (неоднозначно) нормальное гладкое векторное поле n . В каждом конкретном случае поле n строится из тех соображений, которые позволяют получить в дальнейшем знакоопределённую характеристическую функцию. Последняя определяется как скалярное произведение $\chi = (n, v_2)$.

Лемма 4.11 с некоторыми уточнениями справедлива и в пространственном случае.

4.8.2. Чётномерный случай

В чётномерном случае характеристическая функция имеет наиболее естественный вид.

Пример. Рассмотрим систему слабо перевязанных маятников, т. е. консервативную систему с малыми (неконсервативными) добавками, задаваемую полем $\{X_1, X^1, \dots, X_n, X^n\}$ в координатах $x = \{x_1, x^1, \dots, x_n, x^n\}$ следующего вида:

$$X_i = -x^i + \varepsilon \mathcal{F}_i(x), \quad X^i = G_i(x) + \varepsilon \mathcal{F}^i(x), \quad dG(0) \geq 0.$$

Тогда естественно выбрать характеристическую функцию в виде

$$\chi = \sum_{i=1}^n (X_i Y^i - X^i Y_i),$$

где векторное поле Y системы сравнения имеет вид

$$Y = \{Y_1, Y^1, \dots, Y_n, Y^n\}, \quad Y_i = -x^i, \quad Y^i = G_i(x).$$

И в пространственном случае можно привести соответствующие утверждения, подобно двумерным ТСП и системам сравнения. Вынесем их в разделы 8, 9, когда будут изучаться пространственные задачи движения тел в сопротивляющейся среде и теории колебаний.

5. Относительная структурная устойчивость и относительная структурная неустойчивость различных степеней

Настоящий раздел посвящён исследованию вопросов относительной структурной устойчивости (относительной грубости) динамических систем, рассматриваемых не на всём пространстве динамических систем, а лишь на некотором его подпространстве. При этом пространство деформаций (динамических) систем также не совпадает со всем пространством допустимых деформаций. В частности, будут рассмотрены системы дифференциальных уравнений, возникающие в динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. Будет показана их относительная грубость, а также, при некоторых условиях, относительная негрубость различных степеней.

Грубые (структурно устойчивые) системы можно рассматривать как наиболее простые, наиболее многочисленные динамические системы в соответствующем пространстве динамических систем. Действительно, грубые системы выделяются условиями типа неравенств и поэтому их естественно рассматривать как наиболее общий случай.

Можно провести далеко идущую аналогию между грубыми динамическими системами и функциями одной переменной, имеющими только простые корни, а также кривыми, не имеющими особенностей, рассматриваемыми в конечной части плоскости [112]. Эта аналогия является, в частности, весьма плодотворной для выработки эффективных методов качественного исследования.

В ряде вопросов представляет интерес рассмотрение относительной грубости, а именно грубости по отношению к некоторому классу динамических систем, т. е. по отношению к некоторому подмножеству пространства динамических систем. Таким понятием относительной грубости можно воспользоваться при выделении простейших негрубых систем, т. е. систем первой степени негрубости, а также при классификации негрубых систем по степени сложности, или

степени негрубости. Отметим, что с точки зрения такой классификации негрубых систем консервативные системы являются системами бесконечной степени негрубости, другими словами системами степени негрубости более высокой, чем любая конечная степень негрубости. Таким образом, консервативные системы являются с точки зрения такой классификации чрезвычайно «редкими» системами.

Однако мы можем, рассматривая класс консервативных (или гамильтоновых) систем, ввести понятие грубости системы относительно этого класса. Таким понятием (без термина «грубость») фактически пользовался Пуанкаре.

Системы первой степени негрубости можно определить как системы, которые являются относительно грубыми во множестве (относительно) негрубых систем (точное определение будет дано ниже).

Негрубое (относительно негрубое) векторное поле может быть топологически эквивалентно грубому (относительно грубому) векторному полю. Например, на двумерной сфере возможна ситуация, при которой векторное поле (абсолютно) негрубо, хотя топологически эквивалентно грубому векторному полю (о топологической эквивалентности см. далее).

Основной причиной негрубости в последнем случае является вырожденность производной возле предельного множества [19].

В случае аналитических динамических систем, требуя у правых частей динамической системы не менее пяти производных, можно определить динамические системы второй степени негрубости как системы, относительно грубые во множестве систем, негрубых и не являющихся системами первой степени негрубости.

Совершенно аналогично можно определить динамические системы 3-й, 4-й, ..., n -й степени негрубости. Определение вводится индуктивно. В рассматриваемом случае динамических систем с аналитическими правыми частями вводится определение близости систем.

Таким образом, динамическую систему в дальнейшем назовём системой n -й степени негрубости в замкнутой области, если она является негрубой системой, не являющейся негрубой системой степени, меньшей или равной $n-1$, и если она является относительно грубой в множестве негрубых систем, не являющихся негрубыми системами степени, меньшей или равной $n-1$.

5.1. Определение относительной структурной устойчивости (относительной грубости)

Классическое определение грубости [9, 15, 17–19], а также определение, данное в [188], оперируют с двумя объектами, а именно с классами динамических систем и с пространством деформаций систем со своей топологией.

Впервые определение грубости динамической системы на плоскости было дано при некотором дополнительном предположении относительно множества рассматриваемых динамических систем. Именно, дополнительно предполагалось,

что граница области, в которой рассматривается система, является циклом без контакта для траекторий этой системы, т. е. простой гладкой замкнутой кривой, не имеющей контактов (не касающейся траекторий системы). Очевидно, тогда кривая является циклом без контакта также и для траекторий всякой системы, достаточно близкой к рассматриваемой. Хотя это предположение сильно ограничивает класс рассматриваемых динамических систем, но при этом смысл понятия грубости системы сохраняется, а определение грубости значительно проще, чем при общих предположениях относительно границы области.

Можно ввести определение грубости таким образом, что оно не будет запрещать наличие негрубых траекторий, лежащих на границе области. А это не соответствует содержанию понятия грубости.

Введение понятия грубости без специальных предположений о границе области представляется естественным и необходимым с различных точек зрения [38].

В основе же понятия грубости (в том числе и различных степеней негрубости) лежит понятие топологической эквивалентности динамических систем [19, 25].

Пусть $X^r(M)$ — пространство C^r -векторных полей на компактном многообразии M с C^r -топологией, $r \geq 1$. Два векторных поля $X, Y \in X^r(M)$ называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M$, который переводит траектории поля X в траектории поля Y , сохраняя их ориентации; это условие означает, что если $p \in M$ и $\delta > 0$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что если $0 < t < \delta$, то $hX_t(p) = Y_{t'}(h(p))$ для некоторого $t' \in (0, \varepsilon)$. Будем называть h *топологической эквивалентностью* между X и Y .

Таким образом, мы определили отношение эквивалентности на $X_r(M)$. Другим, более сильным отношением является *сопряжённость потоков векторных полей*. Два векторных поля X и Y называются *сопряжёнными*, если существует топологическая эквивалентность h , сохраняющая параметр t ; это означает, что $hX_t(p) = Y_t(h(p))$ при всех $p \in M$ и $t \in \mathbb{R}$.

Замечание. Сопряжённость потоков — слишком сильное отношение, поскольку, как известно, расширяющийся цикл (как функция от параметра) для автономных систем, как правило, меняет свой период [19, 25], а, как известно, замкнутые траектории переходят в замкнутые при топологической эквивалентности.

Определение, данное Андроном и Понтрягиным [19], наряду с близостью в некоторой топологии рассматриваемой системы и её деформации требует близость к тождественному гомеоморфизму, через который осуществляется топологическая эквивалентность последних двух систем. Определение же, данное Пейксото [396—398], не требует указанной близости.

Если система груба по Андронову—Понтрягину, то она является грубой и по Пейксото. При этом необходимые и достаточные условия грубости по Андронову—Понтрягину совпадают с необходимыми и достаточными условиями грубости по Пейксото. Последнее определение имеет следующее преимущество:

непосредственно из этого определения вытекает тот факт, что грубые системы в пространстве динамических систем заполняют области. При первом же определении этот факт нужно доказывать, опираясь на необходимые и достаточные условия грубости.

Пусть \mathcal{V} — достаточно малая окрестность рассматриваемого векторного поля X в $X^r(C^r)$. Как уже кратко отмечалось, в первоначальном определении грубости, данным Андроновым и Понтрягиным, требуется ещё, чтобы при достаточной малости окрестности \mathcal{V} гомеоморфизм, осуществляющий топологическую эквивалентность между X и Y , мог быть сделан сколь угодно близким к тождественному в C^0 -топологии (т. е. сколь угодно мало сдвигал точки M). Так как вариант этого требования предложен Пейксото, в тех случаях, когда надо уточнить, какой именно вариант грубости имеется в виду, говорят о грубости по Андронову—Понтрягину и о грубости по Пейксото. Однако в настоящее время не ясно, действительно ли эти варианты различаются между собой и имеет ли один из них существенное преимущество перед другим.

Приведённое определение зависит от r . При необходимости явно указывать на эту зависимость можно говорить о грубости в классе C^r [396—398].

До сих пор мы говорили о глобальных свойствах векторных полей на многообразиях. Можно анализировать локальное топологическое поведение траекторий векторных полей [396]. Для векторных полей из некоторого открытого плотного подмножества в пространстве $X^r(M)$ можно описать поведение траекторий в окрестности каждой точки многообразия. Кроме того, локальная структура траекторий не меняется при малых возмущениях поля (так называемая локальная грубость). Таким образом, получается полная классификация через топологическую сопряжённость.

Замечание. По всей видимости, лишь в локальном случае отношение топологической сопряжённости является конструктивным, поскольку в глобальном случае это влечёт наличие очень жёстких условий.

В высших размерностях множество грубых полей по-прежнему обширно, но не является уже всюду плотным. Здесь существуют богатые и более сложные явления, сохраняющиеся при малых возмущениях первоначального поля. Даже для грубых полей структура траекторий предельных множеств до конца не ясна, и её описание по-прежнему остаётся областью активного исследования.

Параллельно определениям, данным выше, в [15, 209—211] изучались маломерные грубые системы, а в [20, 23] — теория систем Аносова, для которых понятие грубости оказалось естественным.

В соответствии с классическими определениями структурной устойчивости в [209—211] обсуждаются критерии последней как для линейных неавтономных систем, так и для классов нелинейных систем. Признаки структурной устойчивости для маломерных систем формулируются в качестве гипотез Смейла на большие размерности [241, 242].

За последнее время появилось ещё несколько видоизменённых определений грубости. Все они имеют одно общее свойство: деформация рассматриваемых

динамических систем на некотором многообразии M^n берётся во всём пространстве гладких векторных полей $\chi(C^r)$ в C^r -топологии (чаще всего $r = 1$).

Будем рассматривать векторные поля (динамические системы), деформируемые не над всем классом $\chi(C^r)$ полей, а лишь над некоторым подклассом $\chi(\mathcal{B})$, определённым с помощью класса функций $\mathcal{B} \subset C^r$.

Определение. Векторное поле v на многообразии M^n называется относительно структурно устойчивым (относительно грубым или грубым по отношению к классу полей $X(\mathcal{B})$, определённому с помощью класса функций \mathcal{B}), если для любой окрестности \mathcal{T} гомеоморфизма 1_{M^n} в пространстве всех гомеоморфизмов с C^0 -топологией имеется такая окрестность $\mathcal{U} \subset \chi(\mathcal{B})$ рассматриваемого векторного поля v , что последнее эквивалентно любому векторному полю из $\mathcal{U} \subset \chi(\mathcal{B})$ посредством некоторого гомеоморфизма из \mathcal{T} .

Заметим, что близость векторных полей понимается в C^1 -топологии, а близость гомеоморфизма — в C^0 -топологии. При этом речь идёт не о сопряжении, а об эквивалентности.

Заметим также, что пока в вышеприведённом определении важны

- 1) достаточная малость гомеоморфизма, осуществляющего эквивалентность;
- 2) C^1 -топология в пространстве рассматриваемых векторных полей.

5.2. Относительная структурная неустойчивость (относительная негрубость) различных степеней

Подобно тому как даётся определение векторного поля первой степени негрубости, можно определить поля первой степени относительной негрубости, рассматривая деформации полей в подпространстве $\chi(\mathcal{B})$ пространства всех векторных полей.

Определение. Векторное поле v на многообразии M^n называется векторным полем первой степени относительной негрубости, если оно не является относительно грубым векторным полем и если для любой окрестности \mathcal{T} гомеоморфизма 1_{M^n} в пространстве всех гомеоморфизмов с C^0 -топологией имеется такая окрестность $\mathcal{U} \subset \chi(\mathcal{B})$ векторного поля v , что поле v топологически эквивалентно любому полю из $\mathcal{U} \subset \chi(\mathcal{B})$, не являющемуся относительно грубым, посредством некоторого гомеоморфизма из \mathcal{T} .

Заметим, что близость векторных полей в данном случае понимается в C^3 -топологии.

Аналогичным образом можно определить векторные поля, являющиеся полями n -й степени относительной негрубости. При этом используется C^{2n+1} -топология в пространстве векторных полей.

Определение. Векторное поле v на многообразии M^n называется векторным полем n -й степени относительной негрубости, если оно не является относительно негрубым векторным полем, не являющимся относительно негрубым векторным полем степени, меньшей или равной $n - 1$, и если для любой окрестности \mathcal{T}

гомеоморфизма 1_{M^n} в пространстве всех гомеоморфизмов с C^0 -топологией имеется такая окрестность $\mathcal{U} \subset \chi(\mathcal{B})$ векторного поля v , что поле v топологически эквивалентно любому полю из $\mathcal{U} \subset \chi(\mathcal{B})$, не являющемуся относительно грубым или относительно негрубым векторным полем степени, меньшей или равной $n - 1$, посредством некоторого гомеоморфизма из \mathcal{T} .

5.3. Примеры из динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой, и теории колебаний

Рассмотрим динамические системы, возникающие в плоской (в дальнейшем и пространственной) динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. В силу цикличности некоторых фазовых переменных общая система шестого порядка (для случая плоскопараллельного движения) допускает отделение независимой подсистемы третьего порядка (8)–(10). В последней, в свою очередь, известным приёмом выделена динамическая система второго порядка, для которой проведён обстоятельный анализ различных типов допускаемых ею фазовых портретов.

5.3.1. Системы с переменной диссипацией с нулевым средним в плоской динамике твёрдого тела

Такие системы обладают одним общим свойством: поскольку, как правило, у систем, обладающих переменной диссипацией с нулевым средним, существуют дополнительные симметрии, данные системы имеют сепаратрисы, соединяющие гиперболические седловые положения равновесия. Поэтому (абсолютно) структурно устойчивыми такие системы быть не могут.

Поскольку деформации таких систем рассматриваются лишь над некоторым подмножеством всех систем, определённым с помощью подкласса функций (правых частей), позволяющего сохранить все симметрии в системе, рассматриваемые системы в некоторых областях параметров остаются относительно грубыми.

Пример. Рассмотрим системы вида (72) при условии (15).

Лемма 5.1. Система (72) относительно структурно устойчива. Более того, любые две системы вида (72) топологически эквивалентны.

Схема доказательства. Определим пространство векторных полей $\chi(\Phi)$, отвечающих системе (72); при этом функция \mathcal{F} пробегает весь класс Φ . Пространство параметров системы при этом бесконечномерно. Лемма 5.1 следует из следующих замечаний.

1. Для любого $\mathcal{F} \in \Phi$ фазовый портрет системы (72) имеет один и тот же топологический тип.
2. В каждой из областей фазового цилиндра (колебательной и вращательной) (см. рис. 3) строится своя топологическая эквивалентность: на «ключевых» сепаратрисах (см. раздел 6) данные эквивалентности «сшиваются».

3. К примеру, в колебательной области эквивалентность строится следующим образом.

Построим не только эквивалентность — гомеоморфизм h фазового цилиндра, — а даже сопряжение. В колебательной области существуют лишь две особые точки: $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$ (первая из которых отталкивающая, а вторая притягивающая). Итак, рассмотрим две системы (72) для функций $\mathcal{F}_1(\alpha)$, $\mathcal{F}_2(\alpha)$. Соответствующие фазовые потоки фазового цилиндра обозначим через g_1^t , g_2^t . Потребуем, чтобы гомеоморфизм h начало координат переводил в начало координат. Рассмотрим малую окружность \mathbb{S}^1 вокруг начала координат. Её можно выбрать трансверсальной к обоим полям систем (72) при $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2$ одновременно. Определим $h(p) = p$ (с точностью до линейного сжатия или растяжения) для всех $p \in \mathbb{S}^1$ таким образом, чтобы $h(p_1^1) = h(p_2^1)$ и $h(p_1^2) = h(p_2^2)$. Здесь p_k^1 , p_k^2 , $k = 1, 2$, — две точки на окружности \mathbb{S}^1 , через которые проходят сепаратрисы поля системы (72) при $\mathcal{F} = \mathcal{F}_k$, выходящие из начала координат и входящие в седла S_{-1} и S_0 (в полосе Π). Если q не является началом координат, то существует единственное $t \in \mathbb{R}$, такое что $g_1^t(q) = p \in \mathbb{S}^1$. Положим $h(q) = g_2^{-t}(p) = g_2^{-t}g_1^t(q)$. Непосредственно видно, что h непрерывно и имеет непрерывное обратное.

4. Согласно построенному отображению h точка $(\pi, 0)$ перейдёт в точку $(\pi, 0)$ по непрерывности.

Следствие 5.1. Система (72) при условии (15) топологически эквивалентна (сопряжена) уравнению (106), а также общему уравнению плоского маятника в потоке среды.

Пример. Рассмотрим систему (79), (80) при условии (15). Она также является системой с переменной диссипацией с нулевым средним.

Лемма 5.2. Бесконечномерное пространство векторных полей $\chi(\Phi)$, отвечающее системе (79), (80), разбивается на непересекающееся объединение

$$\chi(\Phi) = \chi(\Phi_1) \amalg \chi(\Phi_2) \amalg \chi(\Phi_3),$$

обладающее следующими свойствами:

- 1) система (79), (80), определённая с помощью пространств $\chi(\Phi_1)$, $\chi(\Phi_3)$ (см. рис. 4, 6), относительно груба в пространстве $\chi(\Phi)$;
- 2) система (79), (80), определённая с помощью пространства $\chi(\Phi_2)$ (см. рис. 5), является системой первой степени относительной негрубости в пространстве $\chi(\Phi)$;
- 3) множество $\chi(\Phi_2)$ имеет меру нуль в пространстве $\chi(\Phi)$;
- 4) множества $\chi(\Phi_1)$, $\chi(\Phi_3)$ имеют конечную меру в пространстве $\chi(\Phi)$.

Топологическая эквивалентность в данном случае строится в зависимости от области фазового цилиндра, а также в зависимости от классов $\chi(\Phi_k)$, $k = 1, 2, 3$.

5.3.2. Системы с переменной диссипацией с ненулевым средним в плоской динамике твёрдого тела

Пример. Ниже (раздел 10) приведена типичная топологическая классификация портретов системы (92) при условии (15) для некоторой бесконечномерной области параметров. Вообще же, система (92) при $h \neq 0$ является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним.

Лемма 5.3. Бесконечномерное пространство векторных полей $\chi(\Phi)$, отвечающее системе (92) при $h \neq 0$, разбивается на конечное непересекающееся объединение

$$\chi(\Phi) = \chi(\Phi_1) \amalg \dots \amalg \chi(\Phi_{N_1}) \amalg \chi(\Phi^1) \amalg \dots \amalg \chi(\Phi^{N_2}),$$

обладающее следующими свойствами:

- 1) система (92) при $h \neq 0$, определённая с помощью пространств $\chi(\Phi_k)$, $k = 1, \dots, N_1$, (абсолютно) груба;
- 2) множества $\chi(\Phi_k)$ для всех k имеют конечную меру в пространстве $\chi(\Phi)$;
- 3) множества $\chi(\Phi^k)$, $k = 1, \dots, N_2$, имеют меру нуль в пространстве $\chi(\Phi)$.

Восемь «типичных» классов (но не все) для систем вида (92) при $h \neq 0$ приведены на рис. 30–37.

Необходимо заметить, что во всех приведённых выше системах (а в системе (92) при $h \neq 0$ лишь в подобласти параметров) можно пользоваться «типичными» представителями данных классов систем — соответствующими аналитическими системами.

Пример. Рассмотрим систему (86), (87) при условиях (15), (13) в области параметров I (см. раздел 7). С помощью классов функций Φ , Σ , которые пробегает соответственно функции \mathcal{F} и s , определяется пространство векторных полей системы (86), (87), которое обозначим $\chi(\mathcal{B})$.

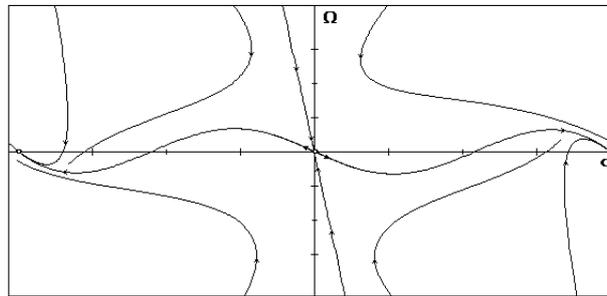


Рис. 30. (Абсолютно) грубая динамическая система

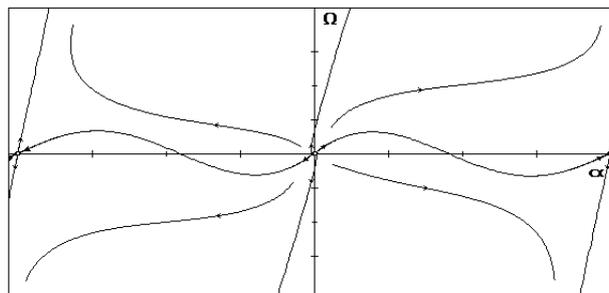


Рис. 31. (Абсолютно) грубая динамическая система

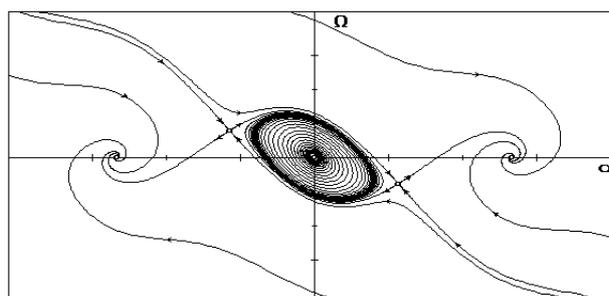


Рис. 32. (Абсолютно) грубая динамическая система

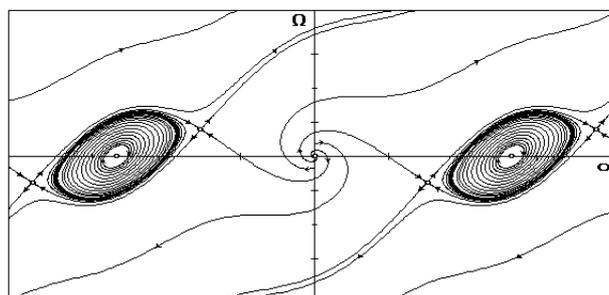


Рис. 33. (Абсолютно) грубая динамическая система

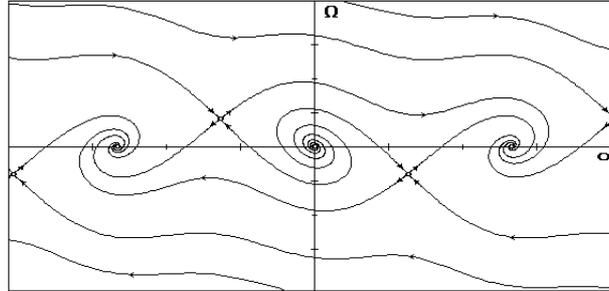


Рис. 34. (Абсолютно) грубая динамическая система

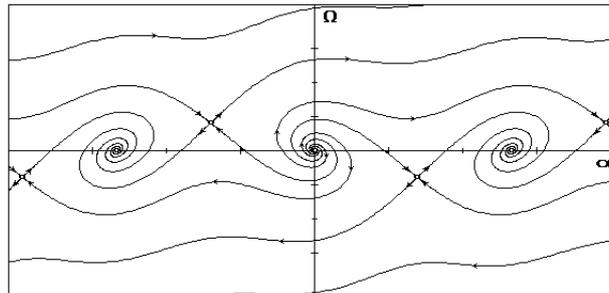


Рис. 35. (Абсолютно) грубая динамическая система

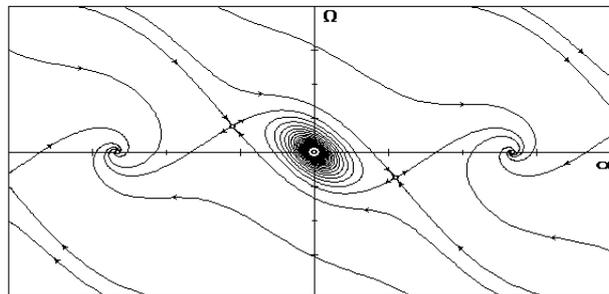


Рис. 36. (Абсолютно) грубая динамическая система

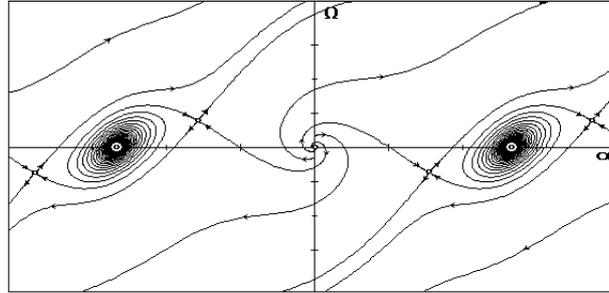


Рис. 37. (Абсолютно) грубая динамическая система

Лемма 5.4. Бесконечномерное пространство $\chi(\mathcal{B})$, отвечающее системе вида (86), (87), разбивается на счётное непересекающееся объединение

$$\chi(\mathcal{B}) = \chi(\mathcal{B}_1) \amalg \chi(b_1) \amalg \chi(\mathcal{B}_2) \amalg \chi(b_2) \dots,$$

обладающее следующими свойствами:

- 1) система вида (86), (87), определённая с помощью пространств $\chi(\mathcal{B}_i)$ для любого $i \in \mathbb{N}$, (абсолютно) груба;
- 2) система (86), (87), определённая с помощью пространств $\chi(b_i)$, является системой первой степени относительной негрубости в пространстве $\chi(\mathcal{B})$;
- 3) множества $\chi(b_i)$ имеют меру нуль в пространстве $\chi(\mathcal{B})$;
- 4) множества $\chi(\mathcal{B}_i)$ имеют конечную меру в пространстве $\chi(\mathcal{B})$.

Более того, гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность, систем, взятых из пространства $\chi(\mathcal{B}_i)$ для каждого фиксированного i , может и не быть достаточно близок к тождественному.

Таким образом, мы имеем двухпараметрическое семейство фазовых портретов, в котором при переходе от одного топологического типа портрета к другому мы вынуждены иметь дело с вырожденными перестройками (раздел 7). Причём рассматриваемые подмножества в пространстве J^2 , с помощью которых определяются подклассы полей $\chi(\mathcal{B}_i)$, $\chi(b_i)$, накапливаются возле точки $(0, 0) \in J^2\{\mu_1, \mu_2\}$.

Десять классов полей различной эквивалентности изображены на рис. 7–16.

Пример. Рассмотрим систему (86), (87) при условиях (15), (13) в областях параметров II, III (см. раздел 7). С помощью классов функций Φ и Σ , которые пробегают соответственно функции \mathcal{F} и s , определяется пространство векторных полей системы (86), (87), которое обозначим $\chi(\mathcal{B})$, как и выше.

Для таких векторных полей справедлива лемма 5.4. Восемь классов полей различной эквивалентности изображены на рис. 17–24.

Из всего вышеизложенного видно, что рассмотренные системы с переменной диссипацией с ненулевым средним в типичном случае (абсолютно) структурно устойчивы. При этом относительно структурно устойчивые (типичные) системы с переменной диссипацией с нулевым средним являются, как правило, удобными системами сравнения для систем с переменной диссипацией с ненулевым средним (ср. [447]).

5.3.3. Системы с переменной диссипацией в пространственной динамике твёрдого тела

Можно привести аналогичные утверждения и для систем, возникающих в пространственной динамике твёрдого тела. При этом системы с переменной диссипацией с нулевым средним являются лишь относительно грубыми, а системы с переменной диссипацией с ненулевым средним — просто (абсолютно) грубыми. Последние системы являются нетривиальными примерами относительно и абсолютно грубых систем, имеющих порядок выше двух. Ввиду громоздкости качественный анализ таких систем (третьего и выше порядков) в данном разделе не приводится (о системах с переменной диссипацией из пространственной динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой, см. разделы 8, 9).

Необходимо заметить, что системы с переменной диссипацией с нулевым средним возникают естественным образом в динамике твёрдого тела благодаря наличию дополнительных групп симметрий. Последние возникают из естественных (геометрических и аналитических) симметрий задачи. Таким образом, наряду с «полезностью» возникновения систем с переменной диссипацией с нулевым средним в качестве важных систем сравнения, они имеют право на существование ввиду их относительной грубости. А вот системы с переменной диссипацией с ненулевым средним уже по своей физической и топологической природе являются (абсолютно) грубыми, что позволяет говорить о структурно устойчивом описании природных явлений с помощью таких систем.

В дальнейших разделах будут качественно исследованы нелинейные системы вида (72); (78)—(80); (81)—(83); (85)—(87); (88)—(90), появляющиеся в плоской динамике твёрдого тела. В разделах 8, 9 изучаются аналогичные системы из пространственной динамики. При этом будет использован качественный материал, полученный ранее в разделах 4, 5.

6. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним в плоской динамике твёрдого тела

В первой части раздела рассматривается такой класс движений, при котором на систему наложена некоторая неинтегрируемая связь, позволя-

ющая считать во всё время движения величину скорости некоторой характерной точки твёрдого тела постоянной величиной. Проводится полный качественный анализ полученной динамической системы в пространстве квазискоростей. Отмечаются симметрии в системе, приводится в явном виде первый интеграл, являющийся трансцендентной функцией квазискоростей.

Рассмотрим такой случай движения тела, при котором во всё время движения выполнено условие (79). Как показано в разделе 3.3, в пространстве квазискоростей α и Ω выделяется система (72) при условии (15).

Для описания положения тела на плоскости выберем декартовы координаты x, y центра пластины и угол поворота ϕ , который будем измерять в плоскости движения тела между прямой CD и осью инерциальной системы координат. При этом фазовое состояние системы характеризуется следующим набором величин: $(x', y', \phi', x, y, \phi)$,

$$\phi' = \Omega, \quad x' = v \cos(\alpha + \phi), \quad y' = v \sin(\alpha + \phi). \quad (104)$$

Как уже отмечалось, координаты (x, y, ϕ) являются циклическими.

Замечание. Конечно, цикличность в данном случае понимается не по Раусу, когда каждой циклической координате соответствует первый интеграл, в результате чего порядок общей лагранжевой системы понижается [221–226]. Здесь цикличность понимается в том смысле, что динамические функции (кинетическая энергия и обобщённые силы) не зависят от некоторых координат конфигурационного пространства. При этом порядок общей системы понижается на число таких координат.

6.1. Случай движения тела в среде при наличии некоторой неинтегрируемой связи и начало качественного анализа

6.1.1. Точки покоя системы и соответствующие им стационарные движения

Множество точек покоя системы (70), которым соответствуют стационарные движения, разбивается на две части.

Во-первых, существуют изолированные особые точки, которые находятся из системы

$$\{\alpha = 0 \bmod \pi, \Omega = 0\}.$$

Эти особые точки соответствуют таким стационарным движениям, при которых тело движется поступательно вдоль прямой CD в ту или иную сторону (см. рис. 1 и 2).

Во-вторых, формально существует одномерное многообразие O особых точек (71). Точка особого многообразия O соответствует такому стационарному движению, при котором тело совершает вращение вокруг некоторой неподвижной точки W с постоянной угловой скоростью; при этом прямая CD непременно проходит через точку W . Угол атаки при этом равен $\pi/2$.

Данные классы движений несколько противоречат здравому смыслу. Противоположные края пластины «разрезают» среду в разных направлениях. При этом необходимо учитывать наличие и сопротивления среды, и момента её сопротивления. Поскольку введение момента сопротивления требует учёта дополнительного демпфирования (см. введение), учёт такого влияния, как уже отмечалось, является следующим этапом изучения проблемы.

6.1.2. Симметрии векторного поля системы на фазовом цилиндре квазискоростей

Векторное поле системы (72) при условии (15) обладает двумя видами симметрий:

- 1) центральной симметрией. Такая симметрия возле точек $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, возникает из-за того, что векторное поле системы в координатах (α, Ω) меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -\Omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ \Omega \end{pmatrix};$$

- 2) некоторой зеркальной симметрией. Такая симметрия относительно прямых Λ_i , $i \in \mathbb{Z}$ (см. (71)), возникает из-за того, что α -составляющая векторного поля системы в координатах (α, Ω) сохраняется при замене

$$\begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i - \alpha \\ \Omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i + \alpha \\ \Omega \end{pmatrix},$$

а Ω -составляющая меняет знак.

Из наличия некоторой зеркальной симметрии следует, что объединение прямых

$$\left\{ (\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

и только оно является изоклинами горизонтального направления. Изоклиной вертикального направления является лишь линия

$$\bar{L} = \left\{ (\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : \Omega = \frac{\sigma v}{I} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha} \right\}.$$

(На многообразии O доопределяем по непрерывности.)

6.2. О трансцендентной интегрируемости системы

Данный раздел посвящён изучению возможностей полного интегрирования рассматриваемой динамической системы. В нём приводится первый интеграл системы (73), выражающийся через элементарные функции, а также обсуждается путь интегрирования общей системы (72) (ср. с разделом 2).

6.2.1. Некоторые общие утверждения

Справедлива теорема, связывающая поведение траекторий возле асимптотических предельных множеств и интегрируемость системы. Асимптотическими предельными множествами будем называть отталкивающие и притягивающие предельные множества.

В разделе 2 мы уже касались сути доказательства следующей теоремы и предъявляли полный список первых интегралов соответствующей системы. Автор счёл нужным повторить это в данном разделе более подробно.

Рассмотрим систему уравнений в фазовом пространстве \mathbb{R}^n .

Теорема 6.1. *Если система обладает асимптотическими предельными множествами, то она не имеет полного набора непрерывных первых интегралов во всём фазовом пространстве.*

Данная теорема хотя и доказывается достаточно просто, но имеет важный топологический смысл о непрерывности первых интегралов возле предельных множеств.

Следствие 6.1. *Как функции первые интегралы могут иметь в данных асимптотических предельных множествах существенно особые точки.*

Ниже будет показано, что изолированные особые точки системы (70) являются притягивающими или отталкивающими. Таким образом, если и существует первый интеграл системы (72) (или (73)), то он является трансцендентной функцией [303].

6.2.2. Трансцендентный интеграл системы

Теорема 6.2. *Система (73) обладает трансцендентным первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.*

Доказательство. Система (73) с помощью замены вне многообразия O

$$\tau = \sin \alpha, \quad y = -\Omega + A_1 \tau$$

может быть приведена к одному уравнению

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{A_2 \tau}{y} + A_1,$$

в котором подстановкой $\xi = \frac{y}{\tau}$ осуществляется разделение переменных

$$(\xi^2 - A_1 \xi + A_2) d\tau = -\xi \tau d\xi.$$

Квадратура последнего и даёт искомый первый интеграл (в зависимости от параметров имеем три случая):

1) $A_1^2 - 4A_2 < 0$.

$$\ln(\xi^2 - A_1 \xi + A_2) + \frac{2A_1}{\sqrt{-A_1^2 + 4A_2}} \operatorname{arctg} \frac{2\xi - A_1}{\sqrt{-A_1^2 + 4A_2}} + \ln \tau^2 = \text{const};$$

$$2) A_1^2 - 4A_2 > 0.$$

$$\ln |\xi^2 - A_1\xi + A_2| + \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - 4A_2}} \ln \left| \frac{2\xi - A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2\xi - A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}} \right| + \ln \tau^2 = \text{const};$$

$$3) A_1^2 - 4A_2 = 0.$$

$$\ln \left| \xi - \frac{A_1}{2} \right| - \frac{A_1}{2\xi - A_1} + \ln |\tau| = \text{const}.$$

Переходя к переменным Ω и τ , имеем

$$1) A_1^2 - 4A_2 < 0.$$

$$[\Omega^2 + A_1\tau\Omega + A_2\tau^2] \times \exp \left\{ \frac{2A_1}{\sqrt{-A_1^2 + 4A_2}} \arctg \frac{2\Omega + A_1\tau}{\tau\sqrt{-A_1^2 + 4A_2}} \right\} = \text{const};$$

$$2) A_1^2 - 4A_2 > 0.$$

$$\begin{aligned} & \left| 2\Omega + \left(A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2} \right) \tau \right|^{\sqrt{A_1^2 - 4A_2} - A_1} \times \\ & \times \left| 2\Omega + \left(A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2} \right) \tau \right|^{\sqrt{A_1^2 - 4A_2} + A_1} = \text{const}; \end{aligned}$$

$$3) A_1^2 - 4A_2 = 0.$$

$$|2\Omega + A_1\tau| \exp \left\{ -\frac{A_1\tau}{2\Omega + A_1\tau} \right\} = \text{const}.$$

Теорема доказана. \square

Следствие 6.2. При $A_1 = 0$ трансцендентный первый интеграл превращается в аналитический первый интеграл физического маятника.

6.2.3. О выражении интеграла системы через элементарные и неэлементарные функции

Для поиска первого интеграла системы рассмотрим уравнение

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{1}{y_2} A_2 g(y_1) \cos y_1 + A_1 g'(y_1).$$

Это уравнение имеет более общий вид, чем уравнение, описывающее движение центра масс в классической работе Н. Е. Жуковского [136].

После замены $\tau = \sin y_1$, $y_1 \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$, сокращая на $\cos y_1$, имеем уравнение

$$\frac{dy_2}{d\tau} = -\frac{1}{y_2} A_2 g(\arcsin \tau) + A_1 \frac{dg(\arcsin \tau)}{d\tau}.$$

В частности, если выполнено условие (16), то мы имеем случай, когда последнее уравнение становится однородным. Как показано выше, первый интеграл в этом случае выражается через элементарные функции. Вообще же говоря, уравнение эквивалентно уравнению Риккати, решение которого в самом общем случае в элементарных функциях не выражается.

6.3. О механической аналогии с маятником в потоке среды

Кратко охарактеризуем задачу о физическом маятнике в потоке набегающей среды, поставленную Б. Я. Локшиным, В. А. Приваловым и В. А. Самсоновым [178]. Данная задача позволит обнаружить механическую и топологическую аналогии.

Рассмотрим плоскую пластину AB , закреплённую перпендикулярно державке OD на цилиндрическом шарнире O , находящуюся в потоке среды (рис. 38). В этом случае тело представляет собой физический маятник. Пластина AB и ось шарнира перпендикулярны плоскости движения. Поток среды движется с постоянной скоростью $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Предположим, что державка сопротивления не создаёт.

Суммарная сила \mathbf{S} воздействия потока среды на тело направлена параллельно державке, а точка N приложения этой силы определяется лишь одним параметром — углом атаки α , который измеряется между вектором скорости \mathbf{v}_D точки D относительно потока и державкой OD . Подобные условия возникают при использовании модели струйного обтекания плоских тел.

Таким образом, сила \mathbf{S} направлена по нормали к пластине в ту сторону от неё, которая противоположна направлению скорости \mathbf{v}_D , и проходит через некоторую точку N пластины, смещённую от точки D вперёд по отношению к направлению вектора \mathbf{v}_D .

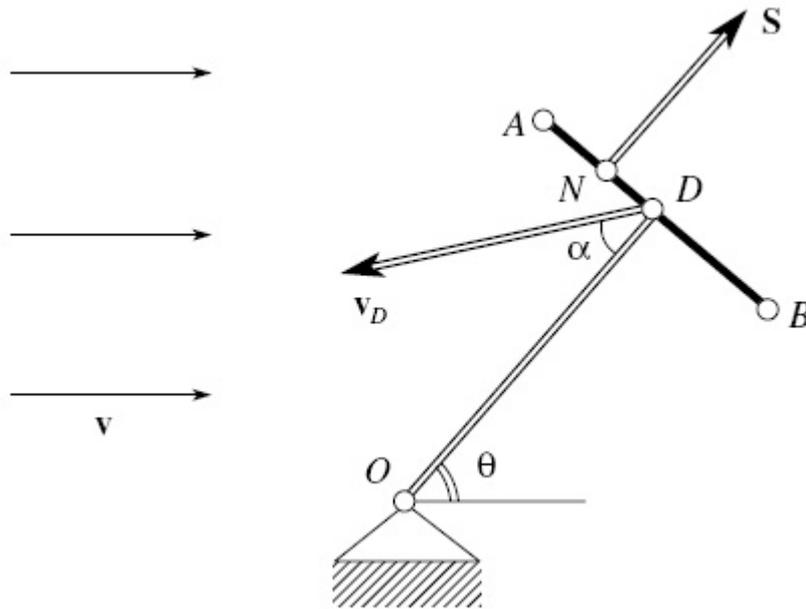


Рис. 38. Плоский маятник в потоке среды

Вектор $\mathbf{e} = \mathbf{OD}/\sigma$ (σ — расстояние OD) определяет ориентацию державки. Тогда

$$\mathbf{S} = s_1(\alpha)v_D^2\mathbf{e},$$

где коэффициент сопротивления s_1 зависит лишь от угла атаки (ср. с результатами раздела 1).

В силу свойств симметрии пластины относительно точки D функция $s(\alpha) = s_1(\alpha)\operatorname{sign}\cos\alpha$ удовлетворяет условию (13), а смещение точки N (т. е. $DN = y(\alpha)$) удовлетворяет условию $y \in \Upsilon$. Здесь Υ — класс функций $\{y_N\}$, описанный в разделе 1 (см. (11)). Нетрудно убедиться, что произведение $\mathcal{F}(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha)$ удовлетворяет условию (15).

Уравнение движения рассматриваемого маятника имеет вид

$$I\ddot{\theta} = -\mathcal{F}(\alpha)v_D^2, \quad (105)$$

где θ — угол отклонения маятника (рис. 38), I — его момент инерции.

Связь между углом атаки и величинами θ , $\dot{\theta}$ определяется кинематическими соотношениями

$$v_D \cos \alpha = v \cos \theta, \quad v_D \sin \alpha = \sigma \dot{\theta} + v \sin \theta, \quad v = |\mathbf{v}|.$$

В частном случае, когда выполнено свойство (16), уравнение (105) приводится к виду

$$I_*\ddot{\theta} + h\dot{\theta}\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 0, \quad (106)$$

где $I_*, h > 0$.

Обратимся теперь к предыдущей задаче о движении свободного тела. Система (73) эквивалентна уравнению

$$\ddot{\alpha} - A_1\dot{\alpha}\cos\alpha + A_2\sin\alpha\cos\alpha = 0, \quad (107)$$

где $A_1, A_2 > 0$.

Таким образом, уравнение (107) эквивалентно уравнению (106), если положить $\alpha = \theta + \pi$. При этом изменение во времени мгновенного угла атаки α свободного тела и угла поворота маятника, помещённого в поток среды, подчиняется одинаковым законам [230, 232].

Можно показать, что даже если условие (16) не выполнено, то полученная механическая аналогия имеет место для любых функций \mathcal{F} , удовлетворяющих условию (15).

Действительно, уравнение движения физического маятника в потоке среды приводится к виду

$$I_*\ddot{\theta} + f(\alpha)[v^2\sin\theta\cos\theta + \sigma v\dot{\theta}\cos\theta] = 0,$$

где функция $f(\alpha)$,

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sigma\dot{\theta} + v\sin\theta}{v\cos\theta},$$

удовлетворяет условиям

$$0 < f_* \leq f(\alpha) \leq f^* < +\infty$$

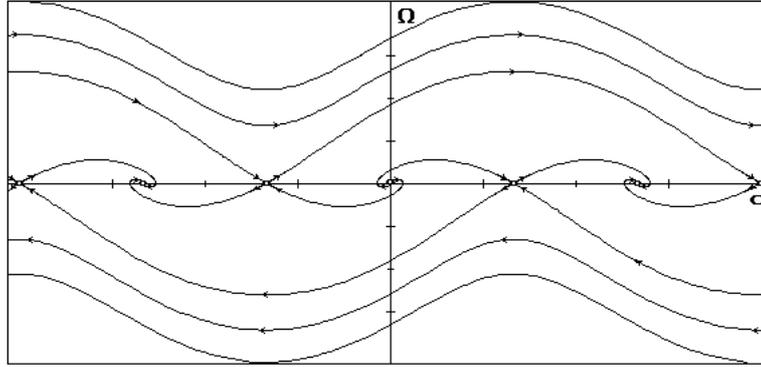


Рис. 39. Фазовый портрет плоского маятника в потоке среды

в силу свойства (15). Имеем, таким образом, автономное уравнение на двумерном фазовом цилиндре. Методами, развиваемыми в разделах 4, 5, легко показать, что последнее дифференциальное уравнение и уравнение (105) топологически эквивалентны.

Фазовый портрет уравнения (107) изображён на рис. 39, при этом вместо Ω следует принять $\dot{\alpha}$.

Динамическая система, заданная уравнением (107), относительно структурно устойчива (относительно груба) по отношению к классу функций Φ (см. раздел 5).

6.4. Топологическое строение фазового портрета исследуемой системы

В данном разделе мы проведём глобальный качественный анализ динамической системы (72) при условии (15) на всей фазовой плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$. Для любой функции $\mathcal{F} \in \Phi$ фазовый портрет системы (72) имеет один и тот же топологический тип.

Как будет следовать из проводимого анализа, у системы (72) не существует траекторий, имеющих в качестве α - и ω -предельных множеств бесконечно удалённые точки фазовой плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$.

В разделе 4 (следствие из леммы 4.6) показано, что вокруг точек $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ (как в полосе Π , так и в полосе Π'), не существует замкнутой кривой из траекторий векторного поля системы (72), в частности, не существует простых и сложных предельных циклов. Из-за двух видов симметрий на фазовой плоскости системы (72) вообще не существует замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых по фазовому цилиндру в точку.

6.4.1. Топологическая классификация точек покоя системы

Проведём топологическую классификацию особых точек системы (72) при условии (15).

1. Точки покоя $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, системы (72) являются отталкивающими при $k = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, и притягивающими при $k = 2l+1$. При $A_1^2 \mathcal{F}'(0) - 4A_2 < 0$ рассмотренные точки являются фокусами, при $A_1^2 \mathcal{F}'(0) - 4A_2 > 0$ — узлами, а при $A_1^2 \mathcal{F}'(0) - 4A_2 = 0$ — вырожденными узлами.
2. На каждой связной компоненте Λ_i многообразия O лежит особая точка S_i системы (72) с координатами $((2i+1)\frac{\pi}{2}, (-1)^i A_1)$. Такая точка для любого i является точкой гиперболического типа — седлом, которое обладает сепаратрисами. Из-за двух видов симметрий достаточно разобрать поведение сепаратрис, входящих (выходящих) в седла (из седел) S_{-1} и S_0 в полосе Π .

Поведение сепаратрисы, выходящей из точки S_{-1} в полосу Π (так же как и сепаратрисы, выходящей из точки S_0 в полосу Π), определяет глобальное поведение всех траекторий системы (72). Эту сепаратрису назовём *ключевой*.

6.4.2. О поведении ключевой сепаратрисы

Исследуя изоклины, заключаем, что ключевая сепаратриса не может уйти на бесконечность на фазовой плоскости. Поскольку в полосе Π (и Π' , см. раздел 4) не существует замкнутых кривых из траекторий системы (72), ключевая сепаратриса либо войдёт в точку S_0 , либо под прямым углом пересечёт прямую Λ_0 .

Предложение 6.1. *Ключевая сепаратриса пересечёт прямую Λ_0 в точке $(\frac{\pi}{2}, \Omega^*)$ при $\Omega^* < -A_1$.*

Доказательство можно провести методом систем сравнения (см. раздел 4).

6.4.3. Фазовый портрет. Его относительная грубость

Рассмотрим теперь глобальное качественное расположение траекторий системы (72) на фазовой плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$.

Ввиду наличия некоторой зеркальной симметрии для системы (72), а также в силу предложения 6.1 ключевая сепаратриса будет иметь в качестве ω -предельного множества седло $(-\frac{3}{2}\pi, 0)$. Поведение остальных симметричных сепаратрис может быть исследовано аналогичным образом.

Следствие 6.3.

1. Сепаратриса, входящая в точку S_{-1} в полосу Π , имеет в качестве α -предельного множества начало координат.
2. Движения с достаточно большой энергией являются периодическими.

3. Если считать фазовым пространством системы (72) цилиндр $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\Omega\}$, то на нём существует континуум траекторий, не стягиваемых в точку. Замкнутых же траекторий, стягиваемых по цилиндру в точку, не существует.
4. С использованием неособой во всей плоскости замены переменных

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = -\Omega + A_1 \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha}$$

фазовый портрет системы на плоскости $\mathbb{R}^2\{y_1, y_2\}$ изображён на рис. 39 (вместо $\Omega - y_2$, а вместо $\alpha - y_1$).

5. Фазовый портрет системы (72) изображён на рис. 3 (вместо $\alpha - -\alpha$).

Замечание. Ключевые сепаратрисы являются границами областей, в каждой из которых движение имеет различный характер. Так, в колебательной области, содержащей притягивающие и отталкивающие точки покоя, почти все траектории имеют в качестве предельных множеств аттракторы и репеллеры. Следовательно, не существует даже абсолютно непрерывной функции, являющейся плотностью инвариантной меры в данной области.

Иначе обстоит дело с областью, сплошь заполненной вращательными движениями.

Как показала в своей дипломной работе В. В. Журавлёва (1988 г.), существует гладкая функция, являющаяся плотностью инвариантной меры в области, сплошь заполненной периодическими траекториями, не стягиваемыми по фазовому цилиндру в точку.

В связи с проведённым глобальным качественным анализом системы (72) сделаем важный вывод, а именно что векторные поля систем вида (72) при условии (15) топологически эквивалентны между собой (см. раздел 5).

В частности, относительно класса функций Φ система уравнений вида (72) структурно устойчива.

Вообще же говоря, если рассмотреть произвольную деформацию векторного поля системы (72), обычная (абсолютная) грубость системы не будет иметь места. Последнее произойдёт ввиду наличия сепаратрис, идущих из седла в седло.

В разделе 10 будет показано, что при $h \neq 0$ ключевые сепаратрисы системы (92) расщепляются. Там же для любого h будет проведена типичная топологическая классификация фазовых портретов системы (92) при условии (15), которая описывает плоскопараллельное движение тела в среде, при котором величина скорости центра пластины остаётся постоянной, а на тело действует линейный по угловой скорости демпфирующий момент.

Далее проводится качественный анализ траекторий движения тела на плоскости. После полного качественного исследования фазового цилиндра квазискоростей становится возможным исследование конкретных траекторий твёрдого тела. Динамическая система пространства квазискоростей относительно структурно устойчива. Проводится интегрирование кинематических соотношений с целью механической интерпретации движения.

Обсуждаются общие свойства пространства решений: симметрии, различные расслоения фазового пространства, его разделение на колебательную и вращательную области. Изучаются свойства решений, соответствующих колебательной области: свойства асимптот при движении твёрдого тела, различные отношения эквивалентности на пространстве траекторий, топологические аналогии, механические интерпретации асимптотических движений. Изучаются свойства решений, соответствующих вращательной области: существование семейства периодических траекторий, всюду плотно заполняющих некоторые области, вопросы плотности незамкнутых траекторий в ограниченных множествах [289, 377].

Уже первые результаты численного исследования траекторий движения тела на плоскости явились хорошим стимулом развития аналитического аппарата для изучения таких траекторий. Эти численные результаты указали путь развития качественного анализа данной динамической системы. Впоследствии, когда были получены исчерпывающие аналитические доказательства для различных качественных свойств данной динамической системы, численное построение дало количественные характеристики траекторий движения тела на плоскости.

6.5. Общие свойства решений динамической системы

Поскольку топологический тип фазового портрета системы (72) не меняется при деформациях векторного поля вдоль класса полей, определённого с помощью условия (15), будем исследовать аналитическую безразмерную систему уравнений, полученную из системы (73):

$$\begin{aligned}\alpha' &= \Omega + \beta \sin \alpha, \\ \Omega' &= -\beta \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}\tag{108}$$

Обезразмеренные кинематические соотношения примут вид

$$\begin{aligned}\phi' &= \Omega, \\ x' &= \cos(\alpha - \phi), \\ y' &= \sin(\alpha - \phi).\end{aligned}\tag{109}$$

Здесь введён безразмерный параметр

$$\beta = \frac{\sigma^2 AB}{I} = \sigma^2 n_0^2 > 0.$$

Фазовый портрет системы (108) для любого $\beta > 0$ изображён на рис. 3, и для любых начальных условий (α_0, Ω_0) известно качественное поведение решений $\alpha = \alpha_1(t, \alpha_0, \Omega_0)$, $\Omega = \Omega_1(t, \Omega_0, \alpha_0)$ системы (108). Таким образом, в силу (109)

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1(t, \phi_0, \alpha_0, \Omega_0) = \phi_0 + \int_{t_0}^t \Omega_1(\tau, \Omega_0, \alpha_0) d\tau, \\ x &= x_1(t, x_0, \alpha_0, \Omega_0, \phi_0) = x_0 + \int_{t_0}^t \cos(\alpha_1(\tau, \alpha_0, \Omega_0) - \phi_1(\tau, \phi_0, \alpha_0, \Omega_0)) d\tau, \\ y &= y_1(t, y_0, \alpha_0, \Omega_0, \phi_0) = y_0 + \int_{t_0}^t \sin(\alpha_1(\tau, \alpha_0, \Omega_0) - \phi_1(\tau, \phi_0, \alpha_0, \Omega_0)) d\tau.\end{aligned}$$

Так как имеются центральная симметрия и некоторая зеркальная симметрия, будем рассматривать класс следующих начальных условий:

$$t_0 = 0, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \phi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_0 = y_0 = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1\left(t, \frac{\pi}{2}, \Omega_0\right) = \alpha_2(t, \Omega_0), \\ \Omega &= \Omega_1\left(t, \Omega_0, \frac{\pi}{2}\right) = \Omega_2(t, \Omega_0), \\ \phi &= \phi_1\left(t, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \Omega_0\right) = \phi_2(t, \Omega_0) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^t \Omega_2(\tau, \Omega_0) d\tau, \\ x &= x_1\left(t, 0, \frac{\pi}{2}, \Omega_0, -\frac{\pi}{2}\right) = x_2(t, \Omega_0) = \int_0^t \cos(\alpha_2(\tau, \Omega_0) - \phi_2(\tau, \Omega_0)) d\tau, \\ y &= y_1\left(t, 0, \frac{\pi}{2}, \Omega_0, -\frac{\pi}{2}\right) = y_2(t, \Omega_0) = \int_0^t \sin(\alpha_2(\tau, \Omega_0) - \phi_2(\tau, \Omega_0)) d\tau.\end{aligned}$$

Укажем на общие свойства решений системы (108), (109), соответствующих приведённому классу начальных условий.

Предложение 6.2. *Функции $\alpha_2(t, \Omega_0) - \frac{\pi}{2}$, $\phi_2(t, \Omega_0) + \frac{\pi}{2}$, $x_2(t, \Omega_0)$ нечётные, $\Omega_2(t, \Omega_0)$, $y_2(t, \Omega_0)$ — чётные функции времени t (для любого фиксированного $\Omega_0 \in \mathbb{R}$).*

Можно считать, что $\Omega_0 \in (-\beta, +\infty)$ в силу наличия двух видов симметрий.

Следствие 6.4. *На плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$ кривая $F(x_2(t, \Omega_0), y_2(t, \Omega_0)) = 0$ для любого $\Omega_0 \in \mathbb{R}$ симметрична относительно оси Oy .*

6.6. Расслоения фазового пространства

6.6.1. Два подхода к рассмотрению глобального расположения траекторий в фазовом пространстве

В силу отщепления независимой подсистемы (108) фазовое пространство допускает следующие расслоения.

Первый подход. В силу (69) фазовое пространство расслаивается на пятимерные гиперплоскости

$$\{(v, \alpha, \Omega, x, y, \phi) \in \mathbb{R}^6 : v = \text{const} > 0\},$$

которые являются расслоениями над двумерными базами — цилиндрами $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\Omega\}$. Данное семейство цилиндров получено в явном виде для случая (16), поскольку предъявлен первый интеграл независимой подсистемы (73).

Зафиксируем какой-нибудь один уровень интеграла системы (73). Получим, таким образом, четырёхмерный цилиндр. Ограничим систему уравнений только лишь на данный цилиндр. Трёхмерная база $\mathbb{R}^3\{x, y, \phi\}$ расслоения, в свою очередь, является расслоением над окружностью $\mathbb{S}^1\{\phi \bmod 2\pi\}$ со слоем — плоскостью $\mathbb{R}^2\{x, y\}$ и имеет также ряд свойств цилиндрической природы.

Второй подход. В силу (69), (108) шестимерное фазовое пространство является расслоением над трёхмерной базой $\mathbb{R}^3\{v, \alpha, \Omega\}$, которая, в свою очередь, расслаивается на двумерные плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$, а именно

$$\{(v, \alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^3 : v = \text{const} > 0\}.$$

Фазовые портреты на этих плоскостях представляют собой портреты независимой системы (108). Таким образом, мы получили полное расслоение базы $\mathbb{R}^3\{v, \alpha, \Omega\}$.

В силу, так сказать, полного и явного «интегрирования» базы $\mathbb{R}^3\{v, \alpha, \Omega\}$ расслоения шестимерного фазового пространства осуществляется поднятие траекторий из базы в фазовое пространство и получение полного расслоения всего фазового пространства.

6.6.2. О разделении фазовой плоскости квазискоростей на области с различным характером поведения траекторий

Строение фазовой плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$ системы (108) полностью определяет расслоение шестимерного фазового пространства. Остановимся подробнее на анализе фазовых траекторий на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$.

Ключевые сепаратрисы, т. е. сепаратрисы, выходящие из точек

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi l, (-1)^l \beta\right)$$

и входящие в точки

$$\left(\frac{3\pi}{2} + \pi l, (-1)^l \beta\right), \quad l \in \mathbb{Z},$$

разделяют фазовую плоскость на две области с совершенно различным характером поведения траекторий (см. рис. 3).

Первая область — колебательная, или финитная (она односвязна и содержит прямую $\{(\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2: \Omega = 0\}$) — сплошь заполнена траекториями следующего типа. Почти любая траектория начинается в отталкивающейся точке $(2\pi k, 0)$ и кончается в притягивающей $((2l + 1)\pi, 0)$, $l, k \in \mathbb{Z}$. Исключение составляют лишь точки покоя $(\pi k, 0)$, а также сепаратрисы, которые либо выходят из отталкивающих точек $(2\pi k, 0)$ и входят в седла S_{2k-1} и S_{2k} , либо выходят из седел S_{2k} и S_{2k+1} и входят в притягивающие точки $((2k + 1)\pi, 0)$. Здесь

$$S_k = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k, (-1)^k \beta \right).$$

Вторая область — вращательная (она двусвязна) — сплошь заполнена вращательными движениями, подобно вращениям на фазовой плоскости математического маятника. Данные фазовые траектории огибают фазовый цилиндр и являются на нём периодическими. Хотя динамическая система (108) и неконсервативна, во вращательной области своей фазовой плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$ она, как отмечалось выше, допускает сохранение инвариантной меры с переменной плотностью. Данное свойство характеризует рассматриваемую систему как систему с переменной диссипацией.

6.7. Свойства решений, соответствующих колебательной области

В данном разделе проводится качественное исследование решений кинематических уравнений (109), соответствующих начальным условиям из колебательной области плоскости квазискоростей.

6.7.1. Свойства асимптот при движении твёрдого тела на плоскости

Будем рассматривать функции $\alpha_2(t, \Omega_0)$, $\Omega_2(t, \Omega_0)$, при $t \geq 0$, а также при $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$, где Ω_* — такое значение, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega_2(t, \Omega_*) = \beta.$$

При всех таких Ω_0 выполнены равенства

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega_2(t, \Omega_0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_2(t, \Omega_0) = \pi.$$

Поступательное движение тела, при котором центр масс находится впереди, экспоненциально орбитально устойчиво (см. [230, 232]). Поэтому существует прямая на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$, являющаяся асимптотой при $t \rightarrow +\infty$ для центра пластины твёрдого тела. Чтобы охарактеризовать свойства асимптоты приведём вспомогательное утверждение, несущее информацию о возможных поворотах тела.

Предложение 6.3.

1. Для любого действительного $T > 0$ ($T < 0$) существует начальное значение $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$, такое что

$$I_1(\Omega_0) = \int_0^{+\infty} \Omega_2(t, \Omega_0) dt > T \quad (< T). \quad (110)$$

2. Функция $I_1(\Omega_0)$ гладко зависит от Ω_0 .

Следствие 6.5. Для любого действительного r найдётся $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$, такое что $I_1(\Omega_0) = r$. Таким образом, отображение

$$I_1: (-\beta, \Omega_*) \rightarrow \mathbb{R}$$

является отображением на.

В силу экспоненциальной устойчивости стационарного движения, при котором центр масс движется впереди, предельными движениями при $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$ и при $t \rightarrow \pm\infty$ будут асимптотические движения к прямым, симметрично расположенным относительно оси Oy : при $t \rightarrow +\infty$ — к одной прямой, а при $t \rightarrow -\infty$ — к другой. Поэтому достаточно изучить лишь одну прямую.

Очевидно, что угол поворота искомой прямой при $t \rightarrow +\infty$ равен $I_1(\Omega_0)$, т. е. задаётся интегралом (110). Таким образом, угловой коэффициент искомой прямой задаётся начальным значением угловой скорости Ω_0 .

По предложению 6.3 возникает (возможно, многозначное) отображение

$$I_2: \mathbb{R} \rightarrow (-\beta, \Omega_*).$$

Это отображение порождает отображение

$$I_3: \mathbb{S}^1 \rightarrow (-\beta, \Omega_*),$$

которое является многозначным и в некотором смысле обратным к отображению

$$I_1^{\text{mod}}: (-\beta, \Omega_*) \rightarrow \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Рассмотрим механический смысл отображений I_1 и I_1^{mod} , которые являются обратными соответственно для отображений I_2 и I_3 . Отображение I_1 каждому допустимому значению $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$ ставит в соответствие действительное число r , взяв которое по модулю 2π , можно получить угол между асимптотой и осью Oy . При этом делитель числа r на 2π даёт число оборотов со знаком, которое сделает тело при движении от его начального положения до асимптотически устойчивого конечного (при $t \rightarrow +\infty$). Отображение же I_1^{mod} лишь ставит в соответствие допустимому значению начальной угловой скорости угол поворота от оси Oy до асимптоты движения тела при $t \rightarrow +\infty$ и не несёт никакой информации относительно числа полных оборотов со знаком.

6.7.2. Отношения эквивалентности на пространстве траекторий

Рассмотрим пространство всех траекторий тела на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$, соответствующее решениям системы (108), (109)

$$\alpha_2(t, \Omega_0), \Omega_2(t, \Omega_0), \phi_2(t, \Omega_0), x_2(t, \Omega_0), y_2(t, \Omega_0),$$

т. е. семейство кривых на плоскости, зависящее от параметра Ω_0 . Для каждого фиксированного $\beta > 0$ отождествим все траектории, имеющие одно и то же значение $I_1(\Omega_0)$. Таким образом мы отождествили такие допустимые движения тела, при которых

- 1) тело совершает одно и то же количество полных оборотов со знаком;
- 2) тело имеет асимптоту с одним и тем же углом от оси Oy .

Данное отношение задаёт отношение эквивалентности. Фактор-пространство всего пространства допустимых траекторий по данному отношению эквивалентности будем обозначать через FT. Очевидно, что если отображение I_1 взаимно-однозначно, то FT совпадает со всем пространством траекторий, при которых $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$.

Пусть на окружности \mathbb{S}^1 с фиксированной на ней точкой $E_1 \in \mathbb{S}^1$ заданы пути, начинающиеся в точке E_1 и заканчивающиеся на окружности в точке E_2 . Пути E_1 в E_2 на окружности будем считать тождественными (гомотопными), если они стягиваются друг к другу по окружности. Такое отношение задаёт отношение эквивалентности.

Следствие 6.6. При $E_1 = E_2$ получим фундаментальную группу окружности $\pi_1(\mathbb{S}^1)$, которая изоморфна \mathbb{Z} . Если же $E_1 \neq E_2$, причём точка E_2 не фиксирована, то получившаяся фактор-группа изоморфна $\pi_1(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{S}^1$.

Предложение 6.4. Пространство FT изоморфно $\pi_1(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{S}^1$.

Следствие 6.7. Каждому допустимому значению $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$ соответствует траектория на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$, определяющая элемент пространства FT, который, в свою очередь, задаётся двумя числами: целым числом полных оборотов со знаком, а также действительным числом по модулю 2π поворота асимптоты от оси Oy .

Следствие 6.8. Если $E_1 = E_2$, то получаем изоморфизм $FT \cong \pi_1(\mathbb{S}^1)$.

Это соответствует тому, что тело, сделав несколько оборотов, имеет при $t \rightarrow +\infty$ асимптоту, параллельную оси Oy . Таким образом, в этом случае каждой траектории соответствует лишь одно целое число, несущее информацию о количестве полных оборотов со знаком.

Следствие 6.9. Если отображение $I_1(\Omega_0)$ строго монотонно, то появляется естественный изоморфизм между интервалом $(-\beta, \Omega_*)$ и множеством $\mathbb{Z} \times \mathbb{S}^1$.

Теперь уместно сделать вывод о траекториях движения тела на плоскости: для каждого $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$ траектория на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$ «кодируется» парой чисел (q, Ψ) , $q \in \mathbb{Z}$, $\Psi \in \mathbb{R}$, $\Psi \bmod 2\pi$, которая является «адресом» траектории.

6.7.3. Механические интерпретации асимптотических движений

Рассмотрим те начальные значения угловой скорости Ω_0 , при которых асимптота параллельна одной из осей координат.

Случай А. Асимптота параллельна оси Ox . Существует последовательность точек $\{\Omega'_n\} \subset (-\beta, \Omega_*)$, такая что $I_1^{\text{mod}}(\Omega'_n) = \pi/2$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Число полных оборотов тела, закрученного с угловой скоростью Ω'_n , может достигать любого целого числа. Расстояние от асимптоты до прямой Ox обозначим через L_1 . В силу следствия из предложения 6.2 асимптота движения тела при $t \rightarrow -\infty$ совпадает с асимптотой движения тела при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, для любых начальных угловых скоростей Ω'_1 ($n \in \mathbb{N}$) приращение ординаты точки тела за бесконечное время (от $-\infty$ до $+\infty$) равно нулю (рис. 40).

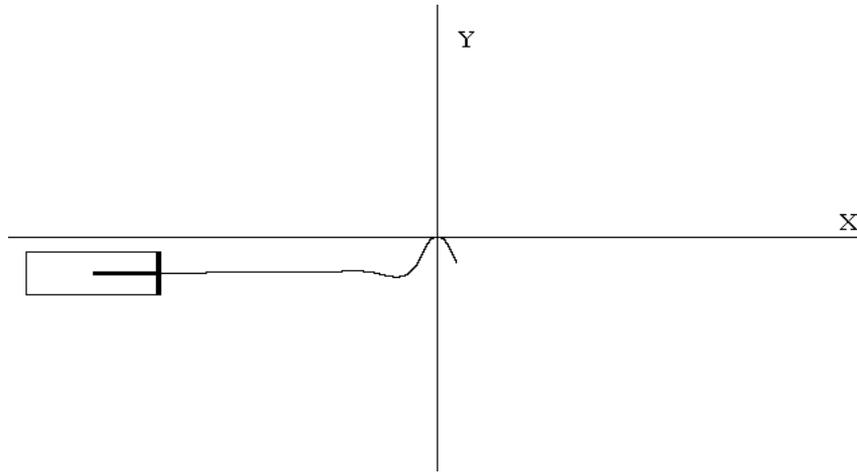


Рис. 40. Движение тела с горизонтальной асимптотой

Случай Б. Асимптота параллельна оси Oy . Существует последовательность точек $\{\Omega''_n\} \subset (-\beta, \Omega_*)$, такая что $I_1^{\text{mod}}(\Omega''_n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Число полных оборотов тела, закрученного с угловой скоростью Ω''_n , может достигать любого целого числа. Расстояние от асимптоты до прямой Oy обозначим через L_2 . В силу следствия из предложения 6.2 асимптота движения тела при $t \rightarrow -\infty$ также параллельна оси Oy и находится на расстоянии L_2 до оси Oy . Таким образом, для любых начальных угловых скоростей Ω''_n ($n \in \mathbb{N}$) приращение абсциссы точки тела за бесконечное время (от $-\infty$ до $+\infty$) равно $2L_2$ (рис. 41).

В этом случае (см. следствие 6.8) имеется топологическая аналогия: пространство FT изоморфно фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{S}^1)$.

Для более детального объяснения последнего факта достаточно рассмотреть все возможные траектории $x(t)$, $y(t)$ на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$ (и выделить среди

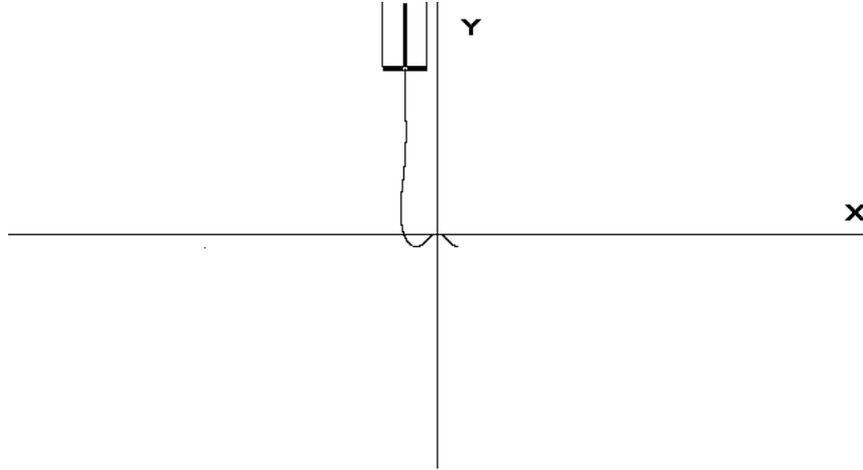


Рис. 41. Движение тела с вертикальной асимптотой

них действительные в качестве решений системы (108), (109)), и все возможные кривые на окружности S^1 , начинающиеся в фиксированной точке и заканчивающиеся на окружности. Последние траектории необходимо рассмотреть с точностью до гомотопии вдоль S^1 .

6.7.4. Об одном локальном свойстве асимптоты

Пока система (108), (109) рассматривалась при любом фиксированном значении параметра $\beta > 0$. Укажем на одно свойство асимптоты движения, параллельной оси Oy и формально зависящей от параметра $\beta > 0$.

Поставим следующий вопрос: как зависит приращение L_2 от параметра β . Величина L_2 представляется в следующем виде:

$$L_2 = L_2(\Omega_0, \beta) = \int_0^{+\infty} \cos(\alpha_\beta(t, \Omega_0) - \phi_\beta(t, \Omega_0)) dt.$$

Здесь $\alpha_\beta(t, \Omega_0)$, $\phi_\beta(t, \Omega_0)$ — решения $\alpha_2(t, \Omega_0)$, $\phi_2(t, \Omega_0)$ системы (108) для каждого $\beta > 0$.

Предложение 6.5. При малых $\beta > 0$ функция $L_2(\Omega_0, \beta)$ для любого $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$ представляется в виде

$$L_2(\Omega_0, \beta) = l_2(\Omega_0, \beta) \cdot \beta^2,$$

где $\frac{\partial l_2(\Omega_0, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0}$, $l_2(\Omega_0, \beta) \Big|_{\beta=0}$ ограничены. (Здесь производные берутся при $\beta \rightarrow +0$.)

Следствие 6.10. В случае системы (108) функция $l_2(\Omega_0, \beta)$ при допустимых Ω_0 — функция аналитическая, поэтому представление для $L_2(\Omega_0, \beta)$ справедливо при всех $\beta \in \mathbb{R}$.

6.8. Свойства решений, соответствующих вращательной области

Рассмотрим класс траекторий, соответствующих вращательной области.

6.8.1. Существование семейства периодических траекторий

Изучим общие свойства периодических траекторий, огибающих фазовый цилиндр квазискоростей, а также связь этих свойств со свойствами траекторий твёрдого тела на плоскости. Для этого исследуем функции $\alpha_2(t, \Omega_0)$, $\Omega_2(t, \Omega_0)$ при $t \geq 0$, а также при $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$. При этом $\Omega_2(t, \Omega_0)$ для каждого фиксированного $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$ — периодическая функция от t периода $T(\Omega_0)$:

$$\Omega_2(t + T(\Omega_0), \Omega_0) = \Omega_2(t, \Omega_0),$$

а $\alpha_2(t, \Omega_0)$ имеет приращение 2π :

$$\alpha_2(t + T(\Omega_0), \Omega_0) = \alpha_2(t, \Omega_0) + 2\pi.$$

Для начала исследуем зависимость периода $T(\Omega_0)$ траектории от $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$.

Поскольку вдоль замкнутой на цилиндре траектории

$$\frac{\partial \alpha_2(t, \Omega_0)}{\partial t} > 0 \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}, \quad \Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty),$$

то по теореме о неявной функции можно разрешить однозначно

$$t = t_2(\alpha, \Omega_0)$$

вдоль периодической траектории. При этом

$$\frac{\partial t_2(\alpha, \Omega_0)}{\partial \alpha} > 0 \quad \text{для всех } \alpha \in \mathbb{R}, \quad \Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty).$$

Функция $T(\Omega_0)$ представляется в виде

$$0 < T(\Omega_0) = \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \frac{d\alpha}{\Omega_2(t_2(\alpha, \Omega_0), \Omega_0) + \beta \sin \alpha}.$$

Предложение 6.6. Функция $T(\Omega_0)$ гладкая на интервале $(\Omega_*, +\infty)$, причём

$$\lim_{\Omega_0 \rightarrow \Omega_* + 0} T(\Omega_0) = +\infty, \quad \lim_{\Omega_0 \rightarrow +\infty} T(\Omega_0) = +0, \quad \frac{dT(\Omega_0)}{d\Omega_0} < 0 \quad \text{для всех } \Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty).$$

Таким образом, функция $T(\Omega_0)$ задаёт диффеоморфизм

$$T: (\Omega_*, +\infty) \rightarrow (0, +\infty).$$

Рассмотрим теперь класс функций $x_2(t, \Omega_0)$, $y_2(t, \Omega_0)$ при $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$. По предложению 6.2 $x_2(t, \Omega_0)$ — нечётная, а $y_2(t, \Omega_0)$ — чётная функция t . В силу (109)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_2(t, \Omega_0) &= \cos(\alpha_2(t, \Omega_0) - \phi_2(t, \Omega_0)), \\ \frac{d}{dt}y_2(t, \Omega_0) &= \sin(\alpha_2(t, \Omega_0) - \phi_2(t, \Omega_0)). \end{aligned}$$

Фиксируем Ω_0 . Приращение функции $\phi_2(t, \Omega_0)$ за время $T(\Omega_0)$ равно

$$\Delta\phi = \phi_2(T(\Omega_0), \Omega_0) - \phi_2(0, \Omega_0) = \phi_2(T(\Omega_0), \Omega_0) + \frac{\pi}{2} > 0,$$

так как

$$\Omega_2(t, \Omega_0) > 0 \text{ для всех } t \in \mathbb{R}, \quad \Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty).$$

Если

$$\Delta\alpha = \alpha_2(T(\Omega_0), \Omega_0) - \alpha_2(0, \Omega_0),$$

то, очевидно, $\Delta\alpha = 2\pi$.

Рассмотрим величину

$$\Delta(\alpha - \phi) = \alpha_2(T(\Omega_0), \Omega_0) - \phi_2(T(\Omega_0), \Omega_0) - \alpha_2(0, \Omega_0) + \phi_2(0, \Omega_0).$$

По предложениям 6.3, 6.6 функция $\Delta(\alpha - \phi)(\Omega_0)$ гладкая при $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$. Обозначим $\Delta(\alpha - \phi)(\Omega_0)$ через $\Delta_{\alpha-\phi}(\Omega_0)$. Справедливо неравенство

$$-\infty < \Delta_{\alpha-\phi}(\Omega_0) < 2\pi.$$

Другими словами, приращение разности углов за период может быть достаточно большим.

Предложение 6.7. Для любого достаточно большого отрицательного значения $\mathcal{D} < 0$ найдётся $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$, такое что $\Delta_{\alpha-\phi}(\Omega_0) = \mathcal{D}$.

Рассмотрим значения правых частей последних равенств на периоде $T(\Omega_0)$, т. е. при $t = T(\Omega_0)$:

$$\frac{d}{dt}x_2(T(\Omega_0), \Omega_0) = \cos z, \quad \frac{d}{dt}y_2(T(\Omega_0), \Omega_0) = \sin z.$$

Другими словами, $x_2'(t, \Omega_0) = \cos f(t)$, $y_2'(t, \Omega_0) = \sin f(t)$, где $f(T(\Omega_0)) = z$.

Предложение 6.8. Функции $\cos f(t)$ и $\sin f(t)$ периодические тогда и только тогда, когда z рационально зависимо с π .

Предложение 6.9. На числовом луче $(\Omega_*, +\infty)$ существует всюду плотное счётное множество \mathcal{K} , обладающее следующим свойством: $\Omega_0 \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда функции $x_2'(t, \Omega_0)$ и $y_2'(t, \Omega_0)$ периодические периода $\tau(\Omega_0)$.

Поскольку на множестве \mathcal{K} (при фиксированном $\Omega_0 \in \mathcal{K}$) функции $x_2'(t, \Omega_0)$, $y_2'(t, \Omega_0)$ периодические периода $\tau(\Omega_0)$, то функции $x_2(t, \Omega_0)$ и $y_2(t, \Omega_0)$ периодические в том и только том случае, если

$$\int_0^{\tau(\Omega_0)} x_2'(t, \Omega_0) dt = \int_0^{\tau(\Omega_0)} y_2'(t, \Omega_0) dt = 0. \quad (111)$$

Равенство (111) выполнено на множестве \mathcal{K} , поскольку функция $y_2'(t, \Omega_0)$ нечётная по переменной t , а также выполнено свойство

$$\frac{d}{dt} y_2 \left(t + \frac{\pi}{2}, \Omega_0 \right) = \frac{d}{dt} x_2(t, \Omega_0) \quad \text{для всех } \Omega_0 \in \mathcal{K}.$$

Таким образом верно следующее предложение.

Предложение 6.10. *Кривая*

$$\gamma(t) : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_2(t, \Omega_0), y = y_2(t, \Omega_0)\}$$

на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$ замкнута тогда и только тогда, когда $\Omega_0 \in \mathcal{K}$.

Следствие 6.11. *Для почти всех $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$ траектория движения центра пластины твёрдого тела на плоскости — незамкнутая кривая.*

Следствие 6.12. *Поскольку выполнено свойство (65), то либо кривая уходит на бесконечность, либо существует множество, в котором она всюду плотна.*

6.8.2. О плотности незамкнутых траекторий

В рассматриваемой системе существует бесконечное всюду плотное семейство замкнутых траекторий. При этом незамкнутые траектории оказываются всюду плотными. Для исследования данного вопроса обратимся к теореме 4.9, из которой получают важные следствия.

Предложение 6.11. *Незамкнутая траектория, которая является проекцией на плоскость $\mathbb{R}^2\{x, y\}$ интегральной траектории системы (108), (109), всюду плотна возле себя.*

Можно показать, что в нашем случае траектория центра пластины твёрдого тела заполняет ограниченную область — кольцо на плоскости. На рис. 42 и 43 показаны траектории центра пластины соответственно на малых и больших временах. Данная визуализация движения на персональном компьютере была получена с помощью специально написанного пакета программ.

Итак, для почти всех значений начальной угловой скорости траектория центра пластины — всюду плотная в ограниченном множестве плоскости, а также возле себя незамкнутая траектория. Для остальных значений начальной угловой скорости искомая кривая замкнутая, задаваемая длиннопериодическими функциями.

6.9. Об инструментальных средствах исследования модели

В данном разделе автор считает нужным кратко рассказать о пакете прикладных программ, позволившем визуализировать движение тела на плоскости.

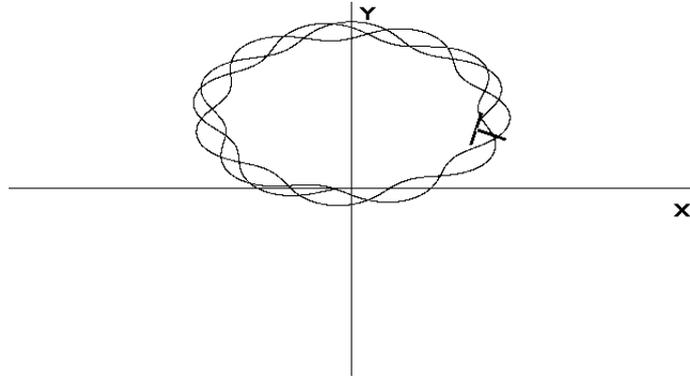


Рис. 42. Всюду плотная траектория в кольце на малых временах

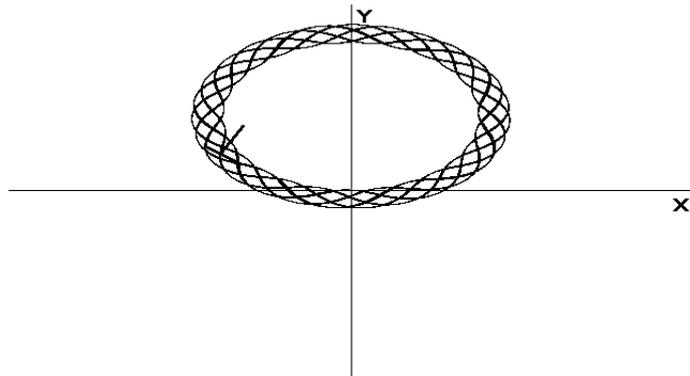


Рис. 43. Всюду плотная траектория в кольце на больших временах

Поскольку аналитическое исследование поведения системы в «большом» весьма затруднительно, было проведено подробное численное моделирование движения системы с различными значениями параметров. С этой целью была создана программа, позволяющая последовательно конструировать механическую модель и моделировать её движение в желаемом диапазоне параметров. Процесс работы программы разбит на несколько этапов: машинное конструирование механической модели, выбор начальных условий, моделирование движения. В этой связи интересно описать инструментальные средства исследования модели.

1. Машинное конструирование механической модели.

На первом этапе работы программы на дисплее появляются список механических параметров системы, полноэкранное изображение механической модели. Далее проводится желаемое изменение параметров описываемой модели, отвечающих за свойства модели. Таким образом для получения

требуемой конфигурации и уравнений движения проводится последовательное конструирование механической модели, которая будет использоваться для дальнейших расчётов.

2. Выбор начальных условий.

Следующим этапом, предваряющим непосредственное моделирование движения, является задание начальных условий. На экране отображается конфигурационная плоскость обобщённых координат, и задание начальных условий осуществляется выбором точки на этой плоскости или вводом точных значений начальных условий.

3. Моделирование движения.

В процессе моделирования поведения системы интегрируются уравнения движения при выбранных начальных условиях, причём результаты счёта выводятся на экран непосредственно в процессе интегрирования. Вывод результатов осуществляется в двух графических режимах.

В первом режиме средствами быстрой машинной графики в процессе интегрирования непрерывно строится фазовый портрет динамической системы. Этот режим служит для обнаружения и анализа характерных типов движений на фазовой плоскости: положений равновесия, замкнутых траекторий и т. п.

Во втором режиме параллельно вычислениям на экране демонстрируется реальная картина движения исследуемой системы, совершающей поступательно-вращательные движения в потоке среды.

Путём введения ряда упрощающих предположений проведено понижение порядка в некоторой задаче моделирования плоскопараллельного движения тела в среде при струйном или отрывном обтекании. Редуцированная система допускает полный качественный анализ на фазовой плоскости квазискоростей и геометрическую интерпретацию движения.

Показано, что траектория центра пластины на плоскости обладает осевой симметрией, а при некоторых начальных условиях и сферической. Фазовое пространство задачи обладает рядом свойств, характеризующих наличие расслоений. Ключевые сепаратрисы делят плоскость квазискоростей на две области — колебательную (финитную) и вращательную.

Орбитальная экспоненциальная устойчивость движения из колебательной области позволяет говорить о существовании асимптот для траекторий движения. Для любого наперёд заданного угла существуют начальные условия движения, при которых тело повернётся на этот угол за бесконечное время. Таким образом, движение способно иметь любую асимптоту. Благодаря ряду геометрических и топологических аналогий показано, что в пространстве траекторий можно ввести отношения эквивалентности. При этом каждая траектория «кодируется» целым числом полных оборотов и действительным числом по модулю 2π угла поворота асимптоты.

В зависимости от единственного безразмерного параметра поступательное приращение тела за бесконечное время пропорционально квадрату этого параметра.

Движения тела, соответствующие вращательной области плоскости квазискоростей, могут быть либо периодическими, либо всюду плотными в ограниченной области плоскости. Период движения по такой траектории может быть сколь угодно большим. При этом почти все (с точки зрения меры) траектории являются всюду плотными. Существует бесконечное всюду плотное семейство замкнутых траекторий в фазовом пространстве. Аperiodические траектории всюду плотны в сферически симметричной области, а также плотны возле себя.

Таким образом, траекториям из вращательной области фазовой плоскости квазискоростей соответствуют движения в ограниченной области плоскости как проекции конфигурационного пространства, а траекториям из колебательной (финитной) области — движения, уходящие на бесконечность.

Изучение динамики движения твёрдого тела с постоянной скоростью центра масс эквивалентно, как известно, изучению динамики движения вокруг центра масс в системе координат Кёнига.

В соответствии с этим далее проводится глобальный качественный анализ систем дифференциальных уравнений, возникающих при описании движения твёрдого тела в сопротивляющейся среде, при котором на тело действует лишь пара сил. При этом изучение проводится не в системе координат Кёнига, а в отличной от неё инерциальной системе, поскольку изучаемые системы уравнений являются удобными системами сравнения для более сложных (систем с переменной диссипацией с ненулевым средним) систем, которые будут рассматриваться позднее. Тем не менее далее указано на три различных топологических типа фазовых портретов систем, а также на трансцендентную интегрируемость.

6.10. Сведение системы к физическому маятнику

6.10.1. О сведении динамической системы к физическому маятнику

При рассмотрении данного класса движений, описываемых системой (8)–(10), (104) при условии (76), можно пойти двумя путями. Во-первых, как уже говорилось, в инерциальной системе координат Кёнига нетривиальна лишь группа из двух уравнений, а именно

$$\phi' = -\Omega, \quad \Omega' = \mathcal{F}(\alpha)v^2,$$

к которой необходимо добавить два кинематических соотношения, связывающих величины α , Ω и v_D , где D — центр пластины твёрдого тела. При этом мы необходимо попадаем в условия раздела 6.3, динамическая система которого эквивалентна последней системе.

Во-вторых, с точки зрения теории динамических систем, рассматривая систему (8)–(10), (104), мы делаем вывод, что она интегрируема. Вообще говоря, достаточно иметь для этого пять первых интегралов. Но поскольку система (8)–(10) — независимая подсистема третьего порядка в системе (8)–(10), (104), достаточно проинтегрировать эту подсистему, а затем подставить полученные функции в систему (104). При этом качественно находятся величины ϕ , x , y .

Поскольку центр масс движется прямолинейно и равномерно, у системы (8)–(10), (104) имеются два независимых первых интеграла:

$$\begin{aligned} v \cos(\alpha + \phi) - \sigma\Omega \sin \phi &= C_1, \\ v \sin(\alpha + \phi) + \sigma\Omega \cos \phi &= C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const}. \end{aligned}$$

Левые части последних равенств являются компонентами вектора скорости центра масс в неподвижной системе координат. Дополнительный первый интеграл, независимый с двумя последними, будет получен позднее.

Таким образом, достаточно знать не пять, а три независимых первых интеграла. Действительно, имея три независимых соотношения на четыре переменные ϕ , v , α , Ω , в каждой точке фазового пространства можно разрешить последние три величины от ϕ . В силу первого из кинематических соотношений (104) величина ϕ определяется с помощью квадратур. Следовательно, определяются величины v , α , Ω . Последние же два кинематических соотношения (104) после этого легко превратить в квадратуры от координат $\{x, y\}$.

С другой стороны, поскольку по крайней мере величина скорости центра масс постоянна, у системы (8)–(10) имеется аналитический первый интеграл, позволяющий с дополнительным первым интегралом также проинтегрировать полную систему шестого порядка.

6.10.2. Существование аналитического интеграла

В силу (76) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (8)–(10), а именно функция фазовых переменных

$$\Phi_0(v, \alpha, \Omega) = v^2 + \sigma^2\Omega^2 - 2\sigma\Omega v \sin \alpha = v_c^2 \quad (112)$$

постоянна на фазовых траекториях.

При невырожденной замене независимого переменного у системы (77)–(80) также существует аналитический интеграл, а именно функция фазовых переменных

$$\Phi_1(v, \alpha, \omega) = v^2(1 + \sigma^2\omega^2 - 2\sigma\omega \sin \alpha) = v_c^2 \quad (113)$$

постоянна на фазовых траекториях.

Равенство (113) позволяет, не решая системы (78)–(80), найти зависимость скорости центра пластины от других фазовых переменных, а именно при $v_c \neq 0$

$$v^2 = v_c^2(1 + \sigma^2\omega^2 - 2\sigma\omega \sin \alpha)^{-1}.$$

Поскольку фазовое пространство $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$ системы (78)–(80) трёхмерно и, как будет показано ниже, в нём существуют асимптотические предельные множества, то равенство (113) задаёт единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (78)–(80) во всём фазовом пространстве. Аналогичным образом первый интеграл (112) — последний аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (8)–(10) во всём пространстве.

Ниже будет разобран вопрос существования второго (дополнительного) первого интеграла системы (78)–(80).

Фазовое пространство системы (78)–(80) расслаивается на поверхности $\{v_c = \text{const}\}$ подобно тому, как это происходит в случае, когда $v \equiv \text{const}$.

6.11. Начало качественного анализа.

Точки покоя систем и стационарные движения

У системы третьего порядка (8)–(10) существуют точки покоя, которые заполняют одномерные многообразия. В силу того что система (78)–(80) редуцировалась к подсистеме второго порядка, в фазовом пространстве последней точки покоя могут являться проекциями целых фазовых траекторий трёхмерного фазового пространства.

Поэтому вопрос об особых точках разбивается на два: о точках покоя системы (78)–(80) в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ и о точках покоя укороченной системы (79), (80) на двумерном фазовом цилиндре $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$ или на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$.

6.11.1. Точки покоя системы третьего порядка

Особые точки трёхмерного пространства будут заданы системами

$$\alpha = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0, \quad v = v_1, \quad (114)$$

$$\alpha = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0, \quad v = v_2, \quad (115)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0, \quad v = v_3, \quad (116)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = -\frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0, \quad v = v_4, \quad (117)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0, \quad v = v_5. \quad (118)$$

Здесь $\{v_i\}_{i=1}^5$ — набор положительных постоянных. Системы (114)–(118) задают в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ одномерные многообразия (прямые), сплошь заполненные точками покоя системы (78)–(80).

Механическая интерпретация точек покоя, заданных системами (117), (118), совпадает с механической интерпретацией точек покоя системы (68), при этом $W \equiv C$; механическая интерпретация точек покоя, заданных системами (114),

(115), также рассмотрена выше. Точки покоя, заданные системой (116), интерпретируются следующим образом: тело движется поступательно, параллельно пластине.

6.11.2. Точки покоя системы второго порядка

Рассмотрим укороченную систему (79), (80). У неё существуют положения равновесия на фазовой плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$, которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0, \quad (119)$$

$$\alpha = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0, \quad (120)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0, \quad (121)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = -\frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0, \quad (122)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0. \quad (123)$$

Неособых фазовых траекторий, проектирующихся на плоскость на точки, задаваемые системами (119)–(123), не существует.

Предложение 6.12. У систем вида (78)–(80) в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ для любой функции \mathcal{F} , удовлетворяющей условию (15), не существует частных решений вида

$$\alpha = \alpha_1(q) \equiv \alpha^0 = \text{const},$$

$$\omega = \omega_1(q) \equiv \omega^0 = \text{const},$$

$$v = v_1(q) \neq v^0 = \text{const}.$$

Из предложения 6.12 немедленно следует предложение 6.13.

Предложение 6.13. У системы (79), (80) при условии (15) все точки покоя лежат на прямых $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \sin 2\alpha = 0\}$.

Другими словами, точки покоя, заданные системами (119)–(123), исчерпывают всё множество точек покоя систем вида (79), (80).

Замечание. Поскольку аналитический первый интеграл (113) не зависит от выбора \mathcal{F} , предложение 6.13 верно для всех систем вида (79), (80) при условии (15).

Замечание. Поскольку изоклины вертикального и горизонтального направлений пересекаются в точках покоя трансверсально, можно показать, что при любой достаточно малой деформации векторного поля (79), (80) предложения 6.12 и 6.13 останутся в силе.

6.12. Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа

6.12.1. Топологическая классификация особых точек укороченной системы

Топологический анализ исследуемой системы начнём с классификации особых точек. Далее, как и ранее,

$$n_0^2 = \frac{\mathcal{F}'(0)}{I}.$$

1. Точки покоя, задаваемые системой (119), являются отталкивающими: при $\sigma n_0 < 2$ они являются неустойчивыми фокусами, при $\sigma n_0 = 2$ — неустойчивыми вырожденными узлами, а при $\sigma n_0 > 2$ — неустойчивыми узлами.
2. Точки покоя, задаваемые системой (120), являются притягивающими: при $\sigma n_0 < 2$ они являются устойчивыми фокусами, при $\sigma n_0 = 2$ — устойчивыми вырожденными узлами, а при $\sigma n_0 > 2$ — устойчивыми узлами.
3. Точки покоя, задаваемые системой (121), являются седлами.
4. Точки покоя, задаваемые системами (122), (123), не являются гиперболическими, поскольку матрица линеаризованной системы около них имеет собственные числа, лежащие на мнимой оси. Таким образом, линеаризованное векторное поле около точек (122), (123) не позволяет говорить о характере устойчивости данных точек. Имеем проблему различения центра и фокуса [13].

Предложение 6.14. Для системы уравнений (79), (80), рассмотренной при условии (15), особые точки, задаваемые системами (122), (123), имеют топологический тип центра.

Для систем вида (82), (83) ниже будет получен первый интеграл в явном виде. Таким образом, будет получен дополнительный первый интеграл для системы (81)—(83).

6.12.2. Расслоения фазового пространства и его симметрии

Фазовые траектории системы (78)—(80) лежат на поверхностях, расслаивающих трёхмерное фазовое пространство и являющихся двумерными цилиндрами. В частности, если существует во всём фазовом пространстве дополнительный первый интеграл системы (78)—(80), то он является функцией переменных (α, ω) , а поэтому задаёт семейство цилиндров в $\mathbb{R}_+^1 \{v\} \times \mathbb{R}^2 \{\alpha, \omega\}$.

Замечание. Для полного решения вопроса о поднятии траекторий в трёхмерное фазовое пространство необходимо выяснить знак проекции векторного поля на ось p в пространстве $\mathbb{R}^3 \{p, \alpha, \omega\}$ или на ось v в области $\{(v, \alpha, \omega) \in \mathbb{R}^3 : v > 0\}$.

Рассмотрим поверхность \mathcal{M} , являющуюся объединением поверхностей:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \bar{\mathcal{M}},$$

где

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ (p, \alpha, \omega) \in \mathbb{R}^3 : \omega = \frac{1}{I} \mathcal{F}(\alpha) \right\},$$

а $\bar{\mathcal{M}}$, в свою очередь, представляется в виде

$$\bar{\mathcal{M}} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_i, \quad \mathcal{M}_i = \left\{ (p, \alpha, \omega) \in \mathbb{R}^3 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi i \right\}.$$

Перечисленные поверхности являются цилиндрами, делящими фазовое пространство на области, в каждой из которых проекция векторного поля на ось p имеет определённый знак. На самой поверхности \mathcal{M} (и только на ней) проекция поля на ось p обращается в нуль.

Замечание. Для векторных полей систем вида (79), (80) при условии (15) справедлива центральная симметрия.

У векторного поля системы (79), (80) (как и у поля системы (72)) существует некоторая зеркальная симметрия. Она состоит в том, что относительно замены переменных

$$\begin{pmatrix} -\pi/2 - \alpha + \pi k \\ \omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\pi/2 + \alpha + \pi k \\ \omega \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ω -составляющая поля меняет знак, а α -составляющая остаётся неизменной.

6.13. О существовании дополнительного трансцендентного интеграла

Система (78)–(80) обладает аналитическим интегралом (113). Это единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл во всём фазовом пространстве. Если же дополнительный интеграл продолжить в комплексную область, то точки, которые являются устойчивыми или неустойчивыми фокусами (узлами), станут для него существенно особыми. Действительно, в этих точках дополнительный интеграл не имеет предела как функция. Кроме того, что он является трансцендентной функцией, он почти никогда не выражается через элементарные функции.

Система (81)–(83) является частным представителем класса систем вида (78)–(80), но уже для неё справедлив тот факт, что вопрос о выражении через элементарные функции дополнительного интеграла нетривиален [212, 232, 272].

Дальнейший материал частично уже приводился в разделе 2. Несмотря на это, автор счёл нужным рассмотреть данный материал более подробно.

Поставим в соответствие системе (82), (83) дифференциальное уравнение

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{-n_0^2 \tau + \sigma \omega [\omega^2 - n_0^2 \tau^2]}{\omega + \sigma n_0^2 \tau + \sigma \tau [\omega^2 - n_0^2 \tau^2]}, \quad \tau = -\sin \alpha.$$

Введём обозначения: $C_1 = 2 - \sigma n_0$, $C_2 = \sigma n_0$, $C_3 = -2 - \sigma n_0$. Совершая ряд замен переменных по формулам

$$\omega - n_0 \tau = u_1, \quad \omega + n_0 \tau = v_1, \quad u_1 = v_1 t_1, \quad v_1^2 = p_1,$$

где $v_1 \neq 0$, получим уравнение типа Бернулли:

$$2p_1 \left[C_1 t_1 + C_2 + \frac{2\sigma}{n_0} t_1 p_1 \right] = \frac{dp_1}{dt_1} [C_3 - C_1 t_1^2].$$

Известной заменой $p^{-1} = q_1$ при $p_1 \neq 0$ приведём последнее уравнение к форме

$$q_1' = a_1(t_1)q_1 + a_2(t_1),$$

где

$$a_1(t_1) = \frac{2(C_1 t_1 + C_2)}{C_1 t_1^2 - C_3}, \quad a_2(t_1) = \frac{4\sigma t_1}{n_0(C_1 t_1^2 - C_3 - 3)}.$$

(Точкой здесь обозначена производная по t_1 .) Общее решение линейного однородного уравнения представится в виде

$$q_{1 \text{ одн}}(t_1) = k(C_1 t_1^2 - C_3)Q(t_1), \quad k = \text{const},$$

где функция Q в зависимости от значения постоянной C_1 имеет вид

$$Q(t_1) = \begin{cases} e^{t_1}, & C_1 = 0, \\ e^{2 \frac{C_2}{\sqrt{-C_1 C_3}} \arctg \sqrt{-\frac{C_1}{C_3}} t_1}, & C_1 > 0, \\ \left(\frac{\sqrt{-C_1 t_1} + \sqrt{-C_3}}{\sqrt{-C_1 t_1} - \sqrt{-C_3}} \right)^{\frac{C_2}{\sqrt{C_1 C_3}}}, & C_1 < 0. \end{cases}$$

Для получения решения неоднородного уравнения будем считать величину k функцией t_1 , которая найдётся квадратурой

$$k(t_1) = \frac{4\sigma}{n_0} \int Q^{-1}(t_1) \frac{t_1}{(C_1 t_1^2 - C_3)^2} dt_1.$$

Таким образом, дополнительный интеграл системы (82), (83) примет вид

$$Q^{-1}(t_1)q_1(C_1 t_1^2 - C_3)^{-1} - \frac{4\sigma}{n_0} \int_{t_0}^{t_1} Q^{-1}(\tau_1) \frac{\tau_1}{(C_1 \tau_1^2 - C_3)^2} d\tau_1 = C,$$

где $C = \text{const}$.

Как видно, окончательный вид первого интеграла зависит от знака постоянной C_1 , в результате чего возможны три варианта. Разберём каждый из них.

ПЕРВЫЙ ВАРИАНТ. $C_1 = 0$. После элементарного вычисления получим дополнительный интеграл в виде

$$e^{-\frac{u_1}{v_1}} \left(v_1^{-2} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{u_1}{v_1} + 1 \right) \right) = \text{const}. \quad (124)$$

Итак, первый интеграл (124) системы (82), (83) при $C_1 = 0$ выражается через элементарные функции. Докажем, что этот интеграл может быть получен из первого интеграла системы (73) при $A_1^2 - 4A_2 = 0$. Действительно, переходя в равенстве (124) к переменным $\{\alpha, \Omega\}$ имеем при $\sigma n_0 = 2$

$$\exp \left\{ -\frac{\Omega - n_0 v \sin \alpha}{\Omega + n_0 v \sin \alpha} \right\} \left(\frac{\sigma^2 \Omega^2 + 2\sigma \Omega v \sin \alpha + v^2}{(\Omega + n_0 v \sin \alpha)^2} \right) = \text{const}. \quad (125)$$

Числитель, стоящий в квадратных скобках, в силу (112) является постоянной функцией на фазовых траекториях системы (78)–(80). Поэтому, рассматривая степень (-2) от равенства (125), заключаем, что следующее равенство вновь выполнено на фазовых траекториях системы (78)–(80):

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{\Omega - n_0 v \sin \alpha}{\Omega + n_0 v \sin \alpha} \right\} [\Omega + n_0 v \sin \alpha] = \text{const.} \quad (126)$$

Умножая (126) на $e^{3/2}$, мы не нарушаем последнее равенство на исследуемых фазовых траекториях. При этом показатель экспоненты примет вид

$$\frac{2\Omega + n_0 v \sin \alpha}{\Omega + n_0 v \sin \alpha}.$$

С другой стороны, рассматривая систему координат Кёнига, в которой ось Cx выбрана вдоль вектора скорости центра масс \mathbf{v}_c , имеем кинематические соотношения

$$v \cos \alpha = -V_c \cos \phi, \quad -v \sin \alpha = V_c \sin \phi - \sigma \Omega,$$

которые записаны в исходных фазовых координатах v , α , Ω , ϕ . В такой системе координат Кёнига уравнение движения получившегося физического маятника, помещённого в поток среды, эквивалентно системе

$$\phi' = y + 2n_0 V_c \sin \phi, \quad y' = -n_0^2 V_c^2 \sin \phi \cos \phi \quad (127)$$

(здесь учитывается, что $\sigma n_0 = 2$).

Система (127), в силу наличия дополнительного первого интеграла у системы (73) при $A_1^2 - 4A_2 = 0$, имеет первый интеграл вида

$$\exp \left\{ \frac{n_0 V_c \sin \phi}{\Omega + n_0 V_c \sin \phi} \right\} [\Omega + n_0 V_c \sin \phi] = \text{const.}$$

Это равенство выполнено на фазовых траекториях системы (127) и эквивалентно равенству

$$\exp \left\{ \frac{2\Omega + n_0 v \sin \alpha}{\Omega + n_0 v \sin \alpha} \right\} [\Omega + n_0 v \sin \alpha] = \text{const},$$

которое совпадает с равенством (126). Верна следующая теорема.

Теорема 6.3. *Первый интеграл динамической системы, описывающий физический маятник, постоянен на фазовых траекториях системы (82), (83).*

Аналогичным образом теорема может быть доказана и для случая $\sigma n_0 \neq 2$.

ВТОРОЙ ВАРИАНТ. $C_1 > 0$. Интегрирование приводит к функции

$$-\frac{\sigma}{4n_0} e^{-2\frac{C_2}{\sqrt{-C_1 C_3}} \zeta} \left(\frac{C_2}{\sqrt{-C_1 C_3}} \sin 2\zeta + \cos 2\zeta \right) + \text{const},$$

где

$$\zeta = \text{arctg} \sqrt{-\frac{C_1}{C_3}} t_1.$$

Как видно, в случае $C_1 > 0$ дополнительный первый интеграл выражается через элементарные функции (см. также [107]).

ТРЕТИЙ ВАРИАНТ. $C_1 < 0$. Эквивалентными преобразованиями интеграл преобразуется к виду

$$\frac{\sigma}{C_1 C_2 n_0} \left(2 \frac{\zeta^{1-\gamma}}{\gamma-1} - 3 \frac{\zeta^{-\gamma}}{\gamma} + \frac{\zeta^{-1-\gamma}}{\gamma+1} \right) + \text{const},$$

где

$$\gamma = \frac{C_2}{\sqrt{C_1 C_3}} > 1, \quad \zeta = \frac{\sqrt{-C_1} t_1 + \sqrt{-C_3}}{\sqrt{-C_1} t_1 - \sqrt{-C_3}}.$$

Поэтому и в случае $C_1 < 0$ дополнительный первый интеграл выражается через элементарные функции.

Таким образом, верны следующие следствия из теоремы 6.3.

Следствие 6.13. Точки покоя системы (82), (83), задаваемые равенствами (122), (123), имеют топологический тип центра.

Следствие 6.14. У системы (82), (83) на фазовом цилиндре $\mathbb{R}^1\{\omega\} \times \mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$ не существует простых и сложных предельных циклов.

В заключение этого раздела хотелось бы отметить безусловный факт, что явное нахождение первого интеграла системы (82), (83) позволяет исследовать качественную структуру разбиения на траектории системы на фазовом цилиндре $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$. Несмотря на это, такое исследование можно провести и качественными методами, которые предлагаются в следующем разделе (см. также [2, 7]).

6.14. Топологическое строение фазовых портретов системы на двумерном цилиндре

6.14.1. Введение в топологическую классификацию фазовых портретов

Ранее была проведена топологическая классификация точек покоя системы (79), (80).

В разделе 4.6 (лемма 4.12) доказаны существование и единственность траекторий, уходящих на бесконечность [277]. α - и ω -предельными множествами таких траекторий являются бесконечно удалённые точки $(k\pi, \pm\infty)$, $k \in \mathbb{Z}$, и только они.

В разделе 4.2 при помощи метода топографической системы Пуанкаре показано отсутствие замкнутых кривых из траекторий как в полосе Π , так и в полосе Π' (лемма 4.7). Таким образом, вокруг точек $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, замкнутые кривые из траекторий отсутствуют. В силу 2π -периодичности фазового портрета, а также центральной его симметрии замкнутые кривые из траекторий могут существовать одновременно лишь вокруг точек

$$(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{\sigma}\right),$$

сумма индексов которых равна 1. Но и последняя возможность отпадает в силу обладания системой (79), (80) некоторой зеркальной симметрией.

Доказывая методом ТСП (см. раздел 4.2) лемму 4.7, выясняем, что сепаратриса, входящая в седло $(\frac{\pi}{2}, 0)$, имеет в качестве α -предельного множества начало координат. В силу наличия двух видов симметрий поведение других аналогичных сепаратрис подобно только что описанному, и ключевым вопросом топологической классификации является вопрос о поведении сепаратрисы, выходящей из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π . Назовём данную сепаратрису *ключевой*.

6.14.2. О предельных множествах ключевой сепаратрисы

Как уже отмечалось, на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ точки $(2\pi l, 0)$, $l \in \mathbb{Z}$, являются отталкивающими, а точки $((2l+1)\pi, 0)$ — притягивающими. Точки $(\frac{\pi}{2} + \pi l, 0)$ являются седлами, а поэтому обладают асимптотическими кривыми — сепаратрисами; каждое седло имеет две входящие в него сепаратрисы и две — выходящие из него. На прямых

$$\Lambda_i = \left\{ (\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi i \right\}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

точки покоя с ненулевой ординатой имеют топологический тип центра [276].

Построение фазового портрета системы (79), (80) опирается на исследование глобального качественного поведения ключевой сепаратрисы. Исследуя изоклины, можно утверждать, что возможны три варианта: искомая сепаратриса будет иметь в качестве ω -предельного множества бесконечно удалённую точку $(-\infty, -\infty)$; она трансверсально пересечёт прямую $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = 0\}$ и дальше уйдёт в полосу Π ; огибая точку покоя, являющуюся центром, она вернётся в точку $(-\frac{\pi}{2}, 0)$. Покажем, что при некоторых условиях возможны все три варианта [232, 272].

Введём общее семейство полос:

$$\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\},$$

при этом введённые ранее полосы имеют вид $\Pi_{(-\pi/2, \pi/2)} = \Pi$ и $\Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)} = \Pi'$.

Лемма 6.1. *Зафиксируем значение $n_0 > 0$. Рассмотрим сепаратрисы, выходящие из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π , для различных двух значений $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$ ($\sigma_1 < \sigma_2$) системы (79), (80). Тогда там, где данные сепаратрисы, соответствующие значениям σ_1 и σ_2 в полосе Π , одновременно можно задать в виде графиков*

$$\omega = \Sigma_i(\alpha), \quad i = 1, 2,$$

справедливо неравенство

$$\Sigma_2(\alpha) < \Sigma_1(\alpha).$$

Лемма 6.2. *Пусть при некотором безразмерном значении $(\sigma n_0)_*$ в полосе $\Pi_{(-\pi, 0)}$ для системы (79), (80) справедлива гомоклиническая ситуация: сепаратриса, выходящая из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π , войдёт в ту же точку. Тогда при*

любом $\sigma n_0 > (\sigma n_0)_*$ для системы (79), (80) подобная гомоклиническая ситуация сохранится.

Лемма 6.3. Для любого фиксированного n_0 найдётся достаточно малое $\bar{\sigma}$, такое что для любого $\sigma < \bar{\sigma}$ для системы вида (79), (80) сепаратриса, выходящая из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π , трансверсально пересечёт прямую $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \alpha = \frac{\pi}{2}\}$ в точке (α, ω^*) при некотором $\omega^* > 0$ и войдёт в седло $(\frac{3}{2}\pi, 0)$.

Лемма 6.4. Для любой функции $\mathcal{F} \in \Phi$ найдётся σ^* , такое что для любого $\sigma > \sigma^*$ для систем вида (79), (80) в полосе $\Pi_{(0, \pi)}$ справедлива гомоклиническая ситуация.

Итак, для любой фиксированной функции $\mathcal{F} \in \Phi$ при некоторых значениях σn_0 реализуются все три возможных случая поведения сепаратрисы, выходящей из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π . Причём для фиксированного n_0 при малых σ , меньших некоторого σ^* , искомая сепаратриса войдёт в точку $(\frac{\pi}{2}, 0)$, при $\sigma = \sigma^*$ уйдёт на бесконечность, а при $\sigma > \sigma^*$ будет справедлива гомоклиническая ситуация, отмеченная в лемме 6.2.

Заметим, что в силу строгого свойства монотонности значение σ^* единственное, а указанные перестройки ω -предельного множества происходят монотонным образом. Более общие утверждения см. в разделе 4.

6.14.3. Топологическая классификация фазовых портретов системы.

Замечания об относительной структурной устойчивости

Фазовый портрет системы (79), (80) реализуется в трёх различных топологических типах.

Случай 1. Пусть ω -предельным множеством для сепаратрисы, выходящей из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π , является точка $(\frac{3}{2}\pi, 0)$. Тогда сепаратриса, выходящая из точки $(\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π , войдёт в точку $(-\frac{3}{2}\pi, 0)$. Таким образом, существует односвязная область на фазовом цилиндре, границей которой являются только что упомянутые сепаратрисы, внутри которой почти все неособые траектории выходят из отталкивающих точек и входят в притягивающие. Вне же упомянутой области картина разбиения на траектории следующая. Ввиду существования и единственности траектории, уходящей на бесконечность, траектория, имеющая в качестве α -предельного множества точку $(-\pi + 0, -\infty)$, будет иметь в качестве ω -предельного множества точку $(-0, -\infty)$, а также будет ограничивать область, содержащую континуум замкнутых траекторий вокруг точки $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{\sigma})$. В остальной области, ввиду регулярности векторного поля системы, будут существовать замкнутые траектории, не стягиваемые в точку по фазовому цилиндру. Фазовый портрет для этого случая изображён на рис. 4.

Случай 2. Пусть ω -предельным множеством для сепаратрисы, выходящей из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π , является бесконечно удалённая точка $(-0, -\infty)$.

Тогда из бесконечно удалённой точки $(+0, +\infty)$ протянется траектория, входящая в полосу $\Pi_{(0, \pi)}$ в точку $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Последние две сепаратрисы ограничат область, сплошь заполненную неизолрованными замкнутыми траекториями, содержащими внутри себя особую точку $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma})$. Почти все остальные траектории выйдут из отталкивающих точек и войдут в притягивающие. Фазовый портрет для этого случая изображён на рис. 5.

Случай 3. Пусть в полосе $\Pi_{(-\pi, 0)}$ реализуется вышеупомянутая гомоклиническая ситуация (лемма 6.4). Тогда существуют и единственны траектории в соответствующих полосах, выходящие (входящие) из отталкивающих точек (в притягивающие точки) и имеющие в качестве ω - (α -) предельных множеств бесконечно удалённые точки. В остальной области для поля системы траектории достраиваются аналогично случаям 1 и 2. Фазовый портрет для этого случая изображён на рис. 6.

Системы вида (79), (80) при условии (15) относительно структурно устойчивы в следующем смысле. С учётом параметров σ , n_0 топологическая эквивалентность портретов строится в зависимости от самого типа портрета. Структурная устойчивость понимается относительно класса функций Φ .

6.14.4. Пример: оценка для безразмерного параметра, при котором происходит перестройка топологических типов фазовых портретов системы

Для оценки постоянной $(\sigma n_0)^*$ (см. вывод после леммы 6.4) для системы частного вида (82), (83) исследуем поведение ключевой сепаратрисы, которая выходит из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π .

В силу монотонной зависимости векторного поля системы (82), (83) от параметра σ справедлива следующая теорема.

Теорема 6.4. *Постоянная величина $(\sigma n_0)^*$, при которой происходит перестройка топологического типа фазового портрета системы (82), (83), удовлетворяет неравенству $(\sigma n_0)^* < 2$.*

Следствие 6.15. *Фазовый портрет системы (82), (83) при $\sigma n_0 \geq 2$ изображён на рис. 6.*

Таким образом, уже при некотором значении $\sigma n_0 < 2$ реализуется третья возможность фазового портрета системы (82), (83) (рис. 6).

6.15. Механическая интерпретация некоторых особых фазовых траекторий

На фазовых портретах (см. рис. 4–6) при некоторых начальных условиях существует особая фазовая траектория, которая при стремлении независимого параметра q к некоторому значению q_0 уходит на бесконечность. К примеру,

в области $\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \omega > 0\}$ существует траектория, которая при $q \rightarrow q_0$ стремится к бесконечно удалённой точке $(0, +\infty)$.

Сделаем обратный переход от независимого параметра q к времени t . Поскольку $\Omega = \omega v$, в области $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \omega > 0\} \cap \Pi$, где данная траектория уходит на бесконечность, проекция векторного поля системы на ось v отрицательна.

Предложение 6.15. *Траектория, уходящая на бесконечность в пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$, параметризованная натуральным параметром q , в пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\Omega\}$ является замкнутой траекторией. Разрыв исследуемой траектории в пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\Omega\}$ при $t = t_0$ произошёл из-за того, что якобиан замены независимого переменного q обращается в нуль при $t = t_0$.*

Таким образом, на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$ траекторией центра пластины при рассматриваемых начальных условиях является циклоида с точкой возврата.

Что касается механической интерпретации других фазовых траекторий, то она может быть проведена не методом интегрирования кинематических соотношений, а либо изучением поверхностей уровня первого интеграла системы, либо качественным интегрированием и интерпретацией траекторий на фазовом цилиндре $\mathbb{S}^2\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\Omega\}$ (см. рис. 3). Последние траектории легко интерпретируются, поскольку они описывают движение физического маятника в потоке среды. Остаётся лишь добавить переносную скорость \mathbf{v}_c движения твёрдого тела и получить явную картину распределения скоростей в теле при абсолютном движении.

Данный раздел фактически подготовил качественный материал для исследования самого интересного в прикладном отношении случая движения — свободного торможения твёрдого тела в сопротивляющейся среде. Следующий раздел освещает многие динамические эффекты такого движения на базе качественных результатов, полученных в данном разделе, и фактически является введением в задачу о свободном торможении.

7. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией с ненулевым средним в плоской динамике твёрдого тела

Проводится исследование самого интересного в прикладном отношении класса движений твёрдого тела — свободного торможения в сопротивляющейся среде. Данный материал фактически представляет собой введение в нелинейную задачу о свободном торможении. Получены некоторые частные решения полной системы, подготовлен материал для проведения качественного интегрирования динамических уравнений в пространстве квазискоростей. Получено новое двухпараметрическое семейство фазовых портре-

тов на двумерном цилиндре. Показано, что полученное семейство состоит из бесчисленного множества фазовых портретов с различными качественными свойствами.

7.1. Начало качественного анализа.

Точки покоя систем второго и третьего порядков

В фазовом пространстве $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ системы (86), (87) точки покоя могут являться проекциями неособых фазовых траекторий трёхмерного фазового пространства. У системы (85)–(87) существуют положения равновесия, которые заполняют одномерные многообразия.

Поэтому вопрос о точках покоя разбивается на два: о точках покоя системы (85)–(87) в фазовом пространстве $\mathbb{R}^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ и о точках покоя укороченной системы (86), (87) на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ или на цилиндре $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$.

7.1.1. Точки покоя системы третьего порядка

Искомые точки покоя будут заданы системами с параметрами v_1, v_2, v_3 :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}; \quad \omega = 0; \quad v = v_1, \quad (128)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}; \quad \omega = -\frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0; \quad v = v_2, \quad (129)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}; \quad \omega = \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0; \quad v = v_3. \quad (130)$$

Здесь параметры v_1, v_2, v_3 — положительные числа.

Системы (128)–(130) задают в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ одномерные многообразия (прямые), сплошь заполненные точками покоя системы (85)–(87) (ср. [230, 272]).

7.1.2. Механическая интерпретация точек покоя трёхмерного фазового пространства

1. Система (128). Тело совершает поступательное движение в любую сторону с любой постоянной скоростью, параллельной пластине.

2. Системы (129), (130). Квадрат скорости центра масс найдётся из равенства

$$v_c^2(v, \omega, \alpha) = v^2(1 + \sigma^2\omega^2 - 2\sigma\omega \sin \alpha).$$

Поскольку

$$v_c^2\left(v_2, \frac{1}{\sigma}, \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) = v_c^2\left(v_3, -\frac{1}{\sigma}, -\frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) = 0, \quad l \in \mathbb{Z},$$

то центр масс неподвижен. Так как

$$\left| \frac{d\phi}{dt} \right| = \frac{v_k}{\sigma}, \quad k = 2, 3,$$

то тело вращается вокруг неподвижного центра масс с произвольной постоянной скоростью.

7.1.3. Тривиальные и нетривиальные точки покоя системы второго порядка на плоскости

У системы (86), (87) существуют точки покоя на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$, которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \omega = 0, \quad (131)$$

$$\alpha = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \omega = 0, \quad (132)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}; \quad \omega = 0, \quad (133)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}; \quad \omega = -\frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0, \quad (134)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}; \quad \omega = \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0. \quad (135)$$

Системы (133), (134), (135) и только они задают на фазовой плоскости точки покоя, в которые ортогонально проектируются многообразия положений равновесия.

Следовательно, системы (131), (132) задают точки, в которые ортогонально проектируются частные решения вида

$$\begin{aligned} v(q) &= v^0 e^{-\frac{B}{m}q}, \quad v_0 = v(0), \\ \alpha(q) &\equiv \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \omega(q) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (136)$$

Механическая интерпретация частных решений (136) следующая: тело совершает прямолинейное поступательное движение с углом атаки, равным либо 0, либо π . При этом скорости всех точек тела, в силу соотношения

$$\frac{d}{dt}v = v \frac{d}{dq}v,$$

убывают со временем как t^{-1} .

Ввиду простоты механической интерпретации стационарных движений точек покоя (131)–(135) последние называются тривиальными положениями равновесия. Наряду с тривиальными положениями равновесия могут существовать точки покоя, соответствующие нетривиальным частным решениям системы (85)–(87).

Определение. Нетривиальными положениями равновесия (НПР) системы (86), (87) на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ называются точки покоя, не лежащие на прямых

$$\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega \sin \alpha \cos \alpha = 0\}.$$

7.1.4. Нетривиальные положения равновесия системы второго порядка, соответствующие нетривиальным частным решениям

Рассмотрим систему (89), (90) для простоты. Аналогично может быть рассмотрена система (86), (87). Необходимым условием существования НПР является их выражение системами

$$\begin{aligned} \omega &= -a \sin \alpha, \\ \cos \alpha &= \frac{-\frac{B}{m} + \sqrt{\frac{B^2}{m^2} + 4\sigma a(1 + \sigma a)(a^2 - n_0^2)}}{2\sigma(n_0^2 - a^2)}, \end{aligned} \quad (137)$$

$$\begin{aligned} \omega &= -a \sin \alpha, \\ \cos \alpha &= \frac{-\frac{B}{m} - \sqrt{\frac{B^2}{m^2} + 4\sigma a(1 + \sigma a)(a^2 - n_0^2)}}{2\sigma(n_0^2 - a^2)}, \end{aligned} \quad (138)$$

причём либо

$$a = a_+ = \frac{n_0}{2}(-\sigma n_0 + \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}),$$

либо

$$a = a_- = \frac{n_0}{2}(-\sigma n_0 - \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}).$$

Следствие 7.1. При $\sigma n_0 < 2$ НПР не существуют.

Замечание. Если у системы (86), (87) существуют НПР, то они удовлетворяют уравнению

$$\omega^2 + \frac{1}{I}g(\alpha) \sin \alpha - \frac{\sigma}{I}\omega g(\alpha) = 0, \quad (139)$$

где

$$g(\alpha) = \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha}.$$

В частности, если выполнено свойство (16), то $g(\alpha) = AB \sin \alpha$.

Рассмотрим

$$\max_{\alpha \in (0, \pi)} \frac{g(\alpha)}{\sin \alpha} = \max_{\alpha \in (0, \pi)} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} = g^*.$$

Введём обозначение $\frac{g^*}{I} = n^2$ (при выполнении свойства (16) $n^2 = n_0^2$). Дискриминант уравнения (129) отрицателен, если

$$\sigma n < 2. \quad (140)$$

Таким образом, у системы (86), (87) при условиях (140), (15), (13) не существуют НПР. При выполнении условия (16) условие (140), как уже отмечалось, эквивалентно $\sigma n_0 < 2$.

Учитывая (140), рассмотрим для простоты систему (89), (90) при условии, что $\sigma n_0 \geq 2$.

Предложение 7.1.

1. Если

$$\frac{B}{m} > -\frac{n_0^2}{a_+},$$

то у системы (89), (90) существуют НПР, которые задаются системой (137) при $a = a_-$.

2. Если выполнены неравенства

$$\frac{B}{m} \leq 2\sigma(n_0^2 - a_+^2), \quad \frac{B^2}{m^2} \geq 4\sigma a_+(1 + \sigma a_+)(n_0^2 - a_+^2),$$

то у системы (89), (90) существуют НПР, которые задаются системой (137) при $a = a_+$.

3. Если выполнены неравенства

$$\frac{B}{m} > 2\sigma(n_0^2 - a_+^2), \quad \frac{B^2}{m^2} \geq 4\sigma a_+(1 + \sigma a_+)(n_0^2 - a_+^2), \quad \frac{B}{m} > -\frac{n_0^2}{a_+},$$

то у системы (89), (90) существуют НПР, которые задаются системой (137) при $a = a_+$.

4. Если выполнены неравенства

$$\frac{B}{m} < 2\sigma(n_0^2 - a_+^2), \quad \frac{B^2}{m^2} \geq 4\sigma a_+(1 + \sigma a_+)(n_0^2 - a_+^2), \quad \frac{B}{m} < -\frac{n_0^2}{a_+},$$

то у системы (89), (90) существуют НПР, которые задаются системой (138) при $a = a_+$.

5. Условия 1—4 являются необходимыми и достаточными для существования НПР.

Следствие 7.2. У системы (86), (87) при условиях (15), (13) существуют частные решения вида

$$\begin{aligned} v(q) &= v^0 e^{\kappa q}, \quad v = v^0(0), \quad \kappa < 0, \\ \alpha(q) &\equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha(0), \\ \omega(q) &\equiv \omega_0, \quad \omega_0 = \omega(0). \end{aligned}$$

Следствие 7.3. У системы (8)—(10), (104) при условиях (15), (13) существуют частные решения вида

$$v(t) = \frac{v_0}{1 - v_0 \kappa t}, \quad v_0 = v(0),$$

$$\alpha(t) \equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha(0),$$

$$\Omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{\Omega_0}{1 - v_0 \kappa t}, \quad \Omega_0 = \Omega(0),$$

при этом

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{\Omega_0}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t), \quad \phi_0 = \phi(0),$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\Omega_0} \sin(\alpha_0 + \phi_0) - \frac{v_0}{\Omega_0} \sin \left[\alpha_0 + \phi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t) \right], \quad x_0 = x(0),$$

$$y(t) = y_0 - \frac{v_0}{\Omega_0} \cos(\alpha_0 + \phi_0) + \frac{v_0}{\Omega_0} \cos \left[\alpha_0 + \phi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t) \right], \quad y_0 = y(0).$$

Следствие 7.4. Траектория центра пластины при движении на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$, соответствующая последним частным решениям системы (8)–(10), — окружность с центром в точке

$$\left(x_0 + \frac{v_0}{\Omega_0} \sin(\alpha_0 + \phi_0), y_0 - \frac{v_0}{\Omega_0} \cos(\alpha_0 + \phi_0) \right)$$

и радиусом $\frac{v_0}{\Omega_0}$.

7.2. Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа

7.2.1. Топологическая классификация тривиальных положений равновесия укороченной системы на плоскости

Для простоты рассмотрим возле точки (α_0, ω_0) систему (89), (90).

Введём два безразмерных параметра:

$$\mu_1 = 2 \frac{B}{m n_0}, \quad \mu_2 = \sigma n_0.$$

Предложение 7.2.

1. Точки покоя (129) всегда являются репеллерами: неустойчивыми фокусами, если $\mu_2 < 2$; неустойчивыми узлами, если $\mu_2 > 2$; неустойчивыми вырожденными узлами, если $\mu_2 = 2$.
2. Точки покоя (132) являются: сёдлами, если $\mu_1(2\mu_2 - \mu_1) > 4$; репеллерами, если $\mu_2 < \mu_1$, $\mu_1(2\mu_2 - \mu_1) < 4$; аттракторами, если $\mu_2 > \mu_1$, $\mu_1(2\mu_2 - \mu_1) < 4$, причём при выполнении последних двух групп условий данные точки покоя являются фокусами, если $\mu_2 < 2$, и узлами, если $\mu_2 > 2$.
3. Точки покоя (133) являются сёдлами.

4. Точки покоя (134), (135) всегда являются аттракторами: устойчивыми фокусами, если $\mu_1\mu_2 < 4$; устойчивыми узлами, если $\mu_1\mu_2 > 4$; устойчивыми вырожденными узлами, если $\mu_1\mu_2 = 4$.

7.2.2. Расслоения фазового пространства и его симметрии

Поскольку можно отделить от системы третьего порядка (85)–(87) независимую подсистему второго порядка (86), (87), фазовые траектории в $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ лежат на поверхностях, являющихся двумерными цилиндрами. В частности, если во всём фазовом пространстве существует первый интеграл системы (86), (87), то он является функцией переменных (α, ω) , а поэтому задаёт семейство цилиндров в $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$.

Замечание. Поскольку

$$\frac{d}{dt}\phi = v \frac{d}{dq}\phi,$$

то в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ системы (8)–(10) данному первому интегралу будет соответствовать первый интеграл, который зависит от всех трёх фазовых переменных.

Благодаря вышеописанной редукции, удобнее строить фазовый портрет системы (85)–(87) в $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ с помощью фазового портрета системы (86), (87) в $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$. Последний не будет являться частью портрета в $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ в теоретико-множественном смысле, а будет ортогональной проекцией фазового портрета на плоскость $\{v = \text{const}\}$.

Поэтому становятся возможными поднятие фазовых траекторий с плоскостей в пространство $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ и получение трёхмерных фазовых портретов искомой системы.

Замечание. Поскольку $v > 0$, то движение возможно лишь в области $B = \{(\alpha, \omega, v) \in \mathbb{R}^3 : v > 0\} \subset \mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, v\}$.

Если формально сделать замену переменных в области B по формуле $\bar{p} = \ln v$, то полученное векторное поле в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$ не зависит от \bar{p} , т. е. имеет цилиндрическую природу более высокого порядка и ортогонально проектируется на всё семейство плоскостей $\{v = \text{const}\}$. При этом положения равновесия на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ полностью совпадают с объединением как проекций многообразий особых точек, так и проекций неособых фазовых траекторий области B.

Замечание. Для полного решения вопроса о поднятии траекторий в трёхмерное фазовое пространство необходимо выяснить знак проекции векторного поля в $\mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$ на ось \bar{p} или на ось v в области B.

Рассмотрим поверхность $\mathcal{M} = \mathcal{M}^0 \cup \bar{\mathcal{M}}$, являющуюся объединением поверхностей, где

$$\mathcal{M}^0 = \{(\alpha, \omega, v) \in B : \Psi(\alpha, \omega) \cos^{-1} \alpha = 0\}$$

(там, где $\cos \alpha = 0$, доопределим поверхность по непрерывности), а $\bar{\mathcal{M}}$, в свою очередь, представляется в виде

$$\bar{\mathcal{M}} = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_s,$$

где

$$\mathcal{M}_s = \{(\alpha, \omega, \nu) \in \mathcal{B} : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi s\}.$$

Перечисленные поверхности являются цилиндрами, которые разрезают фазовое пространство на области, в каждой из которых проекция векторного поля на ось $\bar{\rho}$ имеет фиксированный знак.

На самой поверхности \mathcal{M} (и только на ней) проекция векторного поля на ось ν обращается в нуль.

Замечание. Для любых $\mathcal{F} \in \Phi$, $s \in \Sigma$ векторное поле системы (86), (87) обладает свойством центральной симметрии относительно точек $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. в координатах (α, ω) векторное поле меняет направление при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -\omega \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Другими словами, векторное поле системы (85)–(87) обладает симметрией относительно лучей $\{(\alpha, \omega, \nu) \in \mathcal{B} : \alpha = \pi k, \omega = 0\}$.

7.3. Классификация фазовых портретов системы на двумерном цилиндре для первой области параметров

7.3.1. Введение в классификацию фазовых портретов

Изобразим диаграмму перестроек векторного поля системы (86), (87) возле точки $(\pi, 0)$ (рис. 44). Поведение поля системы возле этой точки определяет многие основные топологические особенности глобального фазового портрета.

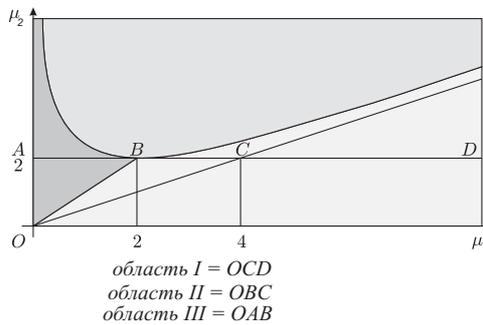


Рис. 44. Диаграмма перестроек векторного поля системы

Будем изучать те динамические системы, которые допускают выполнение равенства (139) лишь на тривиальных положениях равновесия. Более того, мы будем для простоты предполагать, что выполнено неравенство (140) для любых $\mathcal{F} \in \Phi$, $s \in \Sigma$. Последнее неравенство, как уже указывалось, трансформируется в $\sigma n_0 < 2$, если $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \in \Phi$, $s = s_0 \in \Sigma$.

Поэтому в общем пространстве физически допустимых параметров

$$M^2 = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2: \mu_1 > 0, \mu_2 > 0\}$$

в основном будем изучать область

$$J^2 = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2: \mu_1 > 0, 0 < \mu_2 < 2\} \subset M^2.$$

Для проведения классификации фазовых портретов системы на плоскости или цилиндре необходимо ответить на следующие вопросы.

1. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве α - и ω -предельных множеств бесконечно удалённые точки. Лемма 4.13 доказывает существование и единственность траекторий, уходящих на бесконечность. Их α - и ω -предельными множествами являются бесконечно удалённые точки $(\pi k, \pm\infty)$, $k \in \mathbb{Z}$. В этой лемме показано, что только эти точки обладают указанным свойством.

2. Из-за рассмотрения динамических систем на цилиндре — наличие замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий, не стягиваемых по цилиндру в точку. При естественных предположениях предложение 4.1 (когда выполнены все условия леммы 4.9) даёт ясную информацию о взаимном расположении фазовых кривых систем (86), (87) и (79), (80). Легко показать, что при этом у системы (86), (87) отсутствуют замкнутые фазовые характеристики, огибающие фазовый цилиндр.

3. Существование замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых по цилиндру в точку. В частности, существование неизолированных периодических траекторий или предельных циклов. Заметим, что в силу 2π -периодичности векторного поля системы по α последняя задача сводится к отысканию замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий лишь вокруг точек покоя индекса 1.

4. Основным вопросом классификации портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющих гиперболических седел. Данные сепаратрисы разделяют всю фазовую плоскость на области без положений равновесия. Поэтому фазовые портреты мгновенно достраиваются.

Ответ на последний вопрос требует доказательства ряда вспомогательных утверждений, которые будут рассмотрены ниже.

Замечание. Области параметров для любых $\mathcal{F} \in \Phi$, $s \in \Sigma$ определим следующим образом:

область I:

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in J^2: \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} \geq \frac{\sigma}{I} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\sin \alpha} \text{ для всех } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\};$$

область II:

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in J^2: \text{существует } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ для которого} \right. \\ \left. \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} < \frac{\sigma}{I} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\sin \alpha}, \text{ при этом } (\pi, 0) \text{ — репеллер} \right\};$$

область III:

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in J^2: \text{существует } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ для которого} \right. \\ \left. \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} < \frac{\sigma}{I} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\sin \alpha}, \text{ при этом } (\pi, 0) \text{ — аттрактор} \right\};$$

область IV:

$$\{(\mu_1, \mu_2) \in M^2: (\pi, 0) \text{ — седло}\}.$$

Заметим, что если $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $s = s_0$, то области параметров I, II, III совпадают с областями I, II, III, показанными на рис. 44.

7.3.2. Разбиение на траектории фазового цилиндра системы для первой области параметров

Рассмотрим систему (86), (87) в области параметров I.

Следующее утверждение относится ко всему пространству параметров M^2 и базируется на наличии топографической системы Пуанкаре в полосе II.

Предложение 7.3. Устойчивая сепаратриса в полосе II для точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ имеет в качестве α -предельного множества начало координат.

Предложение 7.3 доказывается методом ТСП (см. раздел 4).

Следствие 7.5. Ввиду центральной симметрии поля поведение других аналогичных сепаратрис подчиняется аналогичным законам.

Следствие 7.6. У системы (86), (87) в полосе II не существует никаких замкнутых кривых, составленных из траекторий.

Предложение 7.4. Рассмотрим систему (86), (87) в области параметров I. Пусть $\mathcal{F}(\alpha) \sin \alpha \geq 0$ в полосе II. Тогда если

$$\frac{s(\alpha)}{m} \geq \frac{\sigma}{I} \hat{g}(\alpha),$$

где

$$\hat{g}'(\alpha) = -2\mathcal{F}(\alpha), \quad \hat{g}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

то ТСП с центром в точке $(\pi, 0)$ полностью лежит в области, ограниченной нетривиальной кривой контактов (см. предложение 4.2).

Следствие 7.7. Пусть выполнено условие (16). Тогда очевидно, что в области параметров I выполнено неравенство

$$\frac{B}{m} \geq \sigma n_0^2 \cos \alpha \quad \text{для всех } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

При этом $\hat{g}(\alpha) = AB \cos^2 \alpha$. Таким образом, при $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ мы необходимо попадаем в условия предложения 7.4.

Предложение 7.5. Пусть выполнены все условия предложения 7.4. Тогда по крайней мере в области значений параметров I сепаратриса, входящая в точку $(\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π' , имеет в качестве α -предельного множества точку $(\pi, 0)$.

7.3.3. Топологическое строение типов фазовых портретов для первой области параметров

Рассмотрим вопрос о поведении сепаратрис, выходящих из точек $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π и из $(\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π' . Результат, касающийся поведения этих сепаратрис, распространяется на динамические системы в той части области параметров M^2 , в которой не существуют НПР (в частности, в области J^2). Для этого дадим определение индекса сепаратрисного поведения.

Определение. Индексом сепаратрисного поведения (будем обозначать его ispr) называется пара $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, где

$$\mathbf{k}_1 \in \mathbb{N}_0 \cup \left\{1 + \frac{1}{4}, l \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

При этом значение \mathbf{k}_2 выбирается неоднозначно и может быть равно

$$\mathbf{k}_2 = \begin{cases} \mathbf{k}_1 - \frac{1}{2}, & \text{если } \mathbf{k}_1 \in \mathbb{N}, \\ \mathbf{k}_1 + \frac{1}{2}, & \text{если } \mathbf{k}_1 \in \mathbb{N}_0, \\ \mathbf{k}_1 - \frac{1}{4}, & \text{если } \mathbf{k}_1 \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

и

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 + \frac{1}{4}, \quad \text{если } \mathbf{k}_1 \notin \mathbb{N}_0.$$

Здесь и далее $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. По определению $\text{ispr} = \mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, если сепаратриса, выходящая из $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π , имеет в качестве ω -предельного множества точку, отстоящую от точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ на $2\pi\mathbf{k}_1$ по оси α , а сепаратриса, выходящая из точки $(\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π' , имеет в качестве ω -предельного множества точку, отстоящую от $(\frac{\pi}{2}, 0)$ на $2\pi\mathbf{k}_2$ по оси α .

Последнее определение опирается на тот факт, что сепаратрисы, выходящие из точек $(\frac{\pi}{2} + 2\pi l, 0)$, $l \in \mathbb{Z}$, лежат в области, частью границы которой являются сепаратрисы, выходящие из точек $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi l, 0)$, для каждого фиксированного $l \in \mathbb{Z}$.

Теорема 7.1. Для любого $\text{ispr} = \mathbf{k}$ из области определения возможно соответствующее поведение рассматриваемых сепаратрис.

Прежде чем доказывать теорему 7.1, приведём несколько вспомогательных утверждений. Предложение 7.6 характеризует поведение сепаратрисы системы (79), (80) при наличии «возмущения», дающего систему (86), (87).

Предложение 7.6. *Возмущение системы (79), (80), дающее систему (86), (87), расщепляет сепаратрису системы (79), (80), выходящую из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π и входящую в точку $(\frac{3\pi}{2}, 0)$.*

Введём обозначения:

$$B^* = \max_{\alpha \in \mathbb{R}} |s(\alpha)|, \quad \mu^* = 2 \frac{B^*}{m n_0}.$$

При $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $s = s_0$ очевидны равенства

$$B^* = B, \quad \mu^* = \mu_1.$$

Предложение 7.7. *Для любого $M > 0$ и достаточно малого значения $\mu_2 > 0$ найдётся $\varepsilon > 0$, такое что для любого положительного значения $\mu^* < \varepsilon$ сепаратриса, выходящая из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π , продолжится вправо вдоль оси α более чем на M .*

Заметим, что введение параметра μ^* для каждой фиксированной функции s никоим образом не вводит каких-либо ограничений на пространства функций Φ , Σ и пространство параметров M^2 .

Начнём **доказательство** теоремы 7.1. Рассмотрим сепаратрису, выходящую из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π . Фазовый поток исследуемой системы отображает часть прямой Λ_{-1} на прямую Λ_1 . (Здесь, как и раньше, $\Lambda_k = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k\}$.) Итак, рассмотрим отображение прямой Λ_{-1} на Λ_1 . Для системы сравнения (79), (80) с вращениями (см. рис. 4) это отображение, по крайней мере вблизи точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в области $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \omega > 0\}$, тождественно.

Предложение 7.8. *Для системы (86), (87) построенное отображение (там, где оно определено) при выполнении условия (130) таково:*

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \omega_1\right) \rightarrow \left(\frac{3}{2}\pi, \omega_2\right), \quad \omega_1 > \omega_2.$$

Продолжим доказательство теоремы 7.1. Имея в виду непрерывную зависимость отображения, построенного в предложении 7.8, от параметра μ^* , рассмотрим при достаточно малых μ_2 зависимость типа фазового портрета от параметра μ^* .

Предположим, что сепаратриса, выходящая из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π , имеет предельное множество, отстоящее от прямой Λ_{-1} вдоль оси α на $2\pi\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_1 \in \mathbb{N}_0$. Рассмотрим ТСП, задаваемую системой (79), (80), вокруг точки $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi(\mathbf{k}_1 + 1), -\frac{1}{\sigma})$. Эта система (ТСП) ограничена особой траекторией, уходящей на бесконечность (см. рис. 4). Уменьшим параметр μ^* настолько, чтобы точка $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{k}_1, -\frac{1}{\sigma})$ перестала быть ω -предельным множеством для данной

сепаратрисы. Так называемое «отделение» траектории — сепаратрисы — от точки $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{k}_1, -\frac{1}{\sigma})$ к точке $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi(\mathbf{k}_1 + 1), -\frac{1}{\sigma})$ произойдёт в силу того, что угол между векторными полями системы (86), (87) и системы сравнения (79), (80) стремится к нулю при $\mu^* \rightarrow 0$. Случай $\mathbf{k}_1 \in \mathbb{N}_0$ рассмотрен.

Покажем, что при этом \mathbf{k}_2 выбирается из вышеописанного множества (см. определение isр).

Заметим, что возможны три логические ситуации для \mathbf{k}_2 , когда $\mathbf{k}_1 \in \mathbb{N}_0$.

Напомним, что у систем (79), (80) и (86), (87) на фазовом цилиндре существуют бесконечно удалённые предельные точки $(-0, -\infty)$, $(+0, +\infty)$, $(\pi + 0, -\infty)$, $(\pi - 0, +\infty)$, причём две первые притягивающие, а две последние отталкивающие.

Предложение 7.9. *Исследуемая сепаратриса может иметь в качестве ω -предельного множества бесконечно удалённую точку $(-\frac{\pi}{2} + 2(l + \frac{1}{4})\pi - 0, -\infty)$.*

Доказательство. Спроектируем фазовую плоскость на сферу Римана или Пуанкаре [38, 277]. В силу гладкой зависимости исследуемой сепаратрисы от параметра μ^* при том критическом значении параметра, при котором происходит перестройка грубого ω -предельного множества сепаратрисы, новым ω -предельным множеством станет бесконечно удалённая точка (на плоскости) или северный полюс (на сферах Римана или Пуанкаре). Действительно, если бы северный полюс сферы при критическом значении параметра не был бы ω -предельным множеством для данной сепаратрисы, то эта сепаратриса имела бы другое грубое (разобранное выше) ω -предельное множество. Поскольку при малом шевелении последнее ω -предельное множество сохранится, мы имеем противоречие с тем, что критическое значение параметра μ^* соответствует грубому ω -предельному множеству. Предложение доказано. \square

Более общее утверждение, в том числе и о строго монотонных полях, см. в разделе 4 и в [277].

Закончим доказательство теоремы 7.1. Пусть теперь $\mathbf{k}_1 = l + \frac{1}{4}$, $l \in \mathbb{N}_0$. Тогда у сепаратрисы, выходящей из точки $(\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу Π' , нет других ω -предельных множеств, кроме точки

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{k}_2, -\frac{1}{\sigma}\right), \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 + \frac{1}{4}, \quad \mathbf{k}_1 \notin \mathbb{N}_0.$$

Заметим, что данные ω -предельные множества являются грубыми в силу гиперболичности асимптотически устойчивых точек $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi l, -\frac{1}{\sigma})$.

Теперь для доказательства теоремы 7.1 достаточно мало продеформировать параметры μ^* и μ_2 рассматриваемой динамической системы (86), (87).

Действительно, если \mathbf{k}_2 фиксировано, то \mathbf{k}_1 может быть равно $\mathbf{k}_2 \pm \frac{1}{2}$ (грубое ω -предельное множество перемещается) либо (в силу предложения 7.9) $\mathbf{k}_2 + \frac{1}{4}$ (негрубое ω -предельное множество). Теорема 7.1 доказана. \square

7.3.4. Полная классификация фазовых портретов для первой области параметров динамической системы на двумерном цилиндре

Согласно теореме 7.1 можно провести полную классификацию фазовых портретов системы (86), (87), когда её параметры пробегают область I. Как показано выше, таких портретов бесконечно много.

В качестве следствия рассмотрим систему сравнения (79), (80)' для системы (86), (87). Она описывает консервативную систему — физический маятник на плоскости. Тогда среди систем вида (86), (87) достаточно мало отличающихся от (79), (80)', существуют системы с любым из описанных выше типов фазовых портретов. Другими словами, любое достаточно малое возмущение, дающее систему вида (86), (87), бесконечно много раз перестраивает глобальный топологический тип фазового портрета физического маятника.

Некоторые из фазовых портретов (индекс isp пробегает десять первых значений $(0, 1/2)$, $(1/4, 1/2)$, $(1, 1/2)$, $(1, 3/4)$, $(1, 3/2)$, $(5/4, 3/2)$, $(2, 3/2)$, $(2, 7/4)$, $(2, 5/2)$, $(9/4, 5/2)$) показаны на рис. 7—16 соответственно. При этом функции \mathcal{F} и s удовлетворяют условиям (15), (13) и (140).

Дальнейшие возможные значения индекса isp таковы: $(3, 5/2)$, $(3, 11/4)$, $(3, 7/2)$ и т. д.

Таким образом и проводится полная классификация фазовых портретов системы (86), (87) для области параметров I.

Заметим, что многие утверждения данного раздела справедливы и в более широких областях параметров.

В заключение хотелось бы отметить общее свойство движения тела. Рассмотрим область параметров I. Ей соответствует небольшой по сравнению с безразмерной силой безразмерный момент. В этой области почти при любых начальных условиях в смысле меры за конечное достаточно большое время твёрдое тело стремится к экспоненциально устойчивому стационарному движению следующего вида: тело движется вокруг неподвижного центра масс с постоянной угловой скоростью.

В только что изложенном материале начато рассмотрение модельного варианта задачи о свободном плоскопараллельном торможении тела в среде. Проводится вспомогательный качественный анализ систем дифференциальных уравнений, описывающих данное движение тела для некоторой области ненулевой меры в пространстве параметров. На его основе получено новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов, состоящее из бесчисленного множества различных типов портретов. В системе при этом отсутствуют автоколебания, и почти при любых начальных условиях все траектории стремятся к асимптотически устойчивым положениям равновесия. Следующий материал фактически продолжает глобальный качественный анализ динамической системы в пространстве квазискоростей. При этом исследуется другая область ненулевой меры в пространстве параметров системы и получено новое двухпараметрическое семейство фазовых

портретов с предельными циклами. Таким образом, в системе при некоторых условиях могут возникнуть автоколебания.

7.4. Классификация портретов для второй и третьей областей параметров

7.4.1. Вопрос о поведении сепаратрис

Предыдущий материал был изложен достаточно подробно. Далее мы опустим доказательства многих утверждений. Они следуют из качественного материала, подготовленного в предыдущих разделах.

Рассмотрим систему (86), (87) в областях параметров II, III (при этом заменим формально α на $-\alpha$).

Как и ранее, ключевым вопросом классификации портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющихся гиперболических седел.

Напомним, что предельные циклы для исследуемой системы могут существовать лишь в полосе Π' (раздел 4).

Рассмотрим ключевые вопросы о глобальном поведении следующих сепаратрис:

- а) выходящей из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу II;
- б) входящей в точку $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$ из полосы $\Pi_{(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})}$;
- в) выходящей из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ в полосу $\Pi_{(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})}$.

Под независимостью поведения сепаратрис будем понимать тот факт, что рассматриваемые сепаратрисы имеют предельные множества, независимо выбираемые из области определения возможных предельных множеств сепаратрис. Область определения предельных множеств сепаратрис — все логически возможные предельные множества сепаратрис, возникающие в качестве «кандидатов» на истинные предельные множества после принятия во внимание возможного расположения изоклин системы и характера имеющихся особых точек.

Лемма 7.1. *Глобальное поведение любых двух сепаратрис из а)–в) независимо. Поведение третьей сепаратрисы определяется через поведение двух других.*

Выберем в качестве пары ключевых сепаратрис, поведение которых независимо, сепаратрисы а) и б).

Определение. Индексом k_1 сепаратрисы а) назовём рациональное число, выбираемое из множества

$$\left\{ r \in \mathbb{Q} : r = m, r = \frac{1}{4} + m, m \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Скажем, что $k_1 = r$, если сепаратриса а) имеет в качестве ω -предельного множества точку $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi r, \frac{1}{\sigma})$, если $r \in \mathbb{N}_0$, и точку $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi r - 0, +\infty)$, если $r \notin \mathbb{N}_0$.

Определение. Индексом k_2 сепаратрисы б) назовём натуральное число j , выбираемое из множества

$$\{j \in \mathbb{N}: j = 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Скажем, что $k_2 = j$, если сепаратриса б) имеет в качестве α -предельного множества точку $(-\pi, 0)$ или цикл, если $j = 1$; точку $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, если $j = 2$; точку $(0, 0)$, если $j = 3$; точку $(-\pi - 0, -\infty)$, если $j = 4$; точку $(-2\pi, 0)$, если $j = 5$.

Таким образом видно, что поведение сепаратрисы в) зависит от индексов k_1 и k_2 , т. е. от конкретного поведения сепаратрис а) и б).

Замечание. Если фиксировать индекс k_1 , то индекс k_2 может, в частности, выбираться из более узкого множества, описанного в предыдущем определении. Прямое произведение множеств, описанных в двух предыдущих определениях, является максимальным в смысле возможного определения пары индексов k_1 и k_2 .

7.4.2. Основная теорема о классификации фазовых портретов

Обозначим через k_2^* индекс k_2 в том случае, если последний выбирается из усечённой области определения в связи с последним замечанием, и составим прямое произведение индексов k_1 и k_2^* . Для этого рассмотрим индекс $\mathbf{k} = (k_1, k_2^*)$.

Теорема 7.2. *Для любого \mathbf{k} из области определения возможно соответствующее поведение сепаратрис а) и б). Таким образом, строится двупараметрическое семейство фазовых портретов, содержащее портреты с предельными циклами, а также бесконечное множество фазовых портретов с различными качественными свойствами.*

Теорема позволяет сделать следующий вывод: любое достаточно малое возмущение, дающее искомую систему в областях параметров II, III, для системы, описывающей физический маятник на плоскости, бесконечно много раз перестраивает глобальный тип гамильтонова фазового портрета физического маятника.

Некоторые из портретов (индекс \mathbf{k} принимает значения $(0, 1)^*$, $(0, 3)^*$, $(0, 4)^*$, $(0, 2)^*$, $(0, 1)$, $(0, 3)$, $(0, 2)$, $(1/4, 3)^*$) показаны соответственно на рис. 17–24.

Двупараметрическое семейство, построенное в [234, 274, 278, 283], не содержит предельных циклов, в отличие от только что построенного семейства. Но эти два семейства объединяет тот факт, что каждой независимой паре безразмерных параметров μ_1, μ_2 соответствует пара независимых индексов (в данном случае k_1, k_2^*), «кодирующих» топологический тип фазового портрета. В последнем случае надо сделать оговорку на имеющиеся в семействе портреты с предельными циклами. Такие портреты могут иметь топологические типы, отличные от портретов с теми же индексами \mathbf{k} , но без предельных циклов. В последнем случае можно как-то метить индексы \mathbf{k} и говорить о помеченных

фазовых портретах (например, в случае цикла имеем индекс $(k_1, k_2)^*$: фазовый портрет, изображённый на рис. 17, имеет помеченный индекс $(0, 1)^*$).

7.5. Строение фазового портрета системы для четвёртой области параметров

7.5.1. Строение наиболее «богатого» на положения равновесия фазового портрета

В зависимости от выполнения того или иного свойства из предложения 7.1 у системы (86), (87) имеется «больше» или «меньше» дополнительных особых точек на фазовом цилиндре, отвечающим НПР. В каждом конкретном случае наличие таких точек и их устойчивость исследуется отдельно.

Для той подобласти параметров из области IV, когда существуют НПР, задаваемые обеими системами ((137) и (138)), фазовый портрет показан на рис. 45.

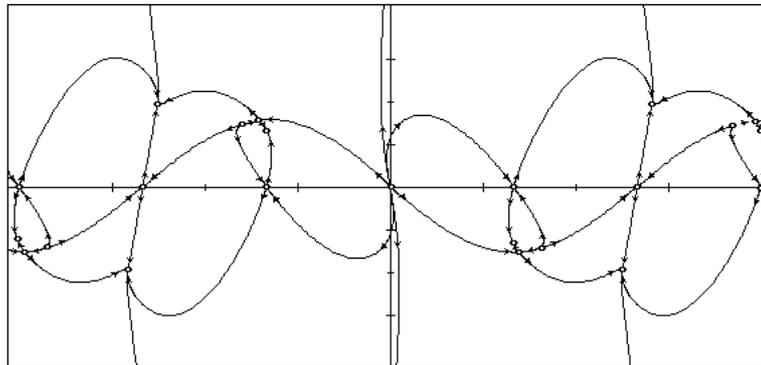


Рис. 45. Портрет системы при наличии достаточно большого числа положений равновесия

Предложение 7.10. У системы (86), (87), рассмотренной в области параметров IV, имеются НПР, лежащие лишь в полосе Π' , соответствующие как отталкивающим или притягивающим, так и седловым особым точкам.

Таким образом, предложение 7.10 затрагивает тот случай, когда у исследуемой системы существует максимальное возможное значение дополнительных особых точек.

В любом случае НПР соответствуют частным решениям системы (8)–(10), (104), которые выражаются через формулы из следствия 7.3.

Таким образом, последние частные решения системы (8)–(10), (104) могут быть как орбитально устойчивыми, так и орбитально неустойчивыми.

Продолжая качественный анализ, заметим, что если рассматривать систему (86), (87) в области параметров IV, то периодических траекторий, стягиваемых по фазовому цилиндру в точку, не существует.

Будем исследовать вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющих гиперболических седёл.

Заметим, что в области

$$W = \{(\alpha, \omega) \in \Pi' : \omega > 0\}$$

существует три НПП системы (86), (87) ($\alpha \rightarrow -\alpha$): одно положение равновесия отталкивающее, одно — притягивающее и одно — седловое.

Предложение 7.11.

1. Устойчивая сепаратриса в полосе Π для точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ имеет в качестве α -предельного множества начало координат.
2. Неустойчивая сепаратриса в полосе Π для точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ имеет в качестве ω -предельного множества точку $(-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma})$.
3. Устойчивая сепаратриса в полосе Π' для точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ имеет в качестве α -предельного множества отталкивающее НПП в области W .
4. Неустойчивая сепаратриса в полосе Π' для точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ имеет в качестве ω -предельного множества притягивающее НПП в области $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\} \setminus W$.
5. Устойчивая сепаратриса в полосе $\Pi_{(-\pi, -\pi/2)}$ для точки $(-\pi, 0)$ имеет в качестве α -предельного множества отталкивающее НПП в области W .
6. Неустойчивая сепаратриса в полосе $\Pi_{(-\pi, -\pi/2)}$ для точки $(-\pi, 0)$ имеет в качестве ω -предельного множества притягивающее НПП в области W .
7. Две устойчивые сепаратрисы для седлового НПП в области W имеют в качестве α -предельных множеств начало координат и отталкивающее НПП в области W .
8. Две неустойчивые сепаратрисы для седлового НПП в области W имеют в качестве ω -предельных множеств точку $(-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma})$ и притягивающее НПП в области W .

Вопрос о предельных множествах других ключевых траекторий решается, благодаря предложению 7.11, очевидным образом (см. рис. 45).

7.5.2. Классы траекторий движения твёрдого тела на плоскости

В соответствии с глобальным фазовым портретом (см. рис. 45) типичные траектории движения точки D твёрдого тела на плоскости делятся на следующие классы.

Неустойчивое стационарное движение твёрдого тела с нулевым углом атаки (центр масс сзади), а также неустойчивое стационарное движение, соответствующее отталкивающему НПП, имеют следующие предельные движения:

- 1) тело асимптотически стремится к вращению с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижного центра масс;

- 2) тело асимптотически стремится к стационарному движению, соответствующему притягивающему НПР.

В заключение хотелось бы отметить тот факт, что рассмотренные классы движений (поскольку динамическая система в пространстве квазискоростей абсолютно структурно устойчива) обладают важным свойством (абсолютной) грубости. Область физических параметров системы при этом обладает достаточно «большой» ненулевой мерой.

8. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним в пространственной динамике твёрдого тела

В данном разделе рассматриваются возможности перенесения результатов плоской динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой, на пространственный случай. Анализируются задачи о сферическом маятнике, помещённом в поток набегающей среды, о пространственном движении тела при наличии некоторой неинтегрируемой связи, а также показываются механические и топологические аналогии последних двух задач.

8.1. Постановка задачи о пространственном движении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании

Гипотезы, приведённые в [178, 179] (см. также [57, 100, 104, 249]) и касающиеся свойств среды, нашли своё отражение в построении пространственной динамической модели взаимодействия среды с телом. В этой связи появляется возможность формализации модельных предположений и получение полной системы уравнений.

1. Всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму выпуклой плоской области P (рис. 46).

2. Поскольку взаимодействие происходит по законам струйного обтекания, сила \mathbf{S} этого взаимодействия направлена по нормали к области, причём точка N приложения этой силы определяется лишь одним параметром — углом атаки α , который измеряется между вектором скорости \mathbf{v} точки D пластины и внешней нормалью в этой точке (прямая CD). Точка D является пересечением срединного перпендикуляра, опущенного из центра масс C на плоскость P . Таким образом, $DN = R(\alpha)$.

3. Примем, что величина силы сопротивления S имеет вид

$$S = s_1 v^2,$$

где v — модуль скорости точки D , а коэффициент сопротивления s_1 (как и в плоском случае, см. (13)) является функцией только угла атаки α : $s_1 = s_1(\alpha)$.

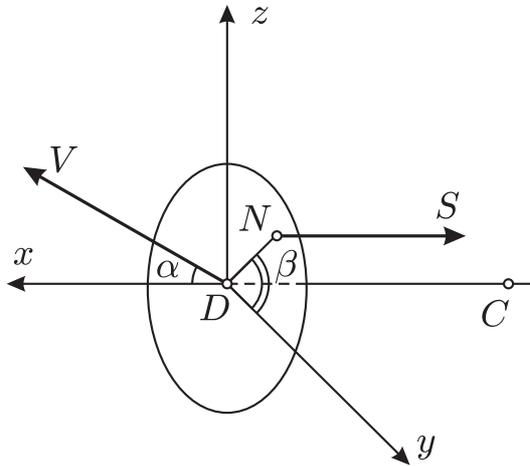


Рис. 46. Пространственная модель динамического воздействия среды на тело

Таким образом, по-прежнему будем рассматривать такое «расширение» задачи, о котором упоминалось в разделе 1.

4. Как и в плоском случае, по прямой CD на тело может действовать дополнительная сила \mathbf{T} , которую по-прежнему назовём «силой тяги». Введение этой силы используется для обеспечения некоторых заданных классов движений (при этом \mathbf{T} — реакция возможных наложенных связей). В случае отсутствия внешней силы \mathbf{T} тело совершает пространственное свободное торможение в сопротивляющейся среде (см. раздел 9).

5. Связанную с телом систему координат обозначим через $Dxyz$. Эта система координат, связанная с точкой D , выбирается таким образом, что тензор инерции в данной системе имеет диагональный вид: $\text{diag}\{I_1, I_2, I_3\}$. Распределение масс примем таким, что продольная главная ось инерции совпадает с осью CD (это ось Dx), а оси Dy и Dz лежат в плоскости P и образуют правую систему координат. Более того, будем рассматривать случай *динамически симметричного твёрдого тела*, т. е. $I_2 = I_3$.

6. В данном случае для описания положения тела в пространстве выберем декартовы координаты (x_0, y_0, z_0) точки D и три угла (θ, ψ, ϕ) , которые определяются подобно навигационным углам следующим образом.

Поворот от системы $Dx_0y_0z_0$ к системе $Dxyz$ представим в виде композиции трёх поворотов $T_3(\phi)T_2(\psi)T_1(\theta)$, при которых сначала репер $(\mathbf{e}_{x_0}, \mathbf{e}_{y_0}, \mathbf{e}_{z_0})$ поворачивается вокруг вектора \mathbf{e}_{x_0} на угол θ (выполняется $T_1(\theta)$):

$$(\mathbf{e}_{x_0}, \mathbf{e}_{y_0}, \mathbf{e}_{z_0}) \xrightarrow{T_1(\theta)} (\mathbf{e}_{x_0}, \mathbf{e}_{y_0}^{(1)}, \mathbf{e}_{z_0}^{(1)}),$$

затем репер $(\mathbf{e}_{x_0}, \mathbf{e}_{y_0}^{(1)}, \mathbf{e}_{z_0}^{(1)})$ поворачивается вокруг вектора $\mathbf{e}_{y_0}^{(1)}$ на угол ψ (выполняется $T_2(\psi)$):

$$(\mathbf{e}_{x_0}, \mathbf{e}_{y_0}^{(1)}, \mathbf{e}_{z_0}^{(1)}) \xrightarrow{T_2(\psi)} (\mathbf{e}_{x_0}^{(2)}, \mathbf{e}_{y_0}^{(1)}, \mathbf{e}_z),$$

и в заключение репер $(\mathbf{e}_{x_0}^{(2)}, \mathbf{e}_{y_0}^{(1)}, \mathbf{e}_z)$ поворачивается вокруг вектора \mathbf{e}_z на угол ϕ (выполняется $T_3(\phi)$):

$$(\mathbf{e}_{x_0}^{(2)}, \mathbf{e}_{y_0}^{(1)}, \mathbf{e}_z) \xrightarrow{T_3(\phi)} (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z).$$

При этом векторы, имеющие компоненты в репере $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, получают новые координаты в базисе $(\mathbf{e}_{x_0}, \mathbf{e}_{y_0}, \mathbf{e}_{z_0})$. Такое преобразование будет задано в базисе $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi & -\cos \psi \sin \phi & \sin \psi \\ \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \sin \psi \cos \phi & \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \psi \sin \phi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \phi - \cos \theta \sin \psi \cos \phi & \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix},$$

тогда фазовое состояние системы характеризуется двенадцатью величинами: $(x'_0, y'_0, z'_0, \theta; \psi; \phi; x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \phi)$.

Рассмотрим сферические координаты конца вектора скорости точки $D(v, \alpha, \beta)$, в которых угол β отсчитывается от оси Dy в плоскости P до прямой (DN) , которая является пересечением плоскостей, одна из которых содержит вектор \mathbf{v} и ось Dx , а вторая — плоскость P .

Последние сферические координаты, а также компоненты угловой скорости выражаются через фазовые переменные $(x'_0, y'_0, z'_0, \theta; \psi; \phi; \theta, \psi, \phi)$ неинтегрируемыми соотношениями. Поэтому фазовое состояние системы определяется через функции $(v, \alpha, \beta, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \phi)$, а первые шесть функций рассматриваются в качестве квазискоростей системы. Здесь набор величин $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ определяется как

$$\Omega = \Omega_x \mathbf{e}_x + \Omega_y \mathbf{e}_y + \Omega_z \mathbf{e}_z,$$

где Ω — вектор абсолютной угловой скорости твёрдого тела.

Ввиду того что обобщённые силы не зависят от положения тела в пространстве, координаты $(x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \phi)$ являются циклическими. Это позволяет рассматривать динамическую часть уравнений движения как независимую подсистему.

Аналогично плоскому случаю введём знакопеременную вспомогательную функцию

$$s(\alpha) = s_1(\alpha) \operatorname{sign} \cos \alpha.$$

В силу теоремы о движении центра масс в пространстве в проекциях на связанные оси (x, y, z) и теоремы об изменении кинетического момента относительно этих осей получаем полную систему дифференциальных уравнений, рассмотренную в динамическом пространстве квазискоростей $\mathbb{R}_+^1\{\mathbf{v}\} \times \mathbb{T}^2\{\alpha, \beta\} \times \mathbb{R}^3\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$:

$$\begin{aligned}
& \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega_y v \sin \alpha \sin \beta - \Omega_z v \sin \alpha \cos \beta + \\
& + \sigma(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) = \frac{T}{m} - \frac{s(\alpha)}{m} v^2, \\
& \dot{v} \sin \alpha \cos \beta + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta - \dot{\beta} v \sin \alpha \sin \beta + \Omega_z v \cos \alpha - \\
& - \Omega_x v \sin \alpha \sin \beta - \sigma \Omega_x \Omega_y - \sigma \dot{\Omega}_z = 0, \\
& \dot{v} \sin \alpha \sin \beta + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta + \dot{\beta} v \sin \alpha \cos \beta + \\
& + \Omega_x v \sin \alpha \cos \beta - \Omega_y v \cos \alpha - \sigma \Omega_x \Omega_z - \sigma \dot{\Omega}_y = 0, \\
& I_1 \dot{\Omega}_x + (I_3 - I_2) \Omega_y \Omega_z = 0, \\
& I_2 \dot{\Omega}_y + (I_1 - I_3) \Omega_x \Omega_z = -z_N s(\alpha) v^2, \\
& I_3 \dot{\Omega}_z + (I_2 - I_1) \Omega_x \Omega_y = y_N s(\alpha) v^2.
\end{aligned} \tag{141}$$

Координаты точки N в системе $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ примут вид $(0, y_N(\alpha, \beta), z_N(\alpha, \beta))$, где $y_N(\alpha, \beta) = R(\alpha) \cos \beta$, $z_N(\alpha, \beta) = R(\alpha) \sin \beta$.

Систему (141) дополним кинематическими соотношениями:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{1}{\cos \psi} [\Omega_x \cos \phi - \Omega_y \sin \phi], \\
\dot{\psi} &= \Omega_x \sin \phi + \Omega_y \cos \phi, \\
\dot{\phi} &= \Omega_z + \frac{\sin \psi}{\cos \psi} [\Omega_y \sin \phi - \Omega_x \cos \phi], \\
\frac{\dot{x}_0}{v} &= \cos \psi \cos \phi \cos \alpha - \cos \psi \sin \phi \sin \alpha \cos \beta + \sin \psi \sin \alpha \sin \beta, \\
\frac{\dot{y}_0}{v} &= (\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \sin \psi \cos \phi) \cos \alpha + \\
& + (\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \psi \sin \phi) \sin \alpha \cos \beta + \sin \theta \cos \psi \sin \alpha \sin \beta, \\
\frac{\dot{z}_0}{v} &= (\sin \theta \sin \phi - \cos \theta \sin \psi \cos \phi) \cos \alpha + \\
& + (\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \psi \sin \phi) \sin \alpha \cos \beta + \cos \theta \cos \psi \sin \alpha \sin \beta.
\end{aligned} \tag{142}$$

По-прежнему используются следующие обозначения: σ — расстояние DC , m — масса тела.

В динамическую систему (141) входят функции $R(\alpha)$, $s(\alpha)$, для качественного описания которых по-прежнему используем имеющуюся экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания (см. раздел 1). Функция $R(\alpha)$ удовлетворяет условию (11), а $s(\alpha)$ — условию (13).

8.2. Случай движения тела в среде при наличии некоторой неинтегрируемой связи и начало качественного анализа

Как и в плоском случае, будем рассматривать класс движений, при котором выполнено тождество (69), являющееся неголономной связью.

8.2.1. Об аналитическом интеграле

В случае динамически симметричного твёрдого тела система (141) имеет аналитический интеграл

$$\Omega_x \equiv \Omega_{x^0} = \text{const}, \quad (143)$$

т. е. обобщённые силы допускают собственное вращение тела около продольной динамической оси симметрии.

8.2.2. О возникновении независимой подсистемы

Воспользуемся (см. раздел 6) методическим приёмом понижения порядка системы, т. е. выразим из первого уравнения (141) функцию T так, чтобы в силу системы (141) полная производная величины v равнялась нулю. В результате данного понижения порядка у системы (141) возникает независимая подсистема вида

$$\begin{aligned} & \dot{\alpha}v \cos \alpha \cos \beta - \dot{\beta}v \sin \alpha \sin \beta + \\ & + \Omega_z v \cos \alpha - \Omega_{x^0} v \sin \alpha \sin \beta - \sigma \Omega_{x^0} \Omega_y - \sigma \dot{\Omega}_z = 0, \\ & \dot{\alpha}v \cos \alpha \sin \beta + \dot{\beta}v \sin \alpha \cos \beta + \\ & + \Omega_{x^0} v \sin \alpha \cos \beta - \Omega_y v \cos \alpha + \sigma \Omega_{x^0} \Omega_z + \sigma \dot{\Omega}_y = 0, \\ & I_2 \dot{\Omega}_y + (I_1 - I_2) \Omega_{x^0} \Omega_z = -z_N s(\alpha) v^2, \\ & I_2 \dot{\Omega}_z + (I_2 - I_1) \Omega_{x^0} \Omega_y = y_N s(\alpha) v^2, \end{aligned} \quad (144)$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v .

8.2.3. Случай нулевой проекции угловой скорости на продольную ось и случай аналитической системы

Рассмотрим траектории движения системы (144) на уровне интеграла (143) при $\Omega_{x^0} = 0$. При этом она примет вид

$$\begin{aligned} & \dot{\alpha}v \cos \alpha \cos \beta - \dot{\beta}v \sin \alpha \sin \beta + \Omega_z v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega}_z = 0, \\ & \dot{\alpha}v \cos \alpha \sin \beta + \dot{\beta}v \sin \alpha \cos \beta - \Omega_y v \cos \alpha + \sigma \dot{\Omega}_y = 0, \\ & I_2 \dot{\Omega}_y = -\mathcal{F}(\alpha) \sin \beta v^2, \\ & I_2 \dot{\Omega}_z = \mathcal{F} \cos \beta v^2. \end{aligned} \quad (145)$$

Первые два уравнения приводятся к виду

$$\begin{aligned} & \dot{\alpha} \cos \alpha + \Omega_z \cos \alpha \cos \beta - \Omega_y \cos \alpha \sin \beta - \frac{\sigma}{I} v \mathcal{F}(\alpha) = 0, \\ & \dot{\beta} \sin \alpha - \Omega_y \cos \alpha \cos \beta - \Omega_z \cos \alpha \sin \beta = 0. \end{aligned} \quad (146)$$

Если выполнены свойства (12), (14) (или (16)), то, вводя обозначение n_0^2 , как и выше, вместо (146) имеем аналитическую систему ($n_0^2 = AB/I_2$)

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} + \Omega_z \cos \beta - \Omega_y \sin \beta - \sigma n_0^2 v \sin \alpha &= 0, \\ \dot{\beta} \sin \alpha - \Omega_y \cos \alpha \cos \beta - \Omega_z \cos \alpha \sin \beta &= 0,\end{aligned}\quad (147)$$

которую дополним уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_y &= -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta, \\ \dot{\Omega}_z &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta.\end{aligned}\quad (148)$$

Система (147), (148) замкнута. Заметим, что система (147) эквивалентна (146) вне и только вне многообразия

$$\mathcal{O} = \{(\alpha, \beta, \Omega_y, \Omega_z) \in \mathbb{R}^4: \cos \alpha = 0\}.\quad (149)$$

Спроектируем угловую скорость на подвижную систему координат Dz_1z_2 (поворачивая систему Dyz на угол $-\beta$), такую что

$$z_1 = \Omega_y \cos \beta + \Omega_z \sin \beta, \quad z_2 = \Omega_z \cos \beta - \Omega_y \sin \beta.\quad (150)$$

При этом, поскольку $\dot{z}_1 = \dot{\beta} z_2$, система (146) вне и только вне многообразия \mathcal{O}' эквивалентна системе

$$\dot{\alpha} = -z_2 + \sigma \frac{v}{I_2} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha},\quad (151)$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{I_2} v^2 - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \dot{z}_1 &= z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \dot{\beta} &= z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},\end{aligned}\quad (152)$$

где

$$\mathcal{O}' = \{(\alpha, \beta, \Omega_y, \Omega_z) \in \mathbb{R}^4: \sin \alpha \cos \alpha = 0\}.\quad (153)$$

Система (151), (152) при условии (16) примет вид аналитической:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -z_2 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha, \\ \dot{z}_2 &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},\end{aligned}\quad (154)$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \dot{\beta} &= z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.\end{aligned}\quad (155)$$

От динамической системы (145) вне и только вне многообразия \mathcal{O}' отделилась независимая подсистема третьего порядка (151), которая рассматривается не столько на трёхмерном цилиндре $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^2\{z_1, z_2\}$, сколько на касательном расслоении к двумерной сфере (см. раздел 2). Поскольку произошло «отделение» системы третьего порядка, фазовое пространство данной системы уже обладает рядом расслоений [359].

8.2.4. Точки покоя системы и соответствующие им стационарные движения

Множество точек покоя системы (146), которым соответствуют стационарные движения, разбивается на две части.

Во-первых, существуют особые точки

$$\{\alpha = 0 \bmod 2\pi, \Omega_y = \Omega_z = 0\}, \quad (156)$$

соответствующие таким стационарным движениям, при которых тело движется поступательно вдоль прямой CD в ту или иную сторону.

Во-вторых, формально существует двумерное многообразие особых точек \mathcal{O} , которые соответствуют стационарным движениям, освещённым в разделе 6.

8.2.5. О нарушении теоремы единственности

На многообразии \mathcal{O}' нельзя однозначно разрешить систему (145) относительно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$. Формально, на \mathcal{O}' нарушается теорема единственности.

Как упоминалось, вне и только вне \mathcal{O}' система (145) эквивалентна (141). Но фактически теорема единственности нарушается лишь на многообразии $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$, поскольку на $\mathcal{O}' \setminus \mathcal{O}$ векторное поле (151) не определено по причине вырождения сферических координат (v, α, β) точки D . На \mathcal{O} (на котором доопределим систему (151) по непрерывности) нарушение теоремы единственности происходит в следующем смысле: почти через любую точку \mathcal{O} проходит неособая фазовая траектория системы (145), пересекая \mathcal{O} под прямым углом, а также существует фазовая траектория, совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения тяги \mathbf{T} (реакции наложенной связи). Покажем это.

Для поддержания связи вида (69) необходимо выбрать реакцию \mathbf{T} в виде

$$T_v(\alpha, \Omega_y, \Omega_z) = \sigma m(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) + v^2 \left(s(\alpha) - \frac{m\sigma}{I_2} \mathcal{F}(\alpha) \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (157)$$

Если

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha} = L,$$

то при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ нужная величина тяги найдётся из равенства

$$T_v \left(\frac{\pi}{2}, \Omega_y, \Omega_z \right) = \sigma m(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) - \frac{m\sigma}{I_2} L v^2,$$

где величины Ω_y , Ω_z произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью тяги \mathbf{T} вращение вокруг некоторой точки W , необходимо выбрать тягу в виде

$$T_v \equiv \frac{mv^2}{R_0}, \quad (158)$$

где R_0 — расстояние CW . Равенства (157) и (158), вообще говоря, определяют различные значения \mathbf{T} , что и доказывает замечание.

Если $|L| = +\infty$, то мгновенная фазовая скорость возле многообразия \mathcal{O} бесконечна.

8.2.6. Симметрии векторного поля системы в фазовом пространстве квазискоростей

Векторное поле системы (151) обладает тремя видами симметрий:

- 1) центральной симметрией. Такая симметрия возле $(\pi k, 0, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, в пространстве $\mathbb{R}^2\{\alpha, z_2, z_1\}$ возникает по причине того, что векторное поле в координатах (α, z_2, z_1) меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix};$$

- 2) некоторой зеркальной симметрией. Такая симметрия относительно плоскостей Λ_i , $i \in \mathbb{Z}$, где

$$\Lambda_i = \left\{ (\alpha, z_2, z_1) \in \mathbb{R}^3 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi i \right\},$$

возникает по причине того, что α -составляющая векторного поля системы в координатах (α, z_2, z_1) сохраняется при замене

$$\begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i - \alpha \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i + \alpha \\ z_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

а z_2 - и z_1 -составляющие меняют знак;

- 3) симметрией относительно плоскости

$$\{(\alpha, z_2, z_1) \in \mathbb{R}^3 : z_1 = 0\},$$

а именно z_2 - и α -составляющие векторного поля системы сохраняются при замене

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix},$$

а z_1 -составляющая меняет знак.

8.3. О трансцендентной интегрируемости системы

Данный раздел посвящён изучению возможностей полного интегрирования рассматриваемой динамической системы. В нём приводятся первые интегралы системы (154), выражающиеся через элементарные функции, а также обсуждается путь интегрирования общей системы (141) [359, 361].

8.3.1. Теорема о полной интегрируемости

Теорема 8.1. Система (154) обладает полным набором трансцендентных первых интегралов. Система (154), (155) также вполне интегрируема, её два первых интеграла являются первыми интегралами системы (154) [328].

Один из первых интегралов системы (154) будет иметь вид

$$\frac{z_2^2 + z_1^2 - \sigma n_0^2 v \sin \alpha}{z_1 \sin \alpha} = C_1. \quad (159)$$

8.3.2. Замечания об интегрируемости консервативной системы

Систему (154) при $\sigma = 0$ обозначим через (154)'.

Предложение 8.1. Система (154)' является консервативной системой, обладающей двумя первыми интегралами

$$z_1 \sin \alpha = C_1^0, \quad z_1^2 + z_2^2 + n_0^2 v^2 \sin^2 \alpha = C_2^0, \quad C_1^0, C_2^0 = \text{const}. \quad (160)$$

Несмотря на простой характер предложения 8.1, необходимо сделать важное замечание.

Замечание. Очевидно, что отношение двух первых интегралов (160) есть первый интеграл (154)'. Но ни одна из функций (160) (если во второй функции формально вычесть величину $\sigma n_0^2 v z_2 \sin \alpha$, обращающуюся в нуль при $\sigma = 0$) не является первым интегралом (154). Однако отношение последних двух функций является первым интегралом системы (154) при любом σ .

8.3.3. Поиск дополнительных интегралов системы

Поскольку система (154) обладает переменной диссипацией и является аналитической, для неё удаётся в явном виде найти два других дополнительных интеграла. Выполнено тождество

$$u_1 = \frac{1}{2} \{C_1 \pm \mathcal{G}\}. \quad (161)$$

Здесь

$$\mathcal{G} = \sqrt{C_1^2 - 4[u_2^2 - \sigma n_0^2 v u_2 + n_0^2 v^2]}, \quad u_1 = z_1 \tau, \quad u_2 = z_2 \tau, \quad \tau = \sin \alpha$$

(для поиска дополнительных интегралов используется трансцендентный первый интеграл (159)). Квадратура для поиска искомого интеграла, связывающего величины u_2 и τ , имеет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(\sigma n_0^2 v - u_2) du_2}{2[u_2^2 - \sigma n_0^2 v u_2 + n_0^2 v^2] - \frac{C_1}{2}(C_1 \pm \mathcal{G})}. \quad (162)$$

Если

$$w_1 = u_2 - \frac{\sigma n_0^2 v}{2},$$

то правая часть (162) примет вид

$$\int \frac{(\frac{\sigma n_0^2 v}{2} - w_1) dw_1}{2[w_1^2 - n_0^2 v^2 \frac{\sigma^2 n_0^2 - 4}{4}] - \frac{C_1}{2}(C_1 \pm \mathcal{G})}. \quad (163)$$

Величина (163) разбивается на части:

$$\frac{\sigma n_0^2 v}{2} \int_{(1)} - \int_{(2)},$$

где

$$\int_{(1)} = \int \frac{dw_1}{\mathcal{G}_1}, \quad \int_{(2)} = \int \frac{\frac{1}{2} dw_1^2}{\mathcal{G}_1};$$

здесь

$$\mathcal{G}_1 = 2 \left[w_1^2 - n_0^2 v^2 \frac{\sigma^2 n_0^2 - 4}{4} \right] - \frac{C_1}{2}(C_1 \pm \mathcal{G}).$$

Если

$$a = n_0^2 v^2 \frac{\sigma^2 n_0^2 - 4}{4}, \quad \bar{x} = w_1^2, \quad \bar{y}^2 = C_1^2 - 4(\bar{x} - a),$$

то

$$\int_{(2)} = \frac{1}{2} \ln |\bar{y} + C_1| + \text{const.}$$

Далее,

$$\int_{(1)} = \pm \int \frac{d\bar{y}}{(\bar{y} + C_1) \sqrt{C_1^2 - \bar{y}^2 + 4a}}.$$

Пусть для определённости $C_1^2 + 4a \geq 0$. Тогда

$$\int_{(1)} = \pm \frac{1}{n_0^2 v^2 \sqrt{4 - \sigma^2 n_0^2}} \arcsin \frac{C_1 \bar{y} + C_1^2 + n_0^2 v^2 (\sigma^2 n_0^2 - 4)}{(\bar{y} + C_1) \sqrt{C_1^2 + n_0^2 v^2 (\sigma^2 n_0^2 - 4)}} + \text{const.},$$

если $\sigma n_0 < 2$;

$$\int_{(1)} = \mp \frac{1}{C_1(\bar{y} + C_1)} \sqrt{C_1^2 - \bar{y}^2} + \text{const.},$$

если $\sigma n_0 = 2$;

$$\begin{aligned} \mp \int_{(1)} = & -\frac{1}{2n_0^2 v^2 \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}} \ln \left| \frac{n_0 v \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4} + \mathcal{G}_1}{\bar{y} + C_1} + \frac{C_1}{n_0 v \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}} \right| + \\ & + \frac{1}{2n_0^2 v^2 \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}} \ln \left| \frac{n_0 v \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4} - \mathcal{G}_1}{\bar{y} + C_1} + \frac{C_1}{n_0 v \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}} \right| + \text{const.}, \end{aligned}$$

если $\sigma n_0 > 2$.

8.3.4. Поиск второго дополнительного интеграла

Найденный выше дополнительный интеграл системы, являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных, составляет вместе с (159) полный набор первых интегралов системы (154). Для системы (154), (155) необходим ещё один первый интеграл.

Замечание. Везде выше (см. предыдущий пункт) вместо C_1 необходимо вставить левую часть равенства (159).

Для поиска последнего интеграла системы (154), (155) заметим, что раз

$$\frac{dz_1}{d\beta} = z_2,$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta} + [-u_2 + \sigma n_0^2 v] = u_2.$$

Поэтому

$$\frac{du_1}{d\beta} = \pm \sqrt{\sigma^2 n_0^4 v^2 - 4[u_1^2 - C_1 u_1 + n_0^2 v^2]}, \quad (164)$$

а следовательно, искомая квадратура принимает вид

$$\mp \int \frac{du_1}{\sqrt{\sigma^2 n_0^4 v^2 - 4[u_1^2 - C_1 u_1 + n_0^2 v^2]}} = \beta + C_3, \quad C_3 = \text{const.} \quad (165)$$

Левая часть (165) (без знака) имеет вид

$$\frac{1}{2} \arcsin \frac{(u_2 - \frac{\sigma n_0^2 v}{2})^2}{\sqrt{C_1^2 + n_0^2 v^2 (\sigma^2 n_0^2 - 4)}}. \quad (166)$$

После подстановок имеем искомое инвариантное соотношение:

$$\cos^2[2(\beta + C_3)] = \frac{1}{\mathcal{G}_2}, \quad (167)$$

где

$$\mathcal{G}_2 = [u_2^2 - \sigma n_0^2 v]^2 + 2[u_2^2 - \sigma n_0^2 v u_2] [u_1^2 + n_0^2 v^2] + [u_1^2 - n_0^2 v^2]^2 + \sigma^2 n_0^4 v^2 u_1^2.$$

Пример. Если $\sigma n_0 = 2$, то равенство (167) примет вид

$$\cos^2[2(\beta + C_3)] = \frac{(z_2 - n_0 v \sin \alpha) z_1}{(z_2 - n_0 v \sin \alpha)^2 + z_1^2}. \quad (168)$$

Правая часть как нечётная функция от

$$\zeta = \frac{z_2 - n_0 v \sin \alpha}{z_1}$$

имеет при $\zeta = 1$ глобальный максимум, равный $1/2$.

8.3.5. О маятнике с переменной диссипацией

Система (151), (152) также является маятниковой системой с переменной диссипацией с нулевым средним. Движение происходит под действием двух сил: потенциальной

$$\frac{\mathcal{F}(\alpha)}{I_2}$$

и линейной по скорости

$$\sigma \frac{v}{I_2} \alpha' \frac{d}{d\alpha} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha}$$

с переменным коэффициентом. В одном подпространстве этот коэффициент имеет строго положительный знак, поэтому здесь происходит подкачка энергии со стороны среды. В другом подпространстве данный коэффициент имеет строго отрицательный знак. Поэтому сила рассеивает энергию, заставляя тело тормозить своё движение.

Последние замечания показывают (как и в плоском случае), что мы имеем дело с диссипативной *системой с переменной диссипацией с нулевым средним*. Фазовое пространство складывается в объединение чередующихся областей, в каждой из которых присутствует диссипация только одного знака.

Замечание. В случае системы (151), (152) поиск интегралов сводится к интегрированию уравнений Риккати, решения которых в самом общем случае в элементарных функциях не выражаются.

8.4. Задача о пространственном маятнике в потоке набегающей среды

По аналогии с плоским случаем рассмотрим задачу о пространственном маятнике, помещённом в поток набегающей среды.

Пусть выпуклая плоская область закреплена перпендикулярно державке на сферическом шарнире и находится в потоке набегающей среды, который движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}_\infty \neq 0$. Предположим, что державка сопротивления не создаёт (рис. 47).

Суммарная сила \mathbf{S} воздействия потока среды на тело направлена параллельно державке, а точка N приложения этой силы определяется лишь одним параметром — углом атаки α , который измеряется между вектором скорости \mathbf{v}_D точки D относительно потока и державкой. Таким образом, сила \mathbf{S} направлена по нормали в ту сторону от неё, которая противоположна направлению скорости \mathbf{v}_D , и проходит через некоторую точку N плоской области, смещённую от точки D вперёд по отношению к направлению \mathbf{v}_D . Подобные условия возникают при использовании модели струйного обтекания пространственных тел.

Вектор \mathbf{e} определяет ориентацию державки. Тогда

$$\mathbf{S} = s_1(\alpha) \mathbf{v}_D^2 \mathbf{e},$$

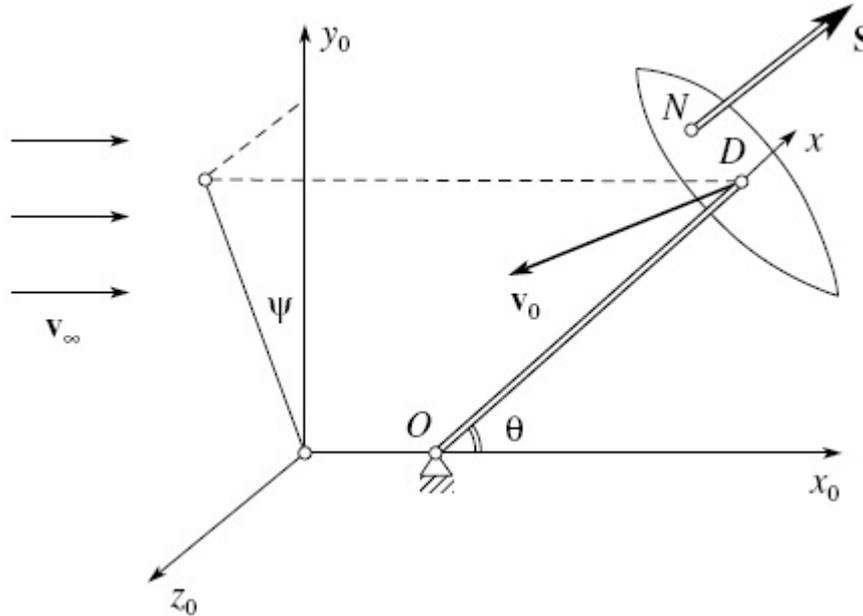


Рис. 47. Сферический маятник в однородном потоке набегающей среды

где коэффициент сопротивления имеет вид

$$s_1 = s_1(\alpha) = s(\alpha) \operatorname{sign} \alpha \cos \alpha.$$

Пусть $Ox_0y_0z_0$ — неподвижная система координат. Направление набегающего потока совпадает с направлением оси x_0 . Свяжем с телом систему координат $Dxyz$, где ось x направлена вдоль державки, а оси y, z жёстко связаны с плоской областью.

Координаты точки N в системе $Dxyz$ имеют вид $(0, y_N, z_N)$. По аналогии с задачей о движении свободного тела вводятся функция $R(\alpha)$, а также угол β , измеряемый в плоскости Dyz . При этом пусть для простоты выполнено свойство (16). Для любой допустимой функции $R(\alpha)$ анализ проводится аналогично.

Если тело динамически симметрично ($I_1, I_2 = I_3$ — главные моменты инерции в системе $Dxyz$), $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ — проекции угловой скорости в системе $Dxyz$, то уравнения движения примут вид, аналогичный (148):

$$\begin{aligned} \Omega'_y &= -n_0^2 v_D^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta, \\ \Omega'_z &= n_0^2 v_D^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \tag{169}$$

Сила сопротивления допускает наличие первого интеграла (143), при этом в уравнениях (169) учитывается условие $\Omega_{x^0} = 0$ (для простоты рассмотрим пока этот случай).

Введём углы (θ, ψ) , определяющие ориентацию маятника. Угол θ будем измерять от оси x_0 до державки, а ψ измеряется от проекции державки на плоскость Oy_0z_0 до оси y_0 . Тогда

$$\cos \theta = \cos \psi \cos \phi, \quad \sin \theta \cos \psi = \cos \psi \sin \phi, \quad \sin \theta \sin \psi = \sin \psi. \quad (170)$$

8.4.1. Полная система уравнений

Соотношения, связывающие (v_D, α, β) и $(\theta, \psi, \Omega_y, \Omega_z)$ (l — длина державки) имеют вид

$$\begin{aligned} v_D \cos \alpha &= -v_\infty \cos \theta, \\ v_D \sin \alpha \cos \beta &= l\Omega_z + v_\infty \sin \theta \cos \psi, \\ v_D \sin \alpha \sin \beta &= -l\Omega_y - v_\infty \sin \theta \sin \psi. \end{aligned} \quad (171)$$

В силу первых трёх соотношений из (142) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\Omega_y \frac{\sin \phi}{\cos \psi}, \\ \dot{\phi} &= \Omega_z + \Omega_y \sin \phi \frac{\sin \phi}{\cos \psi}, \\ \dot{\psi} &= \Omega_y \cos \phi, \end{aligned} \quad (172)$$

откуда легко выводим, что

$$\begin{aligned} \Omega_y &= \frac{\dot{\psi}}{\cos \phi}, \\ \Omega_z &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \frac{\sin \psi}{\cos \psi}. \end{aligned} \quad (173)$$

Используя свойства (170), (173), имеем тождества

$$\begin{aligned} \Omega_y &= \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\psi} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos \psi, \\ \Omega_z &= \dot{\theta} \cos \psi - \dot{\psi} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \sin \psi. \end{aligned} \quad (174)$$

Уравнения из (169), (171), (174) образуют полную систему для определения движения маятника на уровне интеграла $\Omega_{x^0} = 0$.

8.4.2. Система дифференциальных уравнений и топологическая аналогия

Исходя из трёх групп уравнений, две из которых дифференциальные, а третья алгебраическая, нетрудно доказать следующее предложение.

Предложение 8.2. Полная система уравнений движения маятника на касательном расслоении двумерной сферы имеет вид (ср. с соответствующими

уравнениями из раздела 2)

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + ln_0^2 v_\infty \dot{\theta} \cos \theta + n_0^2 v_\infty^2 \sin \theta \cos \theta - \dot{\psi}^2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= 0, \\ \ddot{\psi} + \dot{\theta} \dot{\psi} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \right) + ln_0^2 v_\infty \dot{\psi} \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (175)$$

Как и в случае свободного тела, система (175) обладает симметриями. Она также обладает полным набором первых интегралов, и угол ψ является циклической координатой.

Теорема 8.2. Система (175) топологически эквивалентна (154). Таким образом, как и в плоском случае, справедлива механическая аналогия между маятником в потоке среды и свободным телом при наличии некоторой неинтегрируемой связи.

Замечание. Угол α для свободного тела эквивалентен углу θ , а угол β — углу ψ . При этом для того чтобы системы (154) и (175) были тождественными, необходимо положить $l = -\sigma$ и $v_\infty = v$. Постоянная величина скорости характерной точки плоской области для свободного тела соответствует постоянной величине скорости набегающего потока на маятник. Равенство же $l = -\sigma$ говорит о том, что для свободного тела стационарное движение $\alpha \equiv 0$ экспоненциально неустойчиво, а для маятника стационарное движение $\theta \equiv 0$ экспоненциально устойчиво.

8.4.3. Замечания о динамически симметричном твёрдом теле в специальном поле сил

Система (154) обладает переменной диссипацией и не является консервативной. Она становится консервативной при формальном приравнении величины σ к нулю. Это означает, что в среде движется плоская пластина, некоторая точка которой имеет постоянную по величине скорость.

Справедлива ещё одна аналогия с твёрдым телом Лагранжа в специальном поле сил. Пусть на твёрдое тело Лагранжа в случае, когда продольная составляющая угловой скорости равна нулю, действует следующая сила: она перпендикулярна экваториальной плоскости, её величина равна

$$C_1 s(\theta), \quad C_1 > 0 \quad (176)$$

(θ — угол нутации), а расстояние от точки приложения до оси динамической симметрии равно

$$C_2 R(\theta), \quad C_2 > 0. \quad (177)$$

Тогда динамические уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_y &= -\frac{\mathcal{F}(\theta)}{I_2} v^2 \cos \phi, \\ \dot{\Omega}_z &= \frac{\mathcal{F}(\theta)}{I_2} v^2 \sin \phi. \end{aligned} \quad (178)$$

Здесь ϕ — угол собственного вращения, $v = \text{const}$. Тогда в силу кинематических формул Эйлера, вводя замены

$$z_1 = -\Omega_z \cos \phi - \Omega_y \sin \phi, \quad z_2 = \Omega_z \sin \phi - \Omega_y \cos \phi, \quad (179)$$

имеем

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -z_2, \\ \dot{z}_2 &= n_0^2 v^2 \sin \theta \cos \theta - z_1^2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \end{aligned} \quad (180)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 z_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\ \dot{\phi} &= z_1 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (181)$$

Следствие 8.1. Система (180), (181) эквивалентна (154)', (155).

Таким образом, мы имеем три модельные задачи, эквивалентные между собой:

- 1) свободное твёрдое тело при наличии некоторой неинтегрируемой связи;
- 2) маятник в потоке среды;
- 3) динамически симметричное твёрдое тело в специальном поле сил.

8.5. Топологическое строение фазового портрета исследуемой системы

В данном разделе приведём схему глобального качественного анализа динамической системы (151) во всём фазовом пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, z_2, z_1\}$. Для любой функции $\mathcal{F} \in \Phi$ фазовый портрет системы (151) имеет один и тот же топологический тип.

У системы (151) не существует траекторий, имеющих в качестве α - и ω -предельных множеств бесконечно удалённые точки фазового пространства $\mathbb{R}^3\{\alpha, z_2, z_1\}$. Кроме того, у системы не существует простых и сложных предельных циклов.

8.5.1. Приведение системы к исследуемому виду

Сделаем формальную замену $\alpha \rightarrow -\alpha$ для удобства рисования трёхмерного фазового портрета и сохранения правоориентированной системы координат $\{\alpha, z_2, z_1\}$. При этом в силу наличия симметрий будем изучать область

$$\{(\alpha, z_2, z_1) \in \mathbb{R}^3: -\pi < \alpha < 0, z_1 > 0\}. \quad (182)$$

Система при этом примет вид

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= z_2 + \sigma \frac{v}{I_2} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha}, \\ z_2 &= -\frac{\mathcal{F}(\alpha)}{I_2} v^2 + z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z_1 &= -z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},\end{aligned}\tag{183}$$

а при условии (16) аналитическая система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= z_2 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha, \\ z_2 &= -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha + z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z_1 &= -z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.\end{aligned}\tag{184}$$

Для простоты исследуем систему (184) и «выпрямим» поле вдоль цилиндров

$$\{(\alpha, z_2, z_1) \in \mathbb{R}^3 : z_2 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha = 0\},$$

а именно, делая замену фазовых переменных

$$u = z_2 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha,$$

от системы (184) приходим к системе

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= u, \\ \dot{u} &= -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha + z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_0^2 v u \cos \alpha, \\ z_1 &= -z_1 [u - \sigma n_0^2 v \sin \alpha] \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.\end{aligned}\tag{185}$$

При $\sigma = 0$ система (185) (обозначим её через (185)') обладает двумя аналитическими интегралами. Очевидно следующее предложение.

Предложение 8.3. *Плоскость*

$$\{(\alpha, u, z_1) \in \mathbb{R}^3 : z_1 = 0\}\tag{186}$$

является интегральной для системы (183).

Следствие 8.2. *На плоскости (186) «содержится» портрет системы из плоской динамики (см. рис. 3, если доопределить на прямых $\{(\alpha, u) \in \mathbb{R}^2 : \sin \alpha = 0\}$ поле системы по непрерывности).*

Введём семейство (трёхмерных) слоёв:

$$\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\}.\tag{187}$$

8.5.2. Консервативная система сравнения третьего порядка

В разделе 4 приводилось множество утверждений, касающихся ТСП и более общих систем сравнения на двумерных многообразиях. Для исследования

систем третьего порядка нам потребуются ТСП и системы сравнения более высокой размерности. Не будем останавливаться на общей теории ТСП и систем сравнения высших размерностей, а ограничимся её применением к исследуемой системе.

Поскольку система (185)' обладает двумя аналитическими интегралами (160), последние расслаивают фазовое пространство, в каждой точке которого можно провести две поверхности, которые задаются равенствами (160) и пересекаются по фазовой характеристике системы (185)'. Для каждой точки фазового пространства системы (185) определим две пары подпространств, в каждую из которых входит (или выходит) характеристика системы (185). Первые интегралы (160) «помогают» исследовать поведение фазовых траекторий системы (185).

Если $g_1 = \{n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha, u, z_1\}$, $g_2 = \{z_1 \cos \alpha, 0, \sin \alpha\}$ — градиенты поверхностей (160), то скалярные произведения $\chi_k = (g_k, v)$, $k = 1, 2$ (v — векторное поле системы (185)), обладают всеми свойствами характеристических функций (см. раздел 4).

Предложение 8.4. *Характеристические функции χ_k имеют вид*

$$\chi_1(\alpha, u, z_1) = \sigma n_0^2 v \cos \alpha [u^2 + z_1^2], \quad \chi_2(\alpha, z_1) = \sigma n_0^2 v z_1 \sin \alpha \cos \alpha.$$

8.5.3. Точки покоя исследуемой системы

Исследуемая система (185) имеет следующие состояния равновесия:

- а) точка $(0, 0, 0)$, отталкивающая;
- б) точка $(-\pi, 0, 0)$, притягивающая;
- в) точки $(-\frac{\pi}{2}, 0, Q_1)$, $Q_1 \in [0, n_0)$, в каждой площадке, параллельной плоскости $O\alpha z_2$, являются седлами;
- г) точки $(-\frac{\pi}{2}, 0, Q_2)$, $Q_2 \in (n_0, +\infty)$, в каждой площадке, параллельной плоскости $O\alpha z_2$, являются центрами.

В случаях в), г) особые точки являются *неизолированными*.

На протяжении всего раздела качественный анализ проводился достаточно подробно. Следующий пункт является следствием предыдущего материала.

8.5.4. Строение фазового портрета

Из предложения 8.4 вытекают следующие утверждения.

1. α -предельным множеством сепаратрис, входящих в точки в) в слое $\Pi_{(-\pi/2, 0)}$, является точка а).
2. ω -предельным множеством сепаратрис, выходящих из точек в) в слое $\Pi_{(-\pi, -\pi/2)}$, является точка б).
3. ω -предельными (α -предельными) множествами сепаратрис, выходящих (входящих) из точек (в точки) в) в слое $\Pi_{(-\pi/2, 0)}$ (в слое $\Pi_{(-\pi, -\pi/2)}$) являются эти же точки.

4. Та часть фазового пространства, которая содержит точки Γ , сплошь заполнена замкнутыми траекториями.

8.6. Траектории движения сферического маятника и случай ненулевой его закрутки около продольной оси

8.6.1. Траектории маятника на сфере

В соответствии со свойствами разбиения на траектории фазового пространства, типичные траектории точки D плоской области делятся на классы.

1. Траектории, соответствующие колебательной области. Такие траектории представляют собой кривые на сфере, неограниченно приближающиеся к полюсам сферы (по потоку) при $t \rightarrow \pm\infty$.
2. Траектории, соответствующие вращательной области. Такие траектории представляют собой кривые, почти всегда всюду плотно заполняющие кольцеобразные области на сфере, симметричные относительно экватора.

8.6.2. Сферический маятник при ненулевой собственной закрутке

Сразу же приведём уравнения движения маятника при условии, когда $\Omega_{x^0} \neq 0$. Данные уравнения имеют вид, аналогичный (175):

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + ln_0^2 v_\infty \dot{\theta} \cos \theta + n_0^2 v_\infty^2 \sin \theta \cos \theta - \dot{\psi}^2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{I_1}{I_2} \Omega_{x^0} \dot{\psi} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= 0, \\ \ddot{\psi} + \dot{\theta} \dot{\psi} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \right) + ln_0^2 v_\infty \dot{\psi} \cos \theta + \frac{I_1}{I_2} \Omega_{x^0} \dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (188)$$

Перейдём сразу к классификации возможных траекторий маятника на сфере.

1. Траектории, аналогичные траекториям а) для случая $\Omega_{x^0} = 0$. Асимптотика поведения таких кривых прежняя.
2. Траектории, аналогичные траекториям б) для случая $\Omega_{x^0} = 0$. Такие траектории всюду плотны на всей сфере [328].

9. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией с ненулевым средним в пространственной динамике твёрдого тела

Данный раздел (подобно разделу 7) посвящён исследованию самого интересного в прикладном отношении класса движений твёрдого тела — свободного торможения в сопротивляющейся среде. Он фактически представляет собой введение в задачу о пространственном свободном торможении. В нём

получены некоторые частные решения полной системы, подготовлен материал для проведения качественного интегрирования динамических уравнений в пространстве квазискоростей. Вторая часть раздела посвящена новому двумпараметрическому семейству фазовых портретов в трёхмерном пространстве. Показано, что полученное семейство состоит из бесчисленного множества неэквивалентных фазовых портретов с различными нелинейными качественными свойствами.

Рассмотрим такой класс движений, при котором тело совершает пространственное свободное торможение в сопротивляющейся среде.

Систему (141) можно преобразовать к виду ($z_i = z_i v$, $i = 1, 2$; $\dot{\alpha} = \alpha' v$; $\dot{\beta} = \beta' v$; $\dot{v} = v' v$)

$$v' = \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2)v + \sigma \frac{I_1}{I_2} \Omega_{x^0} Z_1 \sin \alpha, \quad (189)$$

$$\begin{aligned} \alpha' = & -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \\ & + \frac{\sigma}{I_2} \mathcal{F}(\alpha) \cos \alpha + \frac{\sigma I_1}{v I_2} \Omega_{x^0} Z_1 \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (190)$$

$$\begin{aligned} Z_2' = & \frac{1}{I_2} \mathcal{F}(\alpha) + \\ & + Z_2 \left\{ -\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - \frac{\sigma I_1}{v I_2} \Omega_{x^0} Z_1 \sin \alpha \right\} - Z_1 \Psi_2(v, \alpha, Z_1, Z_2), \end{aligned} \quad (191)$$

$$Z_1' = Z_1 \left\{ -\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - \frac{\sigma I_1}{v I_2} \Omega_{x^0} Z_1 \sin \alpha \right\} + Z_2 \Psi_2(v, \alpha, Z_1, Z_2), \quad (192)$$

$$\beta' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\Omega_{x^0}}{v} + \frac{\sigma I_1}{v I_2} \Omega_{x^0} \frac{Z_2}{\sin \alpha}, \quad (193)$$

где

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \frac{\sigma}{I_2} \mathcal{F}(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha,$$

$$\Psi_2(v, \alpha, Z_1, Z_2) = -\frac{I_1}{I_2} \frac{\Omega_{x^0}}{v} + Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma I_1}{v I_2} \Omega_{x^0} \frac{Z_2}{\sin \alpha}.$$

Уравнения (189)–(192) образуют замкнутую подсистему четвёртого порядка, а при $\Omega_{x^0} = 0$ уравнения (190)–(192) образуют систему третьего порядка. При этом считаем, что функции \mathcal{F} , s , входящие в правую часть системы (189)–(192), удовлетворяют условиям (15), (13).

В частности, если выполнены условия (16), (14), то система (189)–(192) примет следующий вид:

$$v' = \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2)v + \sigma \frac{I_1}{I_2} \Omega_{x^0} Z_1 \sin \alpha, \quad (194)$$

$$\begin{aligned} \alpha' = & -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \sigma n_0^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \\ & + \frac{\sigma I_1}{v I_2} \Omega_{x^0} Z_1 \cos \alpha + \frac{B}{m} \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (195)$$

$$\begin{aligned} Z_2' = & n_0^2 \sin \alpha \cos \alpha + \\ & + Z_2 \left\{ -\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - \frac{\sigma I_1}{v I_2} \Omega_{x^0} Z_1 \sin \alpha \right\} - Z_1 \Psi_2(v, \alpha, Z_1, Z_2), \end{aligned} \quad (196)$$

$$Z_1' = Z_1 \left\{ -\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - \frac{\sigma I_1}{v I_2} \Omega_{x^0} Z_1 \sin \alpha \right\} + Z_2 \Psi_2(v, \alpha, Z_1, Z_2), \quad (197)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = & -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \sigma n_0^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{B}{m} \cos^2 \alpha, \\ \Psi_2(v, \alpha, Z_1, Z_2) = & -\frac{I_1 \Omega_{x^0}}{I_2 v} + Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma I_1}{v I_2} \Omega_{x^0} \frac{Z_2}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

При $\Omega_{x^0} = 0$ (случай отсутствия собственного вращения тела) системы (189)–(192) и (194)–(197) примут соответственно вид

$$v' = \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2)v, \quad (198)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{I_2} \mathcal{F}(\alpha) \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha, \quad (199)$$

$$Z_2' = \frac{1}{I_2} \mathcal{F}(\alpha) - Z_2 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (200)$$

$$Z_1' = -Z_1 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (201)$$

где

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \frac{\sigma}{I_2} \mathcal{F}(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha,$$

и

$$v' = \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2)v, \quad (202)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \sigma n_0^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{B}{m} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (203)$$

$$Z_2' = n_0^2 \sin \alpha \cos \alpha - Z_2 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (204)$$

$$Z_1' = -Z_1 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (205)$$

где

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \sigma n_0^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{B}{m} \cos^2 \alpha.$$

При некоторых естественных условиях системы (194)–(197) и (202)–(205) отражают основные топологические свойства разбиения на траектории систем

(189)—(192) и (198)—(201) в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$. Более того, векторные поля систем (189)—(192) и (194)—(197) (соответственно (198)—(201) и (202)—(205)) топологически эквивалентны.

9.1. Случай нулевой продольной составляющей угловой скорости и соответствующие стационарные движения

Рассмотрим случай, когда $\Omega_{x^0} = 0$. От исходной системы (198)—(201) отделилась подсистема третьего порядка (199)—(201). Поэтому в фазовом пространстве последней точки покоя могут являться проекциями неособых фазовых траекторий четырёхмерного фазового пространства. Действительно, у системы (198)—(201) существуют положения равновесия, которые заполняют одномерные многообразия.

Поэтому вопрос о точках покоя разбивается на два: о точках покоя системы (198)—(201) в пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ и о точках покоя укороченной системы (199)—(201) в пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$.

9.1.1. Точки покоя системы четвёртого порядка

Искомые точки покоя будут заданы системой с положительным параметром v_1 :

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \left(Z_2 - \frac{1}{2\sigma}\right)^2 + Z_1^2 = \frac{1}{4\sigma^2}, \quad v = v_1. \quad (206)$$

Система (206) задаёт в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ одномерное многообразие (окружность), сплошь заполненную точками покоя системы (198)—(201).

9.1.2. Механическая интерпретация точек покоя четырёхмерного фазового пространства

В отличие от плоского случая, точки покоя (206) четырёхмерного пространства соответствуют стационарным движениям, имеющим более богатую механическую интерпретацию.

Итак, рассмотрим частное решение системы (198)—(201):

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad v = v_0, \quad \beta = 0, \quad \Omega_y = \Omega_{y^0}, \quad \Omega_z = \Omega_{z^0}.$$

Кинематические соотношения

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\frac{\Omega_{y^0}}{\cos \psi} \sin \phi, \\ \dot{\psi} &= \Omega_{y^0} \cos \phi, \\ \dot{\phi} &= \Omega_{z^0} + \Omega_{y^0} \sin \phi \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \end{aligned} \quad (207)$$

допускают «отделение» независимой подсистемы второго порядка (207), которая обладает аналитическим первым интегралом.

Предложение 9.1. Система (197) обладает первым интегралом вида

$$\Omega_{y^0} \sin \phi \cos \psi - \Omega_{z^0} \sin \psi = C_1 = \text{const}, \quad (208)$$

который означает, что сохраняется проекция на ось Ox_0 (см. раздел 8.1) абсолютной угловой скорости.

В силу предложения 9.1 и первого уравнения системы второго порядка (207) угол ψ найдётся из равенства

$$\sin \psi = \pm \frac{\Omega_{y^0} \sqrt{(\Omega_{y^0}^2 + \Omega_{z^0}^2) - C_1^2}}{\Omega_{y^0}^2 + \Omega_{z^0}^2} \sin \left\{ \sqrt{(\Omega_{y^0}^2 + \Omega_{z^0}^2)}(t + C_2) \right\} - \frac{C_1 \Omega_{z^0}}{\Omega_{y^0}^2 + \Omega_{z^0}^2}, \quad (209)$$

где $C_1 = \text{const}$. Тождества (208) и (209) позволяют определить зависимость угла ϕ от времени через элементарные функции.

На исследуемых фазовых траекториях выполнено равенство

$$\dot{x}_0 = -v_0 \cos \psi \sin \phi = \frac{v_0}{\Omega_{y^0}} [-C_1 - \Omega_{z^0} \sin \psi]$$

а в силу (209)

$$\dot{x}_0 = \frac{v_0}{\Omega_{y^0}} [A_1 \mp A_2 \sin(A_3 t + A_3)].$$

Таким образом, при $C_1 = 0$ (плоский случай, $\Omega_{z^0} = 1/\sigma$, $\alpha = \pi/2$) координата x_0 периодически меняется со временем. Аналогично определяются y_0 и z_0 .

Несмотря на нахождение лишь одной декартовой координаты, можно сделать вывод о стационарном движении тела.

Пусть $Z_1 = Z_2 = 0$ (в начальный момент, плоский случай). При этом тело движется поступательно с постоянной скоростью, параллельной плоской области. Согласно предложению 9.1 ось Ox_0 направлена параллельно плоской области (при любых Z_1, Z_2 в процессе движения).

Если фиксировать постоянную скорость поступательного движения при последних начальных условиях и задать начальный толчок в перпендикулярном направлении к оси Ox_0 , то характерная точка D плоской области (см. рис. 46) будет совершать винтовое движение, при котором центр масс тела движется прямолинейно и равномерно, а вращательное движение происходит с постоянной скоростью.

Увеличивая угловую скорость вращения тела и уменьшая скорость центра масс до нуля, попадаем из последних начальных условий в точку, задаваемую равенствами $Z_2 = 1/\sigma$, $Z_1 = 0$, также соответствующую движению из плоской динамики.

9.1.3. Тривиальные и нетривиальные точки покоя системы третьего порядка

У системы (199)–(201) существуют точки покоя в пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$, которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha = \pi k, \quad k \in \{0, 1\}, \quad Z_1 = Z_2 = 0, \quad (210)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \left(Z_2 - \frac{1}{2\sigma}\right)^2 + Z_1^2 = \frac{1}{4\sigma^2}. \quad (211)$$

Как было указано выше, точки покоя укороченной системы могут являться ортогональной проекцией либо неособых фазовых траекторий, либо многообразий, сплошь заполненных точками покоя фазового пространства $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$. Система (211) задаёт в фазовом пространстве точки покоя, в которые ортогонально проектируются многообразия положений равновесия. И, наоборот, только в точки, задаваемые системой (211), проектируются многообразия положений равновесия.

Следовательно, система (210) задаёт точки, в которые ортогонально проектируются частные решения вида

$$\begin{aligned} v(q) &= v^0 e^{-\frac{B}{m}q}, \quad v^0 = v(0), \\ \alpha(q) &\equiv \pi k, \quad k \in \{0, 1\}, \\ Z_1(q) &\equiv Z_2(q) \equiv 0. \end{aligned} \quad (212)$$

Механическая интерпретация частных решений (212) следующая: тело совершает прямолинейное поступательное движение с углом атаки, равным либо 0, либо π . При этом скорости всех точек тела убывают со временем как t^{-1} .

Ввиду простоты механической интерпретации стационарных движений точек покоя (210) и (211) последние будем называть *тривиальными положениями равновесия* (аналогично плоской динамике). Наряду с тривиальными положениями равновесия могут существовать точки покоя, соответствующие нетривиальным частным решениям системы.

Определение. Нетривиальными положениями равновесия (НПР) системы (199)–(201) в пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ называются точки покоя, не лежащие на плоскостях $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: Z_2 \sin \alpha \cos \alpha = 0\}$.

9.1.4. Нетривиальные положения равновесия системы третьего порядка, соответствующие нетривиальным частным решениям

Введём обозначение $n_0^2 = \mathcal{F}'(0)/I_2$ (как и в предыдущих разделах). Рассмотрим систему (203)–(205) для простоты. Аналогично может быть рассмотрена система (199)–(201). Необходимым и достаточным условием существования НПР в пространстве, не лежащих на интегральной плоскости $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3: Z_1 = 0\}$, является выражение данных положений равновесия системой

$$Z_2 = \frac{\sigma n_0^2}{2} \sin \alpha; \quad Z_1^2 = n_0^2 \left(1 - \frac{\sigma^2 n_0^2}{4}\right) \sin^2 \alpha, \quad \sigma n_0 < 2; \quad \cos \alpha = -\frac{\sigma n_0^2 m}{2B},$$

причём вне плоскости $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3: Z_1 = 0\}$ НПР появляются лишь при $\sigma n_0 < 2$, а при $\sigma n_0 > 2$ они вовсе не существуют.

Итак, при $\sigma n_0 < 2$ на плоскости $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3: Z_1 = 0\}$ НПР не существуют (см. плоскую динамику). При $\sigma n_0 \geq 2$ НПР в пространстве $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3: Z_1 \neq 0\}$ не существуют. При $\sigma n_0 < 2$ НПР на плоскости $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3: Z_1 = 0\}$ «пропадают» и «перемещаются» в пространство $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3: Z_1 \neq 0\}$.

Следствие 9.1. У системы (198)–(201) при условиях (15), (13) и $\Omega_{x^0} = 0$ существуют частные решения вида

$$\begin{aligned} v(q) &= v^0 e^{\kappa q}, \quad v = v^0(0), \quad \kappa < 0; \\ \alpha(q) &\equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha(0); \quad \beta(q) = Z_{10} \frac{\cos \alpha_0}{\sin \alpha_0} q + \beta^0, \quad \beta^0 = \beta(0); \\ Z_1(q) &\equiv Z_{10}, \quad Z_2(q) = Z_{20}, \quad Z_{i0} = Z_i(0), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Следствие 9.2. У системы (141) при условиях (15), (13) и $\Omega_{z^0} = 0$ существуют частные решения вида

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{v_0}{1 - v_0 \kappa t}, \quad v_0 = v(0); \\ \alpha(t) &\equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha(0); \quad \beta(t) = \beta_0 - \frac{\beta'_0}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t); \end{aligned}$$

а также, если определить, что $\beta_0 = 0$,

$$\begin{aligned} \Omega_y(t) &= \frac{1}{1 - v_0 \kappa t} [\Omega_{y^0} \cos \beta(t) - \Omega_{z^0} \sin \beta(t)], \\ \Omega_z(t) &= \frac{1}{1 - v_0 \kappa t} [\Omega_{y^0} \sin \beta(t) + \Omega_{z^0} \cos \beta(t)], \end{aligned}$$

аналогичные соответствующим решениям из плоской динамики.

9.2. Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа

9.2.1. Топологическая классификация особых точек укороченной системы в трёхмерном пространстве

Как и ранее, введём два безразмерных параметра:

$$\mu_1 = 2 \frac{B}{m n_0}, \quad \mu_2 = \sigma n_0.$$

Будем рассматривать систему (198)–(201) при $\sigma n_0 < 2$.

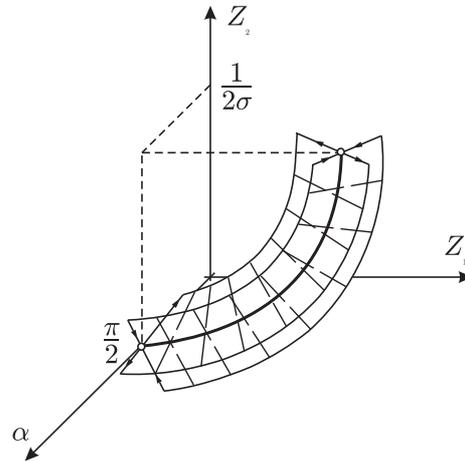


Рис. 48. Одномерное многообразие положений равновесия

Предложение 9.2.

1. Неизолированные точки покоя (211) при $Z_2 < \frac{1}{2\sigma}$ в каждой перпендикулярной площадке к окружности являются седлами (рис. 48).
2. Неизолированные точки покоя (211) при $Z_2 > \frac{1}{2\sigma}$ в каждой перпендикулярной площадке к окружности являются притягивающими.
3. Изолированная точка покоя (210) при $k = 0$ всегда является отталкивающей (рис. 49).
4. Изолированная точка покоя (210) при $k = 1$ является отталкивающей, если $\mu_2 < \mu_1$, и притягивающей, если $\mu_2 > \mu_1$ (рис. 49).

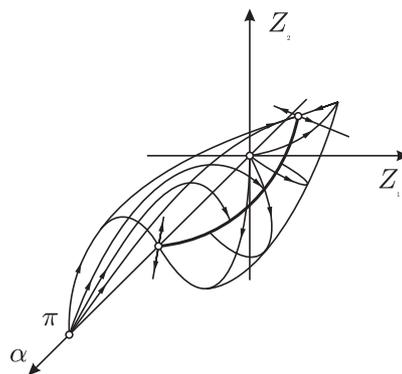


Рис. 49. Притягивающая и отталкивающая особые точки

9.2.2. Расслоения фазового пространства и его симметрии

Поскольку от системы четвёртого порядка отделяется независимая подсистема третьего порядка, фазовые траектории в $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ лежат на поверхностях, являющихся трёхмерными цилиндрами. В частности, если во всём фазовом пространстве существует дополнительный первый интеграл системы (199)–(202), то он является функцией переменных (α, Z_1, Z_2) , а поэтому задаёт семейство цилиндров в $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$.

Благодаря вышеописанной редукции удобнее строить фазовый портрет системы (198)–(201) в $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ с помощью фазового портрета системы (199)–(201) в $\mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$. Фазовый портрет в пространстве не будет являться частью портрета в $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ в теоретико-множественном смысле, а будет проекцией фазового портрета на плоскость $\{v = \text{const}\}$. Проекция в данном случае ортогональна.

Благодаря цилиндрической природе векторного поля становятся возможными поднятие фазовых траекторий в пространство $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ и получение четырёхмерных фазовых портретов искомой системы.

Данные утверждения можно обобщить на случаи большей размерности.

Поскольку $v > 0$, то движение возможно лишь в области

$$B = \{(\alpha, Z_1, Z_2, v) \in \mathbb{R}^4 : v > 0\} \subset \mathbb{R}^4\{\alpha, Z_1, Z_2, v\}.$$

Если формально сделать замену переменных в области B по формуле $\bar{p} = \ln v$, то полученное векторное поле в фазовом пространстве $\mathbb{R}^4\{\alpha, Z_1, Z_2, \bar{p}\}$ не зависит от \bar{p} , т. е. имеет цилиндрическую природу более высокого порядка и однозначно ортогонально проектируется на всё семейство плоскостей $\{\bar{p} = \text{const}\}$. При этом положения равновесия в пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ полностью совпадают с объединением как проекций многообразий особых точек, так и проекций неособых фазовых траекторий области B.

Для полного решения вопроса о поднятии траекторий в четырёхмерное фазовое пространство необходимо выяснить знак проекции векторного поля в $\mathbb{R}^4\{\alpha, Z_1, Z_2, \bar{p}\}$ на ось \bar{p} или на ось v в области B.

Для любых $\mathcal{F} \in \Phi$, $s \in \Sigma$ векторное поле системы (199)–(201) обладает свойством центральной симметрии относительно точек $(\pi k, 0)$, $k \in \{0, 1\}$, т. е. в координатах (α, Z_1, Z_2) векторное поле меняет направление при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ Z_1, Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -Z_1, -Z_2 \end{pmatrix}, \quad k \in \{0, 1\}.$$

Более того, плоскость $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : Z_1 = 0\}$ является интегральной, а векторное поле системы обладает следующей симметрией: α - и Z_2 -составляющие сохраняются, а Z_1 -составляющая меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ Z_1, Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -Z_1, -Z_2 \end{pmatrix}, \quad k \in \{0, 1\}.$$

Для дальнейшего анализа введём определения семейства слоёв в пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$:

$$\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{\alpha, Z_1, Z_2\} \in \mathbb{R}^3: \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\},$$

при этом, как и в предыдущих разделах, $\Pi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} = \Pi$, $\Pi_{(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})} = \Pi'$.

Следует заметить, что фактически фазовым пространством исследуемой системы является слой $\Pi_{(0, \pi)}$ (или, топологически, *касательное расслоение двумерной сферы*).

9.3. Классификация фазовых портретов системы в трёхмерном пространстве для некоторой области параметров

9.3.1. Введение в классификацию фазовых портретов

Подобно плоской динамике, можно изобразить диаграмму перестроек векторного поля системы (199)–(201) возле точки $(\pi, 0)$ на множестве

$$\Pi_{(0, \pi)} \cup \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3: Z_1 > 0\}.$$

Поведение поля системы возле этой точки определяет многие основные топологические особенности глобального фазового портрета.

Будем изучать те динамические системы вида (199)–(201), при которых НПР существуют лишь вне интегральной плоскости

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3: Z_1 = 0\}.$$

Поэтому в общем пространстве физически допустимых параметров

$$M^2 = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2: \mu_1 > 0, \mu_2 > 0\}$$

в основном будем изучать область

$$J^2 = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2: \mu_1 > 0, 0 < \mu_2 < 2\} \subset M^2.$$

Типичная топологическая классификация тривиальных положений равновесия была приведена выше. Для проведения полной классификации фазовых портретов системы необходимо ответить на следующие вопросы.

1. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве α - и ω -предельных множеств бесконечно удалённые точки.

Предложение 9.3. У системы (199)–(201) существуют и единственны траектории, уходящие на бесконечность. Их α - и ω -предельными множествами являются бесконечно удалённые точки $(+0, +\infty, +\infty)$ вне плоскости $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3: Z_1 = 0\}$ и $(+0, 0, +\infty)$ на плоскости $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3: Z_1 = 0\}$. Только эти точки обладают указанным свойством.

2. Существование замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых по слою $\Pi_{(0, \pi)}$ в точку.

Последняя задача в общей постановке очень сложна, а в области рассматриваемых параметров справедливо следующее предложение.

Предложение 9.4. В области параметров I (ср. с результатами плоской динамики, раздел 7) замкнутых характеристик у систем вида (199)–(201) при условиях (15), (13) не существует.

3. Основным вопросом классификации портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющих гиперболических седел. Данные сепаратрисы разделяют всё фазовое пространство на области без положений равновесия, поэтому фазовые портреты мгновенно достраиваются.

Ответ на последний вопрос требует рассмотрения ряда вспомогательных утверждений.

9.3.2. Разбиение на траектории фазового пространства системы для первой области параметров

Рассмотрим систему (199)–(201) в области параметров I (см. раздел 7). Будем исследовать вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющих гиперболических седел.

Следующее утверждение относится ко всему пространству параметров M^2 и базируется на наличии трёхмерной топографической системы Пуанкаре в полосе Π .

Предложение 9.5. Неустойчивые сепаратрисы в слое Π для точек (211) при $Z_2 < \frac{1}{2\sigma}$ имеют в качестве α -предельных множеств начало координат.

Предложение 9.6. Рассмотрим систему (199)–(201) в области параметров I. Пусть $\mathcal{F}(\alpha) \sin \alpha \geq 0$ в полосе Π . Тогда если

$$\frac{s(\alpha)}{m} \geq \frac{\sigma}{I} \hat{g}(\alpha),$$

где

$$\hat{g}'(\alpha) = -2\mathcal{F}(\alpha), \quad \hat{g}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

то ТСП с центром в точке $(\pi, 0)$ полностью лежит в области, ограниченной нетривиальной поверхностью контактов (см. аналогичное предложение 4.2 для нетривиальной кривой контактов на плоскости).

Данное предложение формулируется и доказывается аналогично предложению из плоской динамики твёрдого тела за тем исключением, что нетривиальная поверхность контактов, перенесённая в слой Π , имеет вид

$$2\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) = \frac{s(\alpha)}{m} + \sqrt{\frac{s^2(\alpha)}{m^2} + 4\sigma \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{I} \sin \alpha \left\{ \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} - \frac{\sigma \mathcal{F}(\alpha)}{I \sin \alpha} \right\}}.$$

Следствие 9.3. Пусть выполнено условие (16). Тогда очевидно, что в области параметров I выполнено неравенство

$$\frac{B}{m} \geq \sigma n_0^2 \cos \alpha \quad \text{для всех } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

При этом $\hat{g}(\alpha) = AB \cos^2 \alpha$. Таким образом, при $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ мы необходимо попадаем в условия предложения 9.6.

Предложение 9.7. Пусть выполнены все условия предыдущих предложений. Тогда по крайней мере в области значений параметров I сепаратрисы, входящие в точки (211) при $Z_2 < \frac{1}{2\sigma}$ в слое Π' , имеют в качестве α -предельного множества точку $(\pi, 0, 0)$.

9.3.3. Топологическое строение типов фазовых портретов для первой области параметров

Рассмотрим вопрос о поведении сепаратрис, выходящих из точек (211) при $Z_2 < \frac{1}{2\sigma}$ в полосу Π и в полосу Π' . Для этого дадим определение индекса сепаратрисного поведения для данной задачи.

Определение. Индексом сепаратрисного поведения (будем обозначать его isp) называется число

$$\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0 \cup \left\{ 1 + \frac{1}{4}, l \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

По определению $\text{isp} = \mathbf{k}$, если сепаратрисы, выходящие из точек (211) при $Z_2 < \frac{1}{2\sigma}$ в слое Π , имеют в качестве ω -предельного множества точки (211) при $Z_2 > \frac{1}{2\sigma}$ ($\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0$) или бесконечно удалённую точку ($\mathbf{k} \in \{l + \frac{1}{4}, l \in \mathbb{N}_0\}$). При этом сепаратрисы огибают окружность (211) и уходит в область под окружностью (211) l раз (рис. 50 при $l = 0$ и рис. 51 при $l = 2$).

Теорема 9.1. Определение корректно, т. е. для любого $\text{isp} = \mathbf{k}$ из области определения возможно соответствующее поведение рассматриваемых сепаратрис.

Теорема 9.1 доказывается методами теории монотонных векторных полей (см. раздел 4). Монотонность понимается относительно параметра

$$\mu^* = 2 \frac{s^*}{mn_0}, \quad s^* = \max_{\alpha \in \mathbb{R}} |s(\alpha)|$$

(см. [283], ср. с аналогичными результатами из плоской динамики из раздела 7).

9.3.4. Полная классификация фазовых портретов для первой области параметров динамической системы в трёхмерном пространстве

В силу теоремы 9.1 можно провести полную классификацию фазовых портретов системы (199)–(201), когда её параметры пробегают область I. Как показано выше, таких портретов бесконечно много.

Для проведения полной классификации портретов остаётся исследовать сепаратрисы, выходящие из точек (211) при $Z_2 < \frac{1}{2\sigma}$ в слой Π' . Такие сепаратрисы имеют предельные множества из НПР. Появившаяся особая точка (НПР) в полупространстве $\{Z_1 > 0\}$ имеет седловой тип с одним притягивающим собственным направлением и двумя отталкивающими.

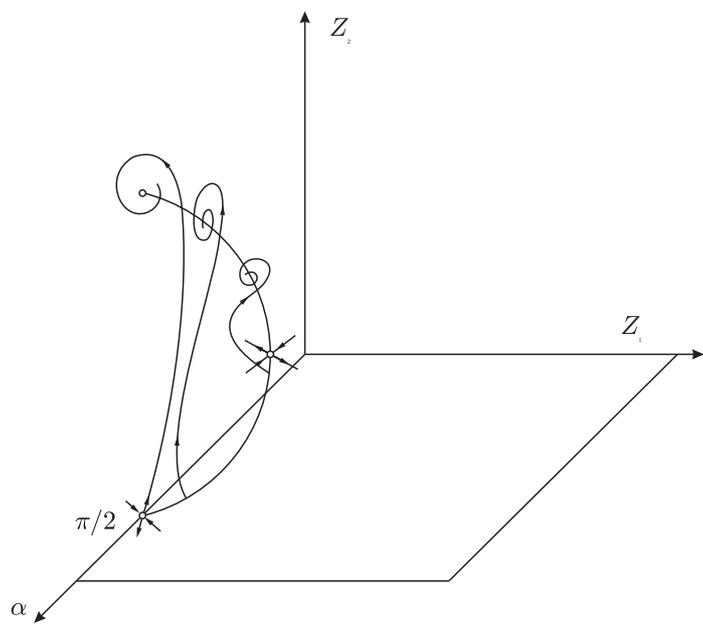


Рис. 50. $l = 0$

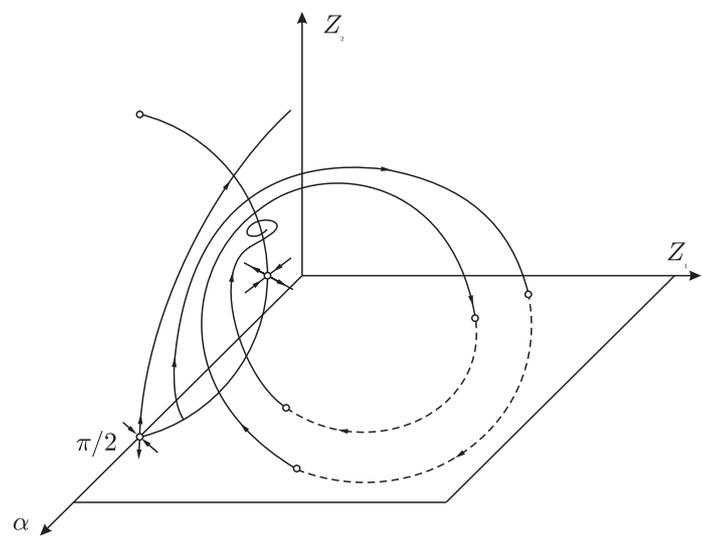


Рис. 51. $l = 2$

Необходимо сделать замечание о том, как точки из НПР вносят возможные изменения в свойства разбиения на траектории трёхмерного фазового пространства. Устойчивое собственное направление (точки из НПР) имеет в качестве α -предельного множества точку $(\pi, 0, 0)$. Неустойчивые же направления, на которые натягивается целая «неустойчивая» плоскость (а также сепаратрисы, о которых говорится в последнем определении), имеют в качестве предельных множеств притягивающие точки (211) при $Z_2 > \frac{1}{2\sigma}$. Видно, что седловые точки из НПР вносят в образующийся топологический тип трёхмерного фазового портрета такие изменения, которые не влияют на данный тип. Топологические типы трёхмерных фазовых портретов «кодирует» лишь индекс $\mathbf{k} = \text{isp}$, который «отвечает» за другие сепаратрисные поверхности. Таким образом и проводится полная классификация фазовых портретов системы для области параметров I.

Заметим, что многие утверждения данного раздела справедливы и в более широких областях параметров.

В заключение хотелось бы отметить общее свойство движения тела. Рассмотрим область параметров I. Ей соответствует небольшой по сравнению с безразмерной силой безразмерный момент. В этой области при типичных начальных условиях в смысле меры за конечное достаточно большое время твёрдое тело стремится к экспоненциально устойчивому стационарному движению следующего вида: центр масс тела движется прямолинейно и равномерно, а тело вращается вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью в направлении, перпендикулярном скорости движения центра масс. При этом скорость относительного движения при вращении больше (переносной) скорости центра масс.

В только что изложенном материале рассмотрен модельный вариант задачи о свободном пространственном торможении тела в среде. Проведён вспомогательный качественный анализ систем дифференциальных уравнений, описывающих данное движение в некоторой области ненулевой меры в пространстве параметров. На основе этого получено новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов, состоящее из бесчисленного множества неэквивалентных типов. При этом отсутствуют автоколебания, и при типичных начальных условиях траектории стремятся к асимптотически устойчивым стационарным режимам.

10. Некоторые задачи плоской динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой при наличии линейного демпфирования со стороны среды

До сих пор рассматривалась такая нелинейная модель взаимодействия тела со средой, при которой в системе отсутствовало демпфирование со стороны среды (в линейном случае $h = 0$ (см. раздел 1)), сила сопротивления

и её момент зависели лишь от угла атаки. В данном разделе переходим к учёту дополнительного линейного демпфирующего воздействия со стороны среды.

На базе нелинейных уравнений исследуется устойчивость прямолинейного поступательного торможения при наличии линейного демпфирующего момента. Показано, что в рамках рассматриваемой модели в принципе могут возникать автоколебания, соответствующие предельным циклам, которые рождаются из слабого фокуса (известная бифуркация Андронова—Хопфа).

Проводится также качественный анализ некоторых нелинейных динамических систем, полученных выше, но при условии того, что в системе присутствует линейный демпфирующий момент. В зависимости от коэффициента демпфирования со стороны среды проводится топологическая классификация типичных фазовых портретов системы, рассмотренной на фазовом цилиндре квазискоростей. Показано, что при некоторых условиях в системе могут возникнуть как устойчивые, так и неустойчивые автоколебания.

Результаты, полученные в предыдущих разделах, в основном опираются на главное условие относительно пары динамических функций (y_N, s) — их зависимость лишь от угла атаки (см. также [341, 342, 355, 363, 369]).

Настоящий раздел посвящён изучению влияния вращательной производной момента аэродинамических сил по угловой скорости на движение самого тела. Учёт такого влияния в общем случае сталкивается с серьёзными трудностями, связанными со сложным характером зависимости момента аэродинамических сил от угловой скорости тела. Изучим для начала случай линейной зависимости величины y_N от угловой скорости тела с коэффициентом, постоянным по углу атаки.

10.1. Свободное торможение тела в среде при учёте линейного демпфирующего момента

10.1.1. Условия экспоненциальной устойчивости прямолинейного поступательного торможения тела

Рассмотрим задачу о свободном торможении тела в среде. Предположим, что ордината точки приложения имеющейся силы сопротивления представляется в виде

$$y_N(\alpha) - h' \frac{\Omega}{v}.$$

При этом уравнение (10) примет вид

$$I\Omega' = \mathcal{F}(\alpha)v^2 - h's(\alpha)\Omega v, \quad (213)$$

где h' — постоянный коэффициент. Соответствующие динамические уравнения, аналогичные (86), (87), примут вид

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (214)$$

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma}{I}\mathcal{F}(\alpha) \cos \alpha + \sigma\omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha - \frac{\sigma}{I}h'\omega s(\alpha) \cos \alpha, \quad (215)$$

$$\omega' = \frac{1}{I}\mathcal{F}(\alpha) - \omega\Psi(\alpha, \omega) - \frac{h'}{I}\omega, \quad (216)$$

где

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma\omega^2 \cos \alpha + \frac{\sigma}{I}\mathcal{F}(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha - \frac{\sigma}{I}h'\omega s(\alpha) \sin \alpha.$$

Как известно, при $h' = 0$ прямолинейное поступательное торможение тела экспоненциально неустойчиво по части переменных (α, Ω) , т. е. тривиальное решение независимой подсистемы (215), (216) экспоненциально неустойчиво.

При изучении прямолинейного поступательного торможения тела из эксперимента о входе в воду круговых цилиндров (см. разделы 1 и 3) было получено, что коэффициент h воздействия среды на тело имеет строго положительный знак, т. е. вносит в систему демпфирование. Поэтому для начала рассмотрим случай, когда $h_1 = h's(0) > 0$.

Предложение 10.1. *Если*

$$\frac{n_0^2}{I} = \frac{\mathcal{F}'(0)}{I} > \frac{s^2(0)}{m^2} = \frac{B^2}{m^2}, \quad (217)$$

то существует такое критическое значение

$$h_1^* = I \left(\sigma n_0^2 + 2 \frac{B}{m} \right),$$

что при $h_1 > h_1^*$ тривиальное решение системы (215), (216) экспоненциально устойчиво.

Рассмотрим задачу о входе в воду круговых цилиндров (см. разделы 1 и 3). Условие наличия колебательной экспоненциальной устойчивости (217) принимает вид

$$\frac{DI\rho_{\text{ж}}}{m^2} < \frac{8k}{C_x\pi}, \quad (218)$$

а значения физических параметров цилиндров, при которых прямолинейное поступательное торможение в принципе может стать устойчивым, должны удовлетворять условию

$$h \frac{mD^2}{I} > 2 + k \frac{m\sigma D}{I}. \quad (219)$$

Для безразмерных параметров k , h воздействия воды на тело уже принята оценка $k = h = 0,1$ (см. раздел 1). Таким образом, условия (218) и (219) позволяют попытаться «сконструировать» твёрдое тело — круговой цилиндр, — для которого прямолинейное поступательное торможение может стать устойчивым. Для этого необходимо выбрать динамические параметры σ , D , I , m цилиндра, исходя из условий (218) и (219).

Последний факт, на первый взгляд, противоречит утверждению о том, что прямолинейное поступательное торможение однородных круговых цилиндров в воде неустойчиво. Динамические параметры самих цилиндров таковы, что неравенство (218) выполняется, а (219) нет. Действительно, для круговых цилиндров, движущихся в воде ($k = h = 0,1$) с равномерным распределением масс, справедливо равенство

$$F_1(k, h, m, I, \sigma, D)|_{k=h=0,1} = h \frac{mD^2}{I} - k \frac{m\sigma D}{I} - 2 \Big|_{k=h=0,1} = F_2(\sigma, D),$$

правая часть которого с точностью до положительного множителя принимает отрицательное значение

$$-3D^2 - 12\sigma D - 80\sigma^2,$$

что соответствует экспоненциальной неустойчивости прямолинейного поступательного торможения; здесь учитывается, что

$$I = m \left(\frac{\sigma^2}{3} + \frac{D^2}{16} \right).$$

Проследим формальную зависимость функции F_1 от параметров k и h , которые, видимо, определяются самой средой. Возможно, что параметры k и h возрастают с вязкостью самой среды. При этом уже при

$$k = h > \frac{2\sqrt{5} - 4}{3} \cong 0,157$$

существуют такие динамические параметры однородных круговых цилиндров, при которых функция F_1 становится положительной, что свидетельствует о возможной устойчивости прямолинейного поступательного торможения.

10.1.2. О движении круговых цилиндров с полостью

Как было показано выше, прямолинейное поступательное торможение однородных круговых цилиндров неустойчиво. Для возможного достижения такой устойчивости рассмотрим задачу о свободном торможении кругового цилиндра, имеющего внутри себя полость. При этом момент инерции цилиндра с полостью относительно геометрического центра симметрии цилиндра равен

$$I = m \left(\frac{\sigma^3}{3} + \frac{D^2}{16} - \rho^2 \right),$$

где ρ — центральный радиус инерции мыслимого твёрдого тела, заполняющего полость. Тогда условие устойчивости прямолинейного торможения рассматриваемого тела примет вид

$$3 \left(\frac{\rho}{D} \right)^2 > \frac{3}{80} + \frac{3}{20} \frac{\sigma}{D} + \left(\frac{\sigma}{D} \right)^2.$$

К примеру, если цилиндрическая полость, находящаяся в самом центре «всеобъемлющего» цилиндра, имеет диаметр $D_1 = k_1 D$ и полувысоту $\sigma_1 = k_2 \sigma$

($0 < k_1, k_2 < 1$), то при

$$\left(\frac{\sigma}{D}\right)^2 + \frac{3}{20} \frac{1}{1-k_2^2} \left(\frac{\sigma}{D}\right) - \frac{3}{80} \frac{5k_1^2 - 1}{1-k_2^2} < 0$$

прямолинейное поступательное торможение будет экспоненциально устойчиво.

10.1.3. Возникновение автоколебаний в силу бифуркации рождения цикла Андронова—Хопфа

Рассмотрим вопрос об устойчивости тривиального решения системы (215), (216) на границе области устойчивости при критическом значении параметра h_1^* демпфирования со стороны среды. Введём обозначения, аналогичные обозначениям раздела 3, а именно

$$\begin{aligned} \text{In} &= -2\frac{B}{m} + 4\frac{s_2}{m} + \sigma\frac{f_3}{I} - 5\sigma n_0^2 + 8\sigma A_1^2 + 8\sigma\omega_0^2 + 4\sigma A_1 \left(\sigma n_0^2 + 2\frac{B}{m}\right), \\ s_2 &= s''(0), \quad f_3 = \mathcal{F}'''(0), \quad B = s(0), \quad n_0^2 = \frac{\mathcal{F}'(0)}{I}, \\ A_1 &= \frac{\sigma n_0^2 + \frac{B}{m}}{1 + \sigma^2 n_0^2 + 2\sigma\frac{B}{m}}, \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{n_0^2 - \frac{B^2}{m^2}}}{1 + \sigma^2 n_0^2 + 2\sigma\frac{B}{m}}. \end{aligned}$$

Предложение 10.2. Если $\text{In} < 0$, то начало координат системы (215), (216) при $h_1 = h_1^*$ асимптотически устойчиво, если же $\text{In} > 0$ — неустойчиво.

Значение индекса In позволяет судить об устойчивости слабого фокуса [385] в начале координат системы (215), (216) и тем самым делать вывод о возникновении автоколебаний в системе.

Предложение 10.3. Пусть выполнены условия предложения 10.1. Если $\text{In} < 0$, то существует \underline{h}_1 , такое что при $0 < \underline{h}_1 < h_1 < h_1^*$ в системе (215), (216) в полосе Π имеется устойчивый предельный цикл, который растёт с уменьшением h_1 от h_1^* до \underline{h}_1 . Если же $\text{In} > 0$, то существует \bar{h}_1 , такое что при $\bar{h}_1 > h_1 > h_1^*$ у системы (215), (216) в полосе Π имеется неустойчивый предельный цикл, который растёт с ростом h_1 от h_1^* до \bar{h}_1 .

Индекс In зависит от высших производных динамических функций \mathcal{F} и s , знак которых нам, вообще говоря, неизвестен. Если принять выполнение условий (16) и (14), то индекс In может быть отрицателен, что свидетельствует о рождении устойчивого предельного цикла при $h_1 < h_1^*$. Для проверки последнего факта необходимо провести эксперимент взаимодействия с водой, к примеру, однородного кругового цилиндра с такими геометрическими и динамическими параметрами, при которых функция F_2 наиболее близко подходит своими значениями к нулю слева.

Итак, в принципе динамические параметры твёрдого тела могут быть таковы, что, несмотря на экспоненциальную неустойчивость прямолинейного поступательного торможения тела, его угловые колебания возле данного торможения

могут быть равномерно ограничены по амплитуде. Другими словами, каково бы ни было достаточно малое возмущение прямолинейного поступательного торможения по углу атаки и угловой скорости, угловые колебания ограничены по амплитуде устойчивыми угловыми автоколебаниями, что и является положительным ответом на главный вопрос нелинейного анализа, поставленный в разделе 1.

10.2. Движение в среде при наличии некоторой неинтегрируемой связи и линейного демпфирующего момента

В разделе 6 проведено полное исследование динамической системы (72) на фазовом цилиндре, отделившейся от общей системы (8)–(10). Система (72) определена с помощью пространства функций Φ и имеет фазовый портрет, не меняющий своего топологического типа при варьировании функции \mathcal{F} вдоль всего класса Φ , поэтому интегрирование кинематических уравнений проведено для системы (73) частного вида.

10.2.1. Линейный по угловой скорости момент со стороны среды

Рассмотрим задачу о движении тела в среде при условии (73) (см. раздел 6). Допустим, что наряду с силой сопротивления на тело действует линейный по угловой скорости демпфирующий момент, который меняет лишь угловое ускорение. Предположим, что изменение угла атаки и угловой скорости тела при условии (16) даётся системой

$$\alpha' = -\Omega + A_1 \sin \alpha, \quad \Omega' = A_2 \sin \alpha \cos \alpha - h_2 \Omega. \quad (220)$$

При $h_2 > 0$ дополнительный момент вносит в систему диссипацию, а при $h_2 < 0$ он только усиливает эффект раскачки угловых колебаний тела. В соответствии с экспериментом знак h_2 по-прежнему выбираем положительным.

Система частного вида (73) сохраняет все топологические особенности строения фазового портрета общей системы (72). А вот система (220) не обладает таким свойством по отношению к системе (92) по следующей причине. В силу леммы 4.1 пространство векторных полей систем вида (92) делится по крайней мере на два класса, в каждом из которых соответствующий фазовый портрет имеет определённый тип. По мере исследования системы (92) будет указано, для каких функций $\mathcal{F} \in \Phi$ проводится качественный анализ.

10.2.2. Точки покоя и соответствующие им стационарные движения

Начнём глобальный качественный анализ динамической системы (92) при условии (15) на фазовой плоскости квазискоростей.

Множество точек покоя системы (92) (или системы частного вида (220)), которому соответствуют стационарные движения, разбивается на следующие части.

В полосе Π (или Π') существуют изолированные особые точки, которые находятся из системы

$$\{\alpha = 0 \bmod \pi, \Omega = 0\}.$$

Эти особые точки соответствуют прямолинейным поступательным движениям тела с постоянной скоростью, перпендикулярной плоской пластине.

У системы (92) существуют особые точки

$$\left(\pm \arccos \left(\frac{A_1 h}{A_2} \right), \pm \frac{A_2}{h} \mathcal{F} \left(\arccos \left(\frac{A_1 h}{A_2} \right) \right) \right), \quad (221)$$

если и только если

$$0 < h < \frac{A_2}{A_1}.$$

При выполнении последнего условия они появляются лишь в полосе Π .

Если и только если

$$-\frac{A_2}{A_1} < h < 0,$$

в полосе Π' (и только в ней) появляются точки

$$\left(\pi \pm \arccos \left(-\frac{A_1 h}{A_2} \right), \pm \frac{A_2}{h} \mathcal{F} \left(\arccos \left(-\frac{A_1 h}{A_2} \right) \right) \right). \quad (222)$$

Механическая интерпретация особых точек (221) и (222) следующая: тело совершает движение в среде с постоянным углом атаки, не равным 0 и π , с постоянной угловой скоростью. При этом, очевидно, центр пластины твёрдого тела движется по окружности, поскольку его декартовы координаты $\{x, y\}$ представляются в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v}{\Omega_0} \{\sin \alpha_0 - \sin(\alpha_0 + \Omega_0 t)\}, \\ y(t) &= \frac{v}{\Omega_0} \{\cos(\alpha_0 + \Omega_0 t) - \cos \alpha_0\}, \end{aligned}$$

где (α_0, Ω_0) — особые точки вида (221) или (222) (можно считать, что начальный угол отклонения тела от оси абсцисс и начальные декартовы координаты равны 0). Уравнение траектории движения имеет вид уравнения окружности с центром

$$\left(\frac{v}{\Omega_0} \sin \alpha_0 - \frac{v}{\Omega_0} \cos \alpha_0 \right).$$

10.2.3. Симметрии векторного поля системы на фазовом цилиндре квазискоростей

Векторное поле системы (92) при условии (15) обладает следующими видами симметрий:

- 1) центральной симметрией. Такая симметрия возле точек $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, возникает из-за того, что векторное поле системы в координатах (α, Ω) меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -\Omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ \Omega \end{pmatrix};$$

- 2) некоторой расширенной зеркальной симметрией. Такая симметрия в пространстве $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^2\{\Omega, h\}$ относительно плоскостей

$$\left\{ (\alpha, \Omega, h) \in \mathbb{R}^3 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi i, i \in \mathbb{Z} \right\}$$

возникает из-за того, что α -составляющая векторного поля системы в координатах (α, Ω) сохраняется при замене

$$\begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i - \alpha \\ \Omega \\ -h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i + \alpha \\ \Omega \\ h \end{pmatrix},$$

а Ω -составляющая меняет знак.

Следствием некоторой расширенной зеркальной симметрии является некоторая зеркальная симметрия векторного поля системы (92) (см. раздел 6) на фазовом цилиндре квазискоростей, если и только если $h = 0$.

10.2.4. Замечания об интегрируемости системы

У системы при некоторых условиях существуют не только притягивающие и отталкивающие точки покоя, но и предельные циклы. Таким образом, в силу следствия из теоремы 6.1 у системы (92) если и существует первый интеграл на всём фазовом цилиндре, то он является разрывной функцией не только в отталкивающих и притягивающих точках, но и на целых замкнутых кривых.

10.3. Топологическое строение некоторых фазовых портретов в задаче о движении тела в среде при учёте демпфирующего момента

Как указывалось выше, в отличие от системы (72), система (92) при $h \neq 0$ при разных функциях $\mathcal{F} \in \Phi$ может иметь различный топологический тип своего фазового портрета. Различия в топологических типах портретов на цилиндре могут появляться при условии, если $\mathcal{F}_1'''(0) + 3\mathcal{F}_1'(0) > 0$ для портрета системы (92) с одной функцией $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1(\alpha) \in \Phi$ (рождается неустойчивый цикл при $h > A_1\mathcal{F}'(0)$) и если $\mathcal{F}_2'''(0) + 3\mathcal{F}_2'(0) < 0$ для портрета системы (92) с другой функцией $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2(\alpha) \in \Phi$ (рождается устойчивый цикл при $h < A_1\mathcal{F}'(0)$). В данном случае необходимо конкретно выделять тот подкласс функций из класса Φ , для которого исследуется топологический тип фазовых портретов систем, определяемых с помощью такого подкласса.

10.3.1. Топологическая классификация точек покоя системы

Проведём типичную топологическую классификацию особых точек $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$ системы (220) на цилиндре, поскольку полученные далее соотношения на постоянные A_1 и A_2 для неё отличаются от аналогичных соотношений для системы (92) заменой A_1 на $A_1\mathcal{F}'(0)$ и A_2 на $A_2\mathcal{F}'(0)$.

Характеристические корни системы (92), линеаризованной возле точки $(0, 0)$, имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(A_1 - h_2 \pm [(h_2 + A_1)^2 + 4A_2]^{1/2}),$$

а бифуркационное множество состоит из постоянных

$$\left\{ A_1, -\frac{A_2}{A_1}, -A_1 + 2\sqrt{-A_2}, -A_1 - 2\sqrt{-A_2} \right\}.$$

Для точки $(\pi, 0)$ имеем аналогичные выражения при замене A_1 на $-A_1$.

Точки покоя (221) и (222) являются седлами для любого

$$h \in \left(-\frac{A_2}{A_1}, \frac{A_2}{A_1} \right).$$

Аналогичное уравнение для системы (92) отличается от предыдущего ненулевой мультипликативной постоянной.

Для дальнейшего изложения удобно ввести следующие обозначения и аббревиатуры:

$$\xi = \frac{A_2}{A_1}, \quad \eta_+^\pm = A_1 \pm 2\sqrt{-A_2}, \quad \eta_-^\pm = -A_1 \pm 2\sqrt{-A_2},$$

C — седло, $УУ$ — устойчивый узел, $НУ$ — неустойчивый узел, $УФ$ — устойчивый фокус, $НФ$ — неустойчивый фокус, $УЦ$ — устойчивый предельный цикл, $НЦ$ — неустойчивый предельный цикл, $ФП$ — фазовый портрет.

Классификация точек покоя $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$ приведена в таблицах 1–4 и соответствует следующим четырём случаям.

Случай 1 (табл. 1):

$$\xi < \eta_-^- < \eta_+^- < -A_1 < 0 < A_1 < \eta_-^+ < \eta_+^+ < -\xi.$$

Случай 2 (табл. 2):

$$\eta_-^- < \xi < \eta_+^- < -A_1 < 0 < A_1 < \eta_-^+ < -\xi < \eta_+^+.$$

Случай 3 (табл. 3):

$$\eta_-^- < -A_1 < \xi < \eta_+^- < 0 < \eta_-^+ < -\xi < A_1 < \eta_+^+.$$

Случай 4 (табл. 4):

$$\eta_-^- < -A_1 < \eta_-^+ < \xi < 0 < -\xi < \eta_+^- < A_1 < \eta_+^+.$$

Таблица 1

Номер подслучая	Диапазон изменения h	Тип точки покоя		Номер рисунка
		$(0, 0)$	$(\pi, 0)$	
1	$(-\infty, -\xi)$	НУ	С	31
2	$(-\xi, \eta^-)$	НУ	НУ	37*
3	(η^-, η_+)	НФ	НУ	37*
4	$(\eta_+, -A_1)$	НФ	НФ	37
5	$(-A_1, 0)$	НФ	УФ	НЦ-33
6	$(0, A_1)$	НФ	УФ	УЦ-32
7	(A_1, η_+)	УФ	УФ	36
8	(η_+, η_+)	УУ	УФ	36*
9	(η_+, ξ)	УУ	УУ	36*
10	$(\xi, +\infty)$	С	УУ	30

Таблица 2

Номер подслучая	Диапазон изменения h	Тип точки покоя		Номер рисунка
		$(0, 0)$	$(\pi, 0)$	
1	$(-\infty, \eta^-)$	НУ	С	31
2	$(\eta^-, -\xi)$	НФ	С	31*
3	$(-\xi, \eta_+)$	НФ	НУ	37*
4	$(\eta_+, -A_1)$	НФ	НФ	37
5	$(-A_1, 0)$	НФ	УФ	НЦ-33
6	$(0, A_1)$	НФ	УФ	УЦ-32
7	(A_1, η_+)	УФ	УФ	36
8	(η_+, ξ)	УУ	УФ	36*
9	(ξ, η_+)	С	УФ	30*
10	$(\eta_+, +\infty)$	С	УУ	30

Таблица 3

Номер подслучая	Диапазон изменения h	Тип точки покоя		Номер рисунка
		$(0, 0)$	$(\pi, 0)$	
1	$(-\infty, \eta_-^-)$	НУ	С	31
2	$(\eta_-^-, -A_1)$	НФ	С	31*
3	$(-A_1, -\xi)$	НФ	С	31*
4	$(-\xi, \eta_+^-)$	НФ	УУ	35*
5	$(\eta_+^-, 0)$	НФ	УФ	35
6	$(0, \eta_+^+)$	НФ	УФ	34
7	(η_+^+, ξ)	НУ	УФ	34*
8	(ξ, A_1)	С	УФ	30*
9	(A_1, η_+^+)	С	УФ	30*
10	$(\eta_+^+, +\infty)$	С	УУ	30

Таблица 4

Номер подслучая	Диапазон изменения h	Тип точки покоя		Номер рисунка
		$(0, 0)$	$(\pi, 0)$	
1	$(-\infty, \eta_-^-)$	НУ	С	31
2	$(\eta_-^-, -A_1)$	НФ	С	31*
3	$(-A_1, \eta_+^+)$	НФ	С	31*
4	$(\eta_+^+, -\xi)$	НУ	С	31
5	$(-\xi, 0)$	НУ	УУ	35*
6	$(0, \xi)$	НУ	УУ	34
7	(ξ, η_+^-)	С	УУ	30
8	(η_+^-, A_1)	С	УФ	30*
9	(A_1, η_+^+)	С	УФ	30*
10	$(\eta_+^+, +\infty)$	С	УУ	30

10.3.2. О траекториях, уходящих на бесконечность на фазовой плоскости

У системы вида (92) при выполнении условия (15) при любом $h \in \mathbb{R}$ не существует фазовой траектории, имеющей горизонтальную или вертикальную асимптоту на фазовой плоскости в окрестности бесконечно удалённой точки (для этого используем методы раздела 4.6).

Лемма 10.1. У системы (92) ($\omega = \Omega$) при условии (15) для любого $h \neq 0$ существуют траектории, уходящие на бесконечность и стремящиеся к некоторым прямым семейства, задаваемого линейной дифференциальной формой $d\Omega + hd\alpha = 0$. При этом в любой малой окрестности любой такой траектории другие траектории стремятся к ней.

На фазовом цилиндре существует одна прямая (с точностью до центральной симметрии), являющаяся асимптотой для траекторий, уходящих на бесконечность.

Лемма 10.2. Бесконечно удалённая точка является притягивающим (при $h > 0$) и отталкивающим (при $h < 0$) сложным узлом.

Следствие 10.1. При $h < 0$ (при $h > 0$) «большинство» фазовых траекторий системы (92) на плоскости имеют в качестве ω -предельного (α -предельного) множества бесконечно удалённую точку.

10.3.3. О замкнутых траекториях различного топологического типа на фазовом цилиндре

Рассмотрим вопрос о существовании замкнутых траекторий различного топологического типа на фазовом цилиндре для систем вида (92). Для начала исследуем вопрос о наличии траекторий, не стягиваемых по фазовому цилиндру в точку, т. е. траекторий, огибающих фазовый цилиндр.

Лемма 10.3. При $h \neq 0$ у систем вида (92) при условии (15) не существует замкнутой фазовой траектории, не стягиваемой по фазовому цилиндру в точку.

Доказательство. Системе (92) поставим в соответствие систему

$$\begin{aligned} \alpha' &= u, \\ u' &= A_2 \mathcal{F}(\alpha) + A_1 u \frac{d}{d\alpha} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha} - h \left(u - A_1 \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha} \right), \end{aligned} \quad (223)$$

полученную неособым преобразованием, заданным в виде

$$u = \Omega + A_1 \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha},$$

переводящим искомые фазовые траектории системы (92) в аналогичные траектории системы (223).

Систему (223) при $h = 0$ обозначим через (223)'.

Характеристическая функция для систем (223) и (223)' имеет вид

$$hu \left(u - A_1 \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha} \right). \quad (224)$$

Она обращается в нуль в верхней полуплоскости $\{(\alpha, u) \in \mathbb{R}^2: u > 0\}$ лишь на кривой

$$\left\{ (\alpha, u) \in \mathbb{R}^2: u = A_1 \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha} \right\}.$$

Фазовый портрет системы 223' изображён на рис. 39. У системы (223)' существует траектория, огибающая фазовый цилиндр и проходящая через точку $(-\frac{\pi}{2}, \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$. Существует также ключевая сепаратриса (см. раздел 6), выходящая из точки $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ и входящая в точку $(\frac{3\pi}{2}, 0)$. Докажем, что ключевые сепаратрисы ограничивают область (см. рис. 39), содержащую кривую контактов векторных полей систем (223) и (223)'.
 Действительно, ключевая сепаратриса пересечёт прямую $\{(\alpha, u) \in \mathbb{R}^2: \alpha = 0\}$ в верхней полуплоскости в точке $(0, u^*)$, где

$$u^* = \int_{-\pi/2}^0 \frac{A_2 \mathcal{F}(\alpha) + A_1 \mathcal{U}(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha}}{\mathcal{U}(\alpha)} d\alpha, \quad (225)$$

и $u = \mathcal{U}(\alpha)$ — уравнение ключевой сепаратрисы, заданной в виде графика в верхней полуплоскости.

Правая часть (225) строго больше W_1 , где

$$W_1 = A_1 \int_{-\pi/2}^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha} d\alpha = -A_1 \mathcal{F}' \left(\frac{\pi}{2} \right).$$

Выполнено неравенство

$$\int_{-\pi/2}^{\alpha} \frac{A_2 \mathcal{F}(a)}{\mathcal{U}(a)} da \geq 0 \quad \text{для всех } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right),$$

поскольку $\mathcal{U}(\alpha) \geq u_1(\alpha)$, где $u = u_1(\alpha)$ — уравнение сепаратрисы системы (223)' при $A_1 = 0$, выходящей из $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ и входящей в $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Тогда

$$-A_1 \mathcal{F}' \left(\frac{\pi}{2} \right) + \int_{-\pi/2}^{\alpha} \frac{A_2 \mathcal{F}(a)}{\mathcal{U}(a)} da + A_1 \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha} > A_1 \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha} \quad \text{для всех } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right),$$

а следовательно, при таких α

$$\mathcal{U}(\alpha) = \int_{-\pi/2}^{\alpha} \frac{A_2 \mathcal{F}(a) + A_1 \mathcal{U}(a) \frac{d}{d\alpha} \frac{\mathcal{F}(a)}{\cos a}}{\mathcal{U}(a)} da > A_1 \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha}.$$

В полосе $\Pi_{(\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2})}$ кривая контактов лежит лишь в замыкании нижней полуплоскости, что и доказывает лемму, поскольку искомая замкнутая траектория, огибающая фазовый цилиндр, вынуждена лежать выше ключевой сепаратрисы в верхней полуплоскости. \square

Дальнейшую часть этого пункта посвятим исследованию траекторий, стягиваемых по цилиндру в точку, в частности изучению возможных предельных циклов на плоскости.

Заметим, что в силу лемм 4.1 и 4.2 у систем вида (92) при некоторых условиях существуют единственные предельные циклы либо в полосе Π , либо в Π' . При этом условие 3) леммы 4.1 является лишним, поскольку в силу леммы 4.6 кривые контактов векторных полей систем (92) и (92)' имеют действительные ветви, лежащие при $h \leq 0$ в полосе Π' , а при $h \geq 0$ — в полосе Π .

Согласно лемме 4.1 пространство Φ разбивается по крайней мере на две части (каждая из которой положительной меры), отвечающие рождению цикла разной устойчивости. Первая часть

$$\text{CH1} = \{\mathcal{F} \in \Phi: \mathcal{F}(\alpha) < \mathcal{F}'(0)|\alpha| \cos \alpha, \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon), \alpha \neq 0\}$$

соответствует рождению устойчивого цикла слева от значения $A_1\mathcal{F}'(0)$, а вторая часть

$$\text{CH2} = \{\mathcal{F} \in \Phi: \mathcal{F}(\alpha) > \mathcal{F}'(0)|\alpha| \cos \alpha, \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon), \alpha \neq 0\} -$$

рождению неустойчивого цикла справа от $A_1\mathcal{F}'(0)$ (ε достаточно мало). Рассмотрим, к примеру, подкласс CH1 функций класса Φ . Очевидно, что $\mathcal{F}_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in \text{CH1}$ ($A, B > 0$).

Лемма 10.4. Если $\mathcal{F} \in \text{CH1}$, то в достаточно малой окрестности начала координат у систем вида (92) на фазовой плоскости при $h > A_1\mathcal{F}'(0)$ не существует замкнутой фазовой характеристики системы (92).

(Аналогичная лемма справедлива для системы (92) при условии $h < A_1\mathcal{F}'(0)$, когда $\mathcal{F} \in \text{CH2}$.)

Следствие 10.2. Если $\mathcal{F}'(0)$ — глобальный максимум функции

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha}$$

при $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то замкнутых кривых, составленных из траекторий систем вида (92), на фазовой плоскости не существует при любом $h > A_1\mathcal{F}'(0)$.

Следствие 10.3. Находясь в условиях предыдущего следствия, можно утверждать, что существует $\underline{h} > 0$, такое что единственный устойчивый предельный цикл у систем вида (92) в полосе Π существует тогда и только тогда, когда $h \in (\underline{h}, A_1\mathcal{F}'(0))$.

Следствие 10.4. В силу последнего следствия, а также в силу некоторой расширенной зеркальной симметрии существует $\bar{h} < 0$, такое что единственный неустойчивый предельный цикл у систем вида (92) в полосе Π' существует тогда и только тогда, когда $h \in (-A_1\mathcal{F}'(0), \bar{h})$.

10.3.4. Топологическая классификация фазовых портретов системы для некоторого подмножества допустимых функций

Для завершения классификации типичных фазовых портретов системы (220) необходимо исследовать поведение сепаратрис имеющихся гиперболических седел. Для краткости изложения опустим данное исследование и приведём сводку окончательных результатов по устройству фазового цилиндра системы (220).

Для случаев 1.1, 1.10, 2.1, 2.2, 2.9, 2.10, 3.1, 3.2, 3.3, 3.8, 3.9, 3.10, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 и только для них положения равновесия (221) и (222) отсутствуют [273].

Информация о соответствии подслучаев для четырёх случаев 1, 2, 3, 4 фазовым портретам показана в табл. 1—4. Звёздочкой помечены портреты, которые различаются лишь топологическим типом некоторых положений равновесия (например, вместо узла имеется фокус той же устойчивости и наоборот), но являются (абсолютно) грубыми.

Проведённая классификация грубых фазовых портретов для некоторой подобласти пространства параметров позволяет сделать вывод о многообразии различных неэквивалентных топологических типов портретов системы (220) при $h_2 \neq 0$.

После проведения исследования устройства фазового цилиндра системы (220) для получения конкретного движения тела на плоскости необходимо дополнительное интегрирование кинематических соотношений.

10.4. Сравнения некоторых классов движений тела в среде при отсутствии и наличии линейного демпфирующего момента

Проследим изменение глобальной топологической структуры фазовых портретов нелинейных систем, описывающих классы плоскопараллельных движений твёрдого тела в среде, при добавлении дополнительного воздействия со стороны среды — линейного демпфирования.

Для начала рассмотрим задачу о движении тела при условии постоянства скорости центра пластины при отсутствии демпфирования со стороны среды (см. раздел 6). Расположение траекторий на плоскости квазискоростей (α, Ω) для этого случая описывается системой (72) и показано на рис. 3.

10.4.1. Общая характеристика траекторий движения тела на плоскости при отсутствии демпфирования со стороны среды

В разделе 6 проведено качественное интегрирование кинематических соотношений для определения положения тела на плоскости.

Кратко отметим некоторые отличительные особенности расположения траекторий системы (72) на фазовом цилиндре $\{(\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \bmod 2\pi\}$, соответствующие некоторым отличительным классам движения тела на плоскости.

1. *Стационарные движения, соответствующие точкам покоя.* Наряду с прямолинейными поступательными движениями тела, перпендикулярными плоской пластине, существуют стационарные вращения с постоянной угловой скоростью (с углом атаки, равным $\pi/2$) вокруг точки W , лежащей на прямой, проходящей через центр масс и центр пластины (в частности, точка может быть бесконечно удалённой). Наличие таких стационарных движений сталкивается с принципиальными противоречиями следующего характера: противоположные края пластины «разрезают» среду в разных направлениях. При этом имеется и сопротивление среды, и момент её сопротивления. Причина этого противоречия состоит в том, что пока в рассматриваемой нелинейной динамической модели не учитывалось влияние вращательных производных момента по угловой скорости.

2. *Замкнутые траектории на фазовом цилиндре.* На фазовом цилиндре $\{(\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2: \alpha \bmod 2\pi\}$ у системы (72) не существует замкнутых кривых, стягиваемых по цилиндру в точку, в частности, не существует предельных циклов на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$.

У системы (72) существует континуум замкнутых фазовых характеристик, не стягиваемых по цилиндру в точку, т. е. огибающих фазовый цилиндр.

3. *Наличие колебательной и вращательной областей.* В силу предыдущего пункта (см. также раздел 6) фазовый цилиндр системы (72) является замыканием двух областей, в каждой из которых траектории имеют свои предельные множества.

В колебательной области (см. рис. 3) почти все траектории «выходят» из отталкивающих точек и «входят» в притягивающие. Колебательная область имеет конечную площадь на фазовом цилиндре.

Вращательная область сплошь заполнена периодическими траекториями, являющимися своими же предельными множествами, и имеет бесконечную площадь на фазовом цилиндре.

Свойство ограниченности плоских движений тела, соответствующих колебательной и вращательной областям на фазовом цилиндре квазискоростей, является обратным к свойству ограниченности самих областей (см. раздел 6). Действительно, компактной колебательной области соответствуют неограниченные плоские движения тела, а неограниченной вращательной области — движения, заполняющие компактные кольцеобразные области.

А теперь проследим изменение структуры расположения фазовых траекторий при наличии линейного демпфирования.

10.4.2. Характеристика некоторых траекторий тела на плоскости при наличии линейного демпфирования

Отметим основные отличительные особенности расположения траекторий системы (220) на фазовом цилиндре $\{(\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2: \alpha \bmod 2\pi\}$ для случая $h_2 > 0$, который, как указано выше, выбран в соответствии с экспериментом (см. разделы 1 и 3).

1. *Стационарные движения тела с конечным углом атаки, меньшим π .* Вместе с прямолинейными поступательными движениями с постоянной скоростью, которые имеются и при $h_2 = 0$, у системы (220) при некоторых условиях имеются седла, лежащие в полосе Π (см. рис. 32, 34, 36). Они соответствуют стационарным движениям следующего вида: центр пластины тела движется по окружности с центром в фиксированной точке плоскости; при этом само тело движется с постоянной угловой скоростью и постоянным углом атаки, меньшим $\pi/2$ (см. раздел 10.3).

Заметим, что при $h_2 \neq 0$ устраняется принципиальное противоречие, связанное с аналогичным стационарным движением при $h_2 = 0$, описанное в предыдущем пункте.

2. *Замкнутые траектории на фазовом цилиндре.* При $h_2 \neq 0$ у системы (220) на фазовом цилиндре отсутствуют замкнутые характеристики, огибающие фазовый цилиндр, что соответствует принципиальному отсутствию длиннопериодических и устойчивых по Пуассону плоских траекторий тела в ограниченных областях плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$.

Как видно из раздела 4, у системы (220) при $h_2 > 0$ в полосе Π при некоторых условиях могут возникнуть устойчивые предельные циклы, соответствующие устойчивым автоколебаниям следующего вида: тело совершает ограниченные по амплитуде плоские угловые колебания вокруг некоторой асимптоты, уходя на бесконечность. Угол атаки при этом лежит на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$.

Интересно проследить формальную асимптотику размера устойчивого предельного цикла от параметра h_2 . При конечном $h_2 = A_1$ устойчивый предельный цикл появляется, с уменьшением h_2 от A_1 до некоторого положительного значения \underline{h}_2 цикл увеличивается в своих размерах как $\sqrt{|A_1 - h_2|}$, а при $h_2 = \underline{h}_2$ исчезает.

3. *Области притяжения на фазовом цилиндре.* Система (220) при $h_2 \neq 0$ становится диссипативной с ненулевым средним. Как следствие, у её фазового цилиндра пропадает какое-либо распределение на колебательную и вращательную области. А именно, почти весь фазовый цилиндр притягивается устойчивыми особыми точками и предельными циклами. Действительно, в случае, показанном на рис. 34, 35, видно, что устойчивая особая точка $(\pi, 0)$ притягивает почти весь фазовый цилиндр. На рис. 32 точка $(\pi, 0)$ и устойчивый предельный цикл также притягивают почти весь цилиндр, а в случае, показанном на рис. 36, почти весь фазовый цилиндр является областью притяжения для двух устойчивых точек $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$.

Если говорить о характере плоских движений твёрдого тела «в целом» при $h_2 > 0$, то главное отличительное свойство для почти всех траекторий таково: *при почти всех начальных условиях твёрдое тело уходит на бесконечность, в отличие от классов плоских движений тела, рассматриваемых без учёта демпфирования со стороны среды.*

Данный раздел явился начальным этапом прикладного исследования движения тела в среде с учётом демпфирующего момента со стороны среды. Такой момент вносит в систему дополнительную диссипацию, в результате

чего прямолинейное поступательное торможение тела в принципе может стать устойчивым.

Для однородных круговых цилиндров прямолинейное поступательное торможение неустойчиво при любых динамических и геометрических параметрах таких цилиндров. Это связано, по-видимому, с движением цилиндров именно в воде, когда демпфирование со стороны среды незначительно, что не позволяет говорить об устойчивости прямолинейного поступательного торможения. А вот для цилиндров, имеющих внутри себя полость, при некоторых условиях возможно достижение упомянутой устойчивости.

Учёт демпфирующего воздействия со стороны среды на твёрдое тело при некоторых условиях приводит к положительному ответу на главный вопрос нелинейного анализа: при движении тела в среде с конечными углами атаки в принципе возможно возникновение устойчивых автоколебаний.

Заключение

Как указано в разделе 1, результаты предлагаемой работы появились благодаря исследованию прикладной задачи о движении твёрдого тела в сопротивляющейся среде, где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выраженных через конечную комбинацию элементарных функций. Это обстоятельство позволило провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, которых обладали грубостью и сохранялись для систем более общего вида. Полная интегрируемость таких систем была связана с симметриями скрытого типа. Поэтому представляет интерес исследование достаточно широких классов динамических систем, обладающих аналогичными скрытыми симметриями.

Так, например, неустойчивость простейшего движения тела — прямолинейного поступательного торможения — используется в методических целях, а именно для определения неизвестных параметров воздействия среды на твёрдое тело в условиях квазистационарности.

Эксперимент о движении в воде однородных круговых цилиндров, проведённый в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова, подтвердил, что при моделировании воздействия среды на твёрдое тело необходимо учитывать также дополнительный параметр, вносящий в систему диссипацию.

При изучении класса торможений тела с конечными углами атаки главным вопросом является нахождение таких условий, при которых существуют автоколебания в конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения. Возникает, таким образом, необходимость полного нелинейного исследования.

Начальным этапом такого исследования является пренебрежение демпфирующим воздействием со стороны среды на твёрдое тело. На функциональном языке это означает предположение о том, что пара динамических функций, определяющих воздействие среды, зависит лишь от одного параметра — угла атаки. Динамические системы, возникающие при таком нелинейном описании, носят

характер систем с переменной диссипацией. Поэтому появляется необходимость создания методика исследования таких систем.

Вообще говоря, динамика твёрдого тела, взаимодействующего со средой, как раз та область, где обычно возникают либо системы с переменной диссипацией с ненулевым средним, либо системы, в которых потеря энергии в среднем за период может обращаться в нуль. В работе получена такая методика, благодаря которой удаётся до конца аналитически исследовать ряд плоских и пространственных модельных задач.

При качественном описании взаимодействия тела со средой по причине использования экспериментальной информации о свойствах струйного обтекания возникает определённый разброс в моделировании силомоментных характеристик. Это делает естественным введение определения относительной грубости (относительной структурной устойчивости) и доказательство такой грубости для исследуемых систем. При этом многие из рассматриваемых систем получаются просто (абсолютно) грубыми по Андронову—Понтрягину.

Основные результаты данной работы следующие:

- предъявлена относительно простая методика определения безразмерных параметров воздействия среды на твёрдое тело в условиях квазистационарности. Данная методика успешно применена для изучения движения тел простой формы — круговых цилиндров, входящих в воду;
- разработаны новые качественные методы исследования систем с переменной диссипацией. Получены условия существования бифуркации рождения устойчивых и неустойчивых автоколебаний. Предъявлены признаки отсутствия любых таких траекторий. Теория плоских топографических систем Пуанкаре и систем сравнения распространена на пространственный случай. Предложена достаточно простая методика доказательства устойчивости по Пуассону незамкнутых траекторий динамических систем. Введены определения относительной структурной устойчивости (относительной грубости) и относительной структурной неустойчивости (относительной негрубости) различных степеней;
- обнаружены новые интегрируемые случаи и семейства фазовых портретов в плоской динамике твёрдого тела. Качественно исследованы и проинтегрированы некоторые модельные варианты движения тела в сопротивляющейся среде. Указаны первые интегралы соответствующих систем, являющиеся трансцендентными функциями и выражающиеся через элементарные функции. Исследована также задача о свободном торможении. Получены новые двухпараметрические семейства топологически неэквивалентных фазовых портретов. Почти каждый портрет семейства (абсолютно) структурно устойчив;
- обнаружены новые интегрируемые случаи и семейства многомерных фазовых портретов в пространственной динамике твёрдого тела. Проинтегрирована задача о пространственном движении динамически симметричного закреплённого твёрдого тела, помещённого в поток набегающей среды. По-

лучено новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о пространственном свободном торможении тела. Почти каждый трёхмерный портрет семейства является (абсолютно) грубым по Андронову—Понтрягину.

Весь спектр результатов, найденных при простейшем предположении об отсутствии демпфирующего воздействия со стороны среды на твёрдое тело, позволяет сделать вывод о невозможности нахождения таких условий, при которых существовали бы автоколебания в конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения.

Заключительная часть работы открывает первый этап исследования движения тела в среде при учёте демпфирующего момента со стороны среды. Такой момент вносит в систему дополнительную диссипацию, в результате чего прямолинейное поступательное торможение тела *в принципе может стать устойчивым*.

Таким образом, для однородных круговых цилиндров прямолинейное поступательное торможение неустойчиво при любых динамических и геометрических параметрах, что, по-видимому, связано с движением цилиндров именно в воде. А вот для цилиндров, имеющих внутри себя полость, при некоторых условиях в принципе возможно достижение устойчивости прямолинейного поступательного торможения.

Поэтому учёт демпфирующего воздействия со стороны среды на твёрдое тело при некоторых условиях приводит к положительному ответу на главный вопрос нелинейного анализа: при движении тела в среде с конечными углами атаки в принципе возможно возникновение устойчивых автоколебаний.

Данная работа также открывает новый цикл исследовательских работ по нелинейному анализу движения тела в сопротивляющейся среде в условиях квазистационарности при учёте демпфирования со стороны среды.

Всё перечисленное выше позволяет оценивать результаты работы в совокупности как *новое направление в качественной теории дифференциальных уравнений, а также в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00231-а).

Литература

- [1] Агафонов С. А., Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Некоторые актуальные задачи геометрии и механики. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 34.
- [2] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Некоторое уточнение алгоритма Конвея // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2005. — № 3. — С. 53—55.

- [3] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Архимедовы равномерные структуры. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 46—51.
- [4] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Многообразия непрерывных структур. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 71—86.
- [5] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Общий спектральный подход к динамике сплошной среды. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 52—70.
- [6] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Феноменологический подход к определению межфазных сил // Докл. РАН. — 2007. — Т. 412, № 1. — С. 44—47.
- [7] Альев Г. А. Пространственная задача о погружении диска в сжимаемую жидкость // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1988. — № 1. — С. 17—20.
- [8] Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. — Минск: Изд-во БГУ, 1982.
- [9] Андронов А. А. Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
- [10] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
- [11] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра // Учёные записки ГГУ. — 1937. — Вып. 6.
- [12] Андронов А. А., Леонтович Е. А. К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории // ДАН СССР. — 1938. — Т. 21, вып. 9.
- [13] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла // Мат. сб. — 1956. — Т. 40, вып. 2.
- [14] Андронов А. А., Леонтович Е. А. О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло—узел // Мат. сб. — 1959. — Т. 48, вып. 3.
- [15] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Динамические системы первой степени негрубости на плоскости // Мат. сб. — 1965. — Т. 68, вып. 3.
- [16] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Достаточные условия для негрубости первой степени динамической системы на плоскости // Дифференц. уравн. — 1970. — Т. 6, № 12.
- [17] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.
- [18] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1967.
- [19] Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // ДАН СССР. — 1937. — Т. 14, № 5. — С. 247—250.
- [20] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР. Т. 90. — М.: Наука, 1967.
- [21] Аппель П. Теоретическая механика. — М.: Физматгиз, 1960.
- [22] Арансон С. Х. Динамические системы на двумерных многообразиях // Тр. Пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 2. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970.

- [23] Арансон С. Х., Гринес В. З. Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях // Успехи мат. наук. — 1986. — Т. 41, вып. 1.
- [24] Арнольд В. И. Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твёрдого тела в идеальной жидкости // Успехи мат. наук. — 1969. — Т. 24, № 3. — С. 225—226.
- [25] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
- [26] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.
- [27] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
- [28] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. — М.: ВИНТИ, 1985.
- [29] Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твёрдого тела. — М.: Наука, 1977.
- [30] Бабаков И. М. Теория колебаний. — М.: Наука, 1965.
- [31] Бабицкий В. И., Крупенин В. Л. Колебания в сильно нелинейных системах. — М.: Наука, 1985.
- [32] Баггис Г. Ф. Грубые системы двух дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1955. — Т. 10, вып. 4.
- [33] Базыкин А. Д., Кузнецов Ю. А., Хибник А. И. Бифуркационные диаграммы динамических систем на плоскости. Информационный материал. — Пушкино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985.
- [34] Барбашин Е. А., Табуева В. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. — М.: Наука, 1969.
- [35] Баутин Н. Н. О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокус или центр // Мат. сб. — 1952. — Т. 30 (72), вып. 1.
- [36] Баутин Н. Н. Об аппроксимации и грубости пространства параметров динамической системы // Тр. Пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970.
- [37] Баутин Н. Н. Некоторые методы качественного исследования динамических систем, связанные с поворотом поля // Прикл. математика и механика. — 1973. — Т. 37, вып. 6.
- [38] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.
- [39] Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.
- [40] Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
- [41] Белецкий В. В., Яншин А. М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. — Киев: Наукова думка, 1984.
- [42] Беляев А. В. О движении многомерного тела с закреплённой точкой в поле силы тяжести // Мат. сб. — 1981. — Т. 114, № 3. — С. 465—470.
- [43] Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // Успехи мат. наук. — 1941. — Т. 9.
- [44] Берже М. Геометрия. — М.: Мир, 1984.

- [45] Бессе А. Л. Многообразия с замкнутыми геодезическими. — М.: Мир, 1981.
- [46] Бивин Ю. К. Изменение направления движения твёрдого тела на границе раздела сред // Изв. АН СССР. МТТ. — 1981. — № 4. — С. 105—109.
- [47] Бивин Ю. К., Викторов В. В., Степанов Л. П. Исследование движения твёрдого тела в глинистой среде // Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — № 2. — С. 159—165.
- [48] Бивин Ю. К., Глухов Ю. М., Пермяков Ю. В. Вертикальный вход твёрдых тел в воду // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1985. — № 6. — С. 3—9.
- [49] Биркгоф Дж. Динамические системы. — М.; Л.: Гостехиздат, 1941.
- [50] Бишоп Р. Л. Колебания. — М.: Наука, 1986.
- [51] Блисс Дж. А. Лекции по вариационному исчислению. — М.; Л.: Гостехиздат, 1941.
- [52] Богаевский В. Н., Повзнер А. Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. — М.: Наука, 1987.
- [53] Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. — М.: Наука, 1980.
- [54] Богоявленский О. И. Динамика твёрдого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // ДАН СССР. — 1983. — Т. 272, № 6. — С. 1364—1367.
- [55] Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН СССР. — 1986. — Т. 287, № 5. — С. 1105—1108.
- [56] Богоявленский О. И., Ивах Г. Ф. Топологический анализ интегрируемых случаев В. А. Стеклова // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, № 4. — С. 145—146.
- [57] Бойко Г. Л., Ерошин В. А. Определение перегрузок при ударе профиля о поверхность жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1975. — № 1. — С. 35—38.
- [58] Болотин С. В. О первых интегралах систем с гироскопическими силами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1984. — № 6. — С. 75—82.
- [59] Болотин С. В., Козлов В. В. Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1980. — № 4. — С. 84—89.
- [60] Борисёнок И. Т., Локшин Б. Я., Привалов В. А. О динамике полёта осесимметричных вращающихся тел в воздушной среде // Изв. АН СССР. МТТ. — 1984. — № 2. — С. 35—42.
- [61] Борисёнок И. Т., Шамолин М. В. Алгоритмы решения задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. мат. конф. «Еругинские чтения III» (Брест, 14—16 мая 1996 г.). — Брест, 1996. — С. 102.
- [62] Борисёнок И. Т., Шамолин М. В. Существование и единственность решения общей задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. 5 Междунар. совещания—семинара «Инженерно-физические проблемы новой техники» (Москва, 19—22 мая 1998 г.). — М.: Изд-во МГТУ, 1998. — С. 6—7.
- [63] Борисёнок И. Т., Шамолин М. В. Существование решения общей задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. Конф., посвящ. 40-летию Института механики МГУ (22—26 ноября 1999 г.). — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. — С. 259—260.
- [64] Борисёнок И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундамент. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 3. — С. 775—790.
- [65] Борисёнок И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2001. — № 1. — С. 29—31.

- [66] Борисёнок И. Т., Шамолин М. В. Расширенная задача дифференциальной диагностики. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 308.
- [67] Борисёнок И. Т., Шамолин М. В. Расширенная задача дифференциальной диагностики. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // *Современная математика. Фундаментальные направления*. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 20—21.
- [68] Браилов А. В. Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения // *ДАН СССР*. — 1983. — Т. 268, № 5. — С. 1043—1046.
- [69] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979.
- [70] Бурбаки Н. Интегрирование. — М.: Наука, 1970.
- [71] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.
- [72] Буров А. А. Неинтегрируемость уравнений плоских колебаний спутника на эллиптической орбите // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика*. — 1984. — № 1. — С. 71—73.
- [73] Буров А. А., Субханкулов Г. И. О движении твёрдого тела в магнитном поле // *Прикл. математика и механика*. — 1986. — Т. 50, № 6. — С. 960—966.
- [74] Бутенина Н. Н. Бифуркации сепаратрис двумерной динамической системы при повороте поля. Качественные методы теории дифференциальных уравнений и их приложения // *Учёные записки ГГУ*. — 1973. — Вып. 187.
- [75] Бутенина Н. Н. Бифуркации сепаратрис и предельных циклов двумерной динамической системы при повороте поля // *Дифференц. уравн.* — 1973. — Т. 9, № 8.
- [76] Бутенина Н. Н. К теории бифуркаций динамических систем при повороте поля // *Дифференц. уравн.* — 1974. — Т. 10, № 7.
- [77] Бутенина Н. Н. О возможности поворота векторного поля динамической системы на угол с переходом лишь через системы первой степени негрубости // *Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика*. — Горький, 1974.
- [78] Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. — М.: Наука, 1972.
- [79] Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика продольного и бокового движения. — М.: Машиностроение, 1969.
- [80] Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолёта. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1988.
- [81] Бялый М. Л. О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе // *Функц. анализ и его прил.* — 1987. — Т. 21, № 4. — С. 64—65.
- [82] Валле Пуссен Ш. Ж. Лекции по теоретической механике. — М.: ИЛ, 1948—1949.
- [83] Веселова Л. Е. О динамике тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика*. — 1985. — № 3. — С. 64—67.
- [84] Вишик С. В., Должанский С. Ф. Аналоги уравнений Эйлера—Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли // *ДАН СССР*. — Т. 238, № 5. — С. 1032—1035.
- [85] Врублевская И. Н. О геометрической эквивалентности траекторий и полутраекторий динамических систем // *Мат. сб.* — 1947. — Т. 42.

- [86] Врублевская И. Н. Некоторые критерии эквивалентности траекторий и полутраекторий динамических систем // ДАН СССР. — 1954. — Т. 97, № 2.
- [87] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1960.
- [88] Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрия и механика: задачи, подходы, методы. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 301.
- [89] Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрия и механика: задачи, подходы, и методы. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 16.
- [90] Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. О некоторых топологических инвариантах потоков с комплексным потенциалом. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 305.
- [91] Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. О некоторых топологических инвариантах потоков с комплексным потенциалом. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 19.
- [92] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твёрдого тела с неподвижной точкой в \mathbb{R}^n // Докл. РАН. — 2001. — Т. 380, № 1. — С. 47–50.
- [93] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. О кинематике твёрдого тела с неподвижной точкой в \mathbb{R}^n . Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 315.
- [94] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщённые динамические уравнения Эйлера для твёрдого тела с неподвижной точкой в \mathbb{R}^n // Докл. РАН. — 2002. — Т. 383, № 5. — С. 635–637.
- [95] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщённого гироскопа в \mathbb{R}^n // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
- [96] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Валерий Владимирович Трофимов // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 5–6.
- [97] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. О кинематике твёрдого тела с неподвижной точкой в \mathbb{R}^n . Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 24–25.
- [98] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщённые динамические уравнения Эйлера для твёрдого тела с неподвижной точкой в \mathbb{R}^n . Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 30.
- [99] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщённого гироскопа в n -мерном пространстве. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 31.
- [100] Гледзер Е. Б., Должанский Ф. С., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их приложения. — М.: Наука, 1981.

- [101] Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1973.
- [102] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
- [103] Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки. — М.; Л.: Гостехиздат, 1953.
- [104] Горлин С. М. Экспериментальная аэродинамика. — М.: Высшая школа, 1970.
- [105] Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. Классические задачи динамики твёрдого тела. — Киев: Наукова думка, 1978.
- [106] Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Варшав. унив. изв. — 1916. — Кн. 3. — С. 1—15.
- [107] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и производных. — М.: Гостехиздат, 1963.
- [108] Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979.
- [109] Гриффитс Ф. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. — М.: Мир, 1986.
- [110] Гробман Д. М. О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. — 1959. — Т. 128, № 5. — С. 880—881.
- [111] Гробман Д. М. Топологическая классификация окрестностей особой точки в n -мерном пространстве // Мат. сб. — 1962. — Т. 56, № 1. — С. 77—94.
- [112] Гудков Д. А. О понятии грубости и степеней негрубости для плоских алгебраических кривых // Мат. сб. — 1965. — Т. 67, № 4. — С. 481—527.
- [113] Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.
- [114] Джакалья Г. Е. Методы теории возмущений для линейных систем. — М.: Наука, 1967.
- [115] Довбыш С. А. Пересечение асимптотических поверхностей возмущённой задачи Эйлера—Пуансо // Прикл. математика и механика. — 1987. — Т. 51, № 3. — С. 363—370.
- [116] Довбыш С. А. Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // Успехи мат. наук. — 1989. — Т. 44, № 2. — С. 229—230.
- [117] Довбыш С. А. Расщепление сепаратрис неустойчивых равномерных вращений и неинтегрируемость возмущённой задачи Лагранжа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1990. — № 3. — С. 70—77.
- [118] Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа // ДАН СССР. — 1984. — Т. 279, № 2. — С. 294—297.
- [119] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
- [120] Дюлак Г. О предельных циклах. — М.: Наука, 1980.
- [121] Ерошин В. А. Проникание конуса в жидкий слой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1963. — № 5. — С. 53—59.
- [122] Ерошин В. А. Рикошет пластинки от поверхности идеальной несжимаемой жидкости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1970. — № 6. — С. 99—104.

- [123] Ерошин В. А. Погружение диска в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1983. — № 2. — С. 142—144.
- [124] Ерошин В. А. Экспериментальное изучение волн сжатия, возбуждающихся в упругом цилиндре при входе в воду // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Вып. 46. — Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1990. — С. 54—59.
- [125] Ерошин В. А. Проникание упругого цилиндра в воду с большой скоростью. — Препринт № 5. — М.: Ин-т механики МГУ, 1991.
- [126] Ерошин В. А. Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН. МЖГ. — 1992. — № 5. — С. 20—30.
- [127] Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И., Якимов Ю. Л. Экспериментальное определение давления на диске при погружении в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1988. — № 2. — С. 21—25.
- [128] Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И., Якимов Ю. Л. Экспериментальное определение момента гидродинамических сил при несимметричном проникании диска в сжимаемую жидкость // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1990. — № 5. — С. 88—94.
- [129] Ерошин В. А., Плюснин А. В., Созоненко Ю. А., Якимов Ю. Л. О методике исследования изгибных колебаний упругого цилиндра при входе в воду под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1989. — № 6. — С. 164—167.
- [130] Ерошин В. А., Привалов В. А., Самсонов В. А. Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. Вып. 18. — М.: Наука, 1987. — С. 75—78.
- [131] Ерошин В. А., Романенков Н. И., Серебряков И. В., Якимов Ю. Л. Гидродинамические силы при ударе тупых тел о поверхность сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1980. — № 6. — С. 44—51.
- [132] Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. О движении тела в среде при струйном обтекании // Тез. Всесоюз. конф. по устойчивости движения, колебаниям механических систем и аэродинамике (Москва, 2—4 февраля 1988 г.). — М.: МАИ, 1988. — С. 21. — Деп. в ВИНТИ 22.12.88, № 8886-В-88.
- [133] Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании. Тез. докл. Чебышёвских чтений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1995. — № 6. — С. 17.
- [134] Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. МЖГ. — 1995. — № 3. — С. 23—27.
- [135] Жуковский Н. Е. О падении лёгких, продолговатых тел, вращающихся вокруг своей продольной оси // Полное собрание сочинений. Т. 5. — М.: Физматгиз, 1937. — С. 72—80, 100—115.
- [136] Жуковский Н. Е. О парении птиц // Полное собрание сочинений. Т. 5. — М.: Физматгиз, 1937. — С. 49—59.
- [137] Журавлёв Ю. Ф. Погружение в жидкость диска под углом к свободной поверхности // Сборник работ по гидродинамике. — М.: ЦАГИ, 1959. — С. 164—167.
- [138] Журавлёв В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. — М.: Наука, 1988.

- [139] Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. — М.; Л.: Гостехиздат, 1938.
- [140] Златин Н. А., Красильщиков А. П., Мишин Г. И., Попов Н. Н. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. — М.: Наука, 1974.
- [141] Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики // Мат. заметки. — 1992. — Т. 52, вып. 2. — С. 43–51.
- [142] Ильяшенко Ю. С. Мемуар Дюлака «О предельных циклах» и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, вып. 6. — С. 41–78.
- [143] Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. — М.: Наука, 1976.
- [144] Каток А. Б. Динамические системы с гиперболической структурой // 9-я летняя мат. школа. — Киев, 1972. — С. 125–211.
- [145] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Беркелеевский курс физики. Т. 1. Механика. — М.: Наука, 1983.
- [146] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
- [147] Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твёрдого тела. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
- [148] Козлов В. В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1983. — № 6. — С. 10–22.
- [149] Козлов В. В. Замечания о стационарных вихревых движениях сплошной среды // Прикл. математика и механика. — 1983. — Т. 47, вып. 2. — С. 341–342.
- [150] Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. — 1983. — Т. 38, № 1. — С. 3–67.
- [151] Козлов В. В. К задаче о вращении твёрдого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. — 1985. — № 6. — С. 28–33.
- [152] Козлов В. В. О падении тяжёлого твёрдого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. — 1989. — № 5. — С. 10–17.
- [153] Козлов В. В. Вихревая теория волчка // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1990. — № 4. — С. 56–62.
- [154] Козлов В. В. К задаче о падении тяжёлого твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1990. — № 1. — С. 79–87.
- [155] Козлов В. В. О стохастизации плоскопараллельных течений идеальной жидкости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1991. — № 1. — С. 72–76.
- [156] Козлов В. В., Колесников Н. Н. Об интегрируемости гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1979. — № 6. — С. 88–91.
- [157] Козлов В. В., Онищенко Д. А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // ДАН СССР. — 1982. — Т. 266, № 6. — С. 1298–1300.
- [158] Колесников Н. Н. Натуральные системы с разрешимой группой симметрий // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1978. — № 5. — С. 99–103.

- [159] Колмогоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика // Международный математический конгресс в Амстердаме. — М.: Физматгиз, 1961. — С. 187—208.
- [160] Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости. — М.: Физматгиз, 1963.
- [161] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Новые методы нелинейной механики. — М.; Л.: ОНТИ, 1934.
- [162] Крылов Н. Н., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. — М.: Изд-во АН СССР, 1937.
- [163] Кушниренко А. Г. Задачи общей теории динамических систем на многообразиях // 9-я летняя мат. школа. — Киев, 1972. — С. 52—124.
- [164] Ламб Г. Гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1947.
- [165] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1968.
- [166] Левшеч С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1961.
- [167] Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.
- [168] Леонтович Е. А. К вопросу определения грубой динамической системы // Nonlinear vibrations problems. Second Conf. on Nonlinear Vibrations. — Warsaw, 1964.
- [169] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // ДАН СССР. — 1937. — Т. 14, № 5. — С. 251—254.
- [170] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // ДАН СССР. — 1955. — Т. 103, № 4.
- [171] Леонтович Е. А., Шильников Л. П. Современное состояние теории бифуркаций динамических систем. Качественные методы теории нелинейных колебаний. Т. 2. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970.
- [172] Лич Дж. У. Классическая механика. — М.: ИЛ, 1961.
- [173] Локшин Б. Я. Об одном движении быстро вращающегося тела в воздухе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1970. — № 6. — С. 93—98.
- [174] Локшин Б. Я. Об устойчивости плоского движения быстро вращающегося симметричного тела в атмосфере // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1971. — № 4. — С. 113—118.
- [175] Локшин Б. Я. О винтовом движении быстро вращающегося твёрдого симметричного тела в воздухе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1973. — № 4. — С. 79—86.
- [176] Локшин Б. Я. Об устойчивости стационарных движений быстро вращающегося симметричного твёрдого тела в воздухе // Изв. АН СССР. МТТ. — 1976. — № 2. — С. 18—24.
- [177] Локшин Б. Я., Окунев Ю. М., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Некоторые интегрируемые случаи пространственных колебаний твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. XXI научных чтений по космонавтике (Москва, 28—31 января 1997 г.). — М.: ИИЕТ РАН, 1997. — С. 82—83.
- [178] Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
- [179] Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.

- [180] Локшин Б. Я., Черкасов О. Ю. О структуре оптимальных траекторий движения вращающегося твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1990. — № 1. — С. 63—68.
- [181] Лунёв В. В. Гидродинамическая аналогия задачи о движении твёрдого тела с неподвижной точкой в поле сил Лоренца // ДАН СССР. — 1984. — Т. 276, № 2. — С. 351—355.
- [182] Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твёрдого тела в жидкости // Собрание сочинений. Т. I. — М.: Изд-во АН СССР, 1954. — С. 320—324.
- [183] Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехтеориздат, 1956.
- [184] Манин Ю. И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки. Вып. 11. Современные проблемы математики. — М.: ВИНТИ, 1978. — С. 5—112.
- [185] Маркеев А. П. Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. — 1986. — № 1. — С. 64—65.
- [186] Маркеев А. П. Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990.
- [187] Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения. — М.: Мир, 1986.
- [188] Миллер У. Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981.
- [189] Митропольский Ю. А., Лопатин А. К. Асимптотическая декомпозиция систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. — Препринт Ин-та математики АН УССР № 86-71. — Киев, 1986.
- [190] Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973.
- [191] Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1969.
- [192] Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965.
- [193] Нагаев Р. Ф., Ходжаев К. Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. — Ташкент: Изд-во «Фан», 1973.
- [194] Неймарк Ю. И. О движениях, близких к двоякоасимптотическому движению // ДАН СССР. — 1967. — Т. 172, № 5. — С. 1021—1024.
- [195] Неймарк Ю. И. Структура движений динамической системы в окрестности гомоклинической кривой // 5-я летняя мат. школа. — Киев, 1968. — С. 400—435.
- [196] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неавтономных систем. — М.: Наука, 1967.
- [197] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
- [198] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.
- [199] Новиков С. П., Шмельцер И. Периодические решения уравнения Кирхгофа свободного движения твёрдого тела и идеальной жидкости и расширенная теория Люстерника—Шнирельмана—Морса (ЛМШ). I // Функц. анализ и его прил. — 1981. — Т. 15, № 3. — С. 54—66.

- [200] Одареев В. А. Декомпозиционный анализ динамики и устойчивости продольного возмущённого движения экраноплана: Дис... докт. физ.-мат. наук. — М., МГАИ, 1995.
- [201] Окунев Ю. М., Привалов В. А., Самсонов В. А. Некоторые задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Тр. Всесоюзной конф. «Нелинейные явления». — М.: Наука, 1991. — С. 140—144.
- [202] Окунев Ю. М., Садовничий В. А. Модельные динамические системы одной задачи внешней баллистики и их аналитические решения // Проблемы современной механики / Под ред. С. С. Григоряна. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — С. 28—46.
- [203] Окунев Ю. М., Садовничий В. А., Самсонов В. А., Чёрный Г. Г. Комплекс моделирования задач динамики полёта // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1996. — № 6. — С. 66—75.
- [204] Пали Дж., Смейл С. Теоремы структурной устойчивости // Сборник переводов «Математика». — 1969. — Т. 13, № 2. — С. 145—155.
- [205] Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. — М.: Мир, 1986.
- [206] Переломов А. М. Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твёрдого тела в идеальной жидкости // Функц. анализ и его прил. — 1981. — Т. 15, вып. 2. — С. 83—85.
- [207] Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Гостехиздат, 1952.
- [208] Плисс В. А. О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе // Вестн. ЛГУ. Сер. матем. — 1960. — Т. 13. — С. 15—23.
- [209] Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. — М.; Л.: Наука, 1964.
- [210] Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1967.
- [211] Плисс В. А. Об устойчивости произвольной системы по отношению к малым в смысле C возмущениям // Дифференц. уравн. — 1980. — Т. 16, № 10. — С. 1891—1892.
- [212] Погосян Т. И. Построение бифуркационных множеств в одной задаче динамики твёрдого тела // Изв. АН СССР. МТТ. — 1980. — Т. 12. — С. 9—16.
- [213] Привалов В. А., Самсонов В. А. Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды // Изв. АН СССР. МТТ. — 1990. — № 2. — С. 32—38.
- [214] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
- [215] Пуанкаре А. Новые методы в небесной механике // Избранные труды. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1971, 1972.
- [216] Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983.
- [217] Рейссинг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1974.
- [218] Рыжова В. Е., Шамолин М. В. О некоторых аналогиях в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Седьмой всесоюзный съезд по теор. и прикл. механ. Москва, 15—21 августа 1991 г. — М., 1991. — С. 305.
- [219] Садэтов С. Т. Условия интегрируемости уравнений Кирхгофа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1990. — № 3. — С. 56—62.

- [220] Сальникова Т. В. Об интегрируемости уравнений Кирхгофа в симметричном случае // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1985. — № 4. — С. 68—71.
- [221] Самсонов В. А. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений в некоторых случаях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1962. — № 5. — С. 74—78.
- [222] Самсонов В. А. Об устойчивости равновесия физического маятника с жидким наполнением // Прикл. математика и механика. — 1966. — Т. 30, вып. 6. — С. 1112—1114.
- [223] Самсонов В. А. О задаче минимума функционала при исследовании устойчивости движения тела с жидким наполнением // Прикл. математика и механика. — 1967. — Т. 31, вып. 3. — С. 523—526.
- [224] Самсонов В. А. О квазистационарных движениях механических систем // Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — № 1. — С. 32—5.
- [225] Самсонов В. А. Очерки о механике. Некоторые задачи, явления и парадоксы. — М.: Наука, 1980.
- [226] Самсонов В. А. О вращении тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. — 1984. — № 4. — С. 32—34.
- [227] Самсонов В. А., Ерошин В. А., Константинов Г. А., Макашкин В. М. Две модельные задачи о движении тела в среде при струйном обтекании: Научный отчёт Ин-та механики МГУ № 3427. — М., 1987.
- [228] Самсонов В. А., Козлов В. В., Шамолин М. В. Редукция в задаче о движении тела в среде при струйном обтекании // Современные проблемы механики и технологии машиностроения. Всесоюзная конференция (16—18 апреля 1989 г.). Пленарный доклад. — М.: ВИНТИ, 1989.
- [229] Самсонов В. А., Локшин Б. Я., Привалов В. А. Качественный анализ: Научный отчёт Ин-та механики МГУ № 3245. — М., 1985.
- [230] Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1989. — № 3. — С. 51—54.
- [231] Самсонов В. А., Шамолин М. В. О движении тела в сопротивляющейся среде // Современные проблемы механики и технологии машиностроения. Всесоюзная конф. (16—18 апреля 1989 г.). Тез. докл. — М.: ВИНТИ, 1989. — С. 128—129.
- [232] Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием: Научный отчёт Ин-та механики МГУ № 3969. — М., 1990.
- [233] Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием // Нелинейные колебания механических систем. Тез. докл. II Всесоюзн. конф. (Горький, сентябрь 1990 г.). Ч. 2. — Горький, 1990. — С. 95—96.
- [234] Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании: Научный отчёт Ин-та механики МГУ № 4141. — М., 1991.
- [235] Самсонов В. А., Шамолин М. В. Об устойчивости вращения тела при его торможении в сопротивляющейся среде // VII Четаевская конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением» (10—13 июня 1997 г.). Тез. докл. — Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 1997. — С. 24.

- [236] Самсонов В. А., Шамолин М. В., Ерошин В. А., Макашкин В. М. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании: Научный отчёт Ин-та механики МГУ № 4396. — М., 1995.
- [237] Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1954.
- [238] Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1983, 1984.
- [239] Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Расширенная модель Кана—Хилларда и некоторые её решения // Материалы Воронежской весенней мат. школы «Понтрягинские чтения — XVIII», Воронеж, май 2007 г. — Воронеж: Изд-во Воронежского гос. ун-та, 2007. — С. 145—146.
- [240] Синг Дж. Л. Классическая динамика. — М.: Физматгиз, 1963.
- [241] Смейл С. Грубые системы не плотны. — Сборник переводов «Математика». — 1967. — Т. 11, № 4. — С. 107—112.
- [242] Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // Успехи мат. наук. — 1970. — Т. 25, № 1. — С. 113—185.
- [243] Старжинский В. М. Прикладные методы нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1977.
- [244] Стеклов В. А. О движении твёрдого тела в жидкости. — Харьков, 1893.
- [245] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959.
- [246] Стрекалов В. В. Рикошет при входе в воду диска, плоскость которого близка к вертикальной // Учёные записки ЦАГИ. — 1977. — Т. 8, № 5. — С. 66—73.
- [247] Суворова Е. И., Шамолин М. В. Топографические системы Пуанкаре и системы сравнения высших порядков // Мат. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж, 26 января — 2 февраля 2003 г. — Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2003. — С. 251—252.
- [248] Суслов Г. К. Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946.
- [249] Сычёв В. В., Рубан А. И., Сычёв Вик. В., Королёв Г. Л. Асимптотическая теория отрывных течений. — М.: Наука, 1987.
- [250] Табачников В. Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всём диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. — 1974. — Вып. 1621. — С. 18—24.
- [251] Татаринов Я. В. Лекции по классической динамике. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
- [252] Трофимов В. В. Вложения конечных групп регулярными элементами в компактные группы Ли // ДАН СССР. — 1976. — Т. 226, № 4. — С. 785—786.
- [253] Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — Т. 44, № 5. — С. 1191—1199.
- [254] Трофимов В. В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1984. — № 6. — С. 31—33.
- [255] Трофимов В. В. Геометрические инварианты вполне интегрируемых систем // Тез. докл. Всесоюз. конф. по геометрии «в целом». — Новосибирск, 1987. — С. 121.
- [256] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. — 1980. — Т. 254, № 6. — С. 1349—1353.

- [257] Трофимов В. В., Шамолин М. В. Диссипативные системы с нетривиальными обобщёнными классами Арнольда—Маслова. Тез. докл. семинара по векторному и тензорному анализу им. П. К. Рашевского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2000. — № 2. — С. 62.
- [258] Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. — М.: ОНТИ, 1937.
- [259] Фахрутдинова Р. Р., Шамолин М. В. О сохранении фазового объёма в динамических системах с переменной диссипацией «с нулевым средним». Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 311.
- [260] Фахрутдинова Р. Р., Шамолин М. В. О сохранении фазового объёма в динамических системах с переменной диссипацией «с нулевым средним». Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 22.
- [261] Фоменко А. Т. Реализация циклов в компактных симметрических пространствах вполне геодезическими подмногообразиями // ДАН СССР. — 1970. — Т. 195, № 4. — С. 789—792.
- [262] Фоменко А. Т. Полная интегрируемость некоторых классических гамильтоновых систем // Моногенные функции и отображения. — Киев: Ин-т математики АН СССР. — 1982. — С. 3—19.
- [263] Фоменко А. Т. Об абсолютных минимумах функционала объёма и функционала Дирихле на римановых многообразиях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1983. — № 6. — С. 87—94.
- [264] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
- [265] Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. — М.: Мир, 1968.
- [266] Чаплыгин С. А. О движении тяжёлых тел в несжимаемой жидкости // Полное собрание сочинений. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133—135.
- [267] Чаплыгин С. А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
- [268] Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980.
- [269] Шамолин М. В. Качественный анализ модельной задачи о движении тела в среде со струйным обтеканием: Дис... канд. физ.-мат. наук. — М., МГУ, 1991.
- [270] Шамолин М. В. Качественный анализ модельной задачи о движении тела в среде со струйным обтеканием: Автореферат дис... канд. физ.-мат. наук. — М., 1991.
- [271] Шамолин М. В. Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1992. — № 2. — С. 52—56.
- [272] Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1992. — № 1. — С. 52—58.
- [273] Шамолин М. В. Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента // Прикл. математика и механика. — 1993. — Т. 57, вып. 4. — С. 40—49.
- [274] Шамолин М. В. Новое дупараметрическое семейство фазовых портретов задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. (24—28 мая 1993 г.): Тез. докл. Ч. 2. — Киев: Знание, 1993. — С. 62—63.

- [275] Шамолин М. В. Относительная структурная устойчивость задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // *Механика и её применения*. Научн. конф. 9–11 ноября 1993 г.: Тез. докл. — Ташкент: ТашГУ, 1993. — С. 20–21.
- [276] Шамолин М. В. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика*. — 1993. — № 2. — С. 66–70.
- [277] Шамолин М. В. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удалённые точки, для динамических систем на плоскости // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика*. — 1993. — № 1. — С. 68–71.
- [278] Шамолин М. В. Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // *Докл. РАН*. — 1994. — Т. 337, № 5. — С. 611–614.
- [279] Шамолин М. В. Об относительной грубости динамических систем в задаче о движении тела в среде при струйном обтекании // *Моделирование и исследование устойчивости систем*. Научн. конф. (16–20 мая 1994 г.): Тез. докл. — Киев, 1994. — С. 144–145.
- [280] Шамолин М. В. Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов с предельными циклами в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // *Моделирование и исследование устойчивости систем*. Научн. конф. (15–19 мая 1995 г.): Тез. докл. (Исследование систем). — Киев, 1995. — С. 125.
- [281] Шамолин М. В. Об относительной грубости динамических систем в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика*. — 1995. — № 6. — С. 17.
- [282] Шамолин М. В. Относительная структурная устойчивость динамических систем задачи движения тела в среде // *Аналитические, численные и экспериментальные методы в механике: Сб. научн. трудов / Под ред. Б. Е. Победри и В. В. Козлова*. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. — С. 14–19.
- [283] Шамолин М. В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика*. — 1996. — № 4. — С. 57–69.
- [284] Шамолин М. В. Введение в пространственную динамику движения твёрдого тела в сопротивляющейся среде // *Материалы междунар. конф. и Чебышёвских чтений, посвящ. 175-летию со дня рожд. П. Л. Чебышёва (Москва, 14–19 мая 1996 г.)*. Т. 2. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1996. — С. 371–373.
- [285] Шамолин М. В. Качественные методы в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // *II Сибирский конгр. по прикл. и индустр. мат. (Новосибирск, 25–30 июня 1996 г.)*: Тез. докл. Ч. III. — Новосибирск, 1996. — С. 267.
- [286] Шамолин М. В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // *Докл. РАН*. — 1996. — Т. 349, № 2. — С. 193–197.
- [287] Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае в динамике пространственного движения тела в сопротивляющейся среде // *II Симпозиум по классической и небесной механике*. Тез. докл. (Великие Луки, 23–28 августа 1996 г.). — М.: Великие Луки, 1996. — С. 91–92.

- [288] Шамолин М. В. Определение относительной грубости и двухпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твёрдого тела // *Успехи мат. наук.* — 1996. — Т. 51, вып. 1. — С. 175—176.
- [289] Шамолин М. В. Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // *Изв. РАН. МТТ.* — 1996. — № 2. — С. 55—63.
- [290] Шамолин М. В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // *Тез. докл. мат. конф. «Еругинские чтения III»* (Брест, 14—16 мая 1996 г.). — Брест, 1996. — С. 107.
- [291] Шамолин М. В. Список интегралов динамических уравнений в пространственной задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // *Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. (20—24 мая 1996 г.): Тез. докл. (Исследование систем).* — Киев, 1996. — С. 142.
- [292] Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби задачи о пространственном маятнике, помещённом в поток набегающей среды // *Моделирование и исследование устойчивости систем (Modelling and Investigation of System Stability). Научн. конф. (19—23 мая 1997): Тез. докл. (Mechanical Systems).* — Киев, 1997. — С. 143.
- [293] Шамолин М. В. Качественные методы в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // *YSTM'96: «Молодёжь и наука — третье тысячелетие».* Тр. междунар. конгр. Т. 2. — М.: НТА «АПФН», 1997. — (Сер. Профессионал). — С. 1-4.
- [294] Шамолин М. В. Математическое моделирование динамики пространственного маятника, обтекаемого средой // *Тр. VII Междунар. симп. «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»*(26—29 июня 1997 г.). — Феодосия; Херсон: Изд-во ХГТУ, 1997. — С. 153—154.
- [295] Шамолин М. В. Об интегрируемом случае в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // *Изв. РАН. МТТ.* — 1997. — № 2. — С. 65—68.
- [296] Шамолин М. В. Пространственная динамика твёрдого тела, взаимодействующего со средой. Сем. по мех. систем и пробл. управления движ. и навиг. // *Изв. РАН. МТТ.* — 1997. — № 4. — С. 174.
- [297] Шамолин М. В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // *Успехи мат. наук.* — 1997. — Т. 52, вып. 3. — С. 177—178.
- [298] Шамолин М. В. Частичная стабилизация вращательных движений тела в среде при свободном торможении // *Тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием «Проблемы небесной механики»* (Санкт-Петербург, 3—6 июня 1997 г.) / Под ред. А. Г. Сокольского, А. С. Баранова. — СПб.: Изд-во ИТА РАН, 1997. — С. 183—184.
- [299] Шамолин М. В. Абсолютная и относительная структурная устойчивость в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // *Тр. Междунар. конф. «Математика в индустрии» (ICIM-98, Таганрог, 29 июня — 3 июля 1998 г.).* — Таганрог: Изд-во ТГПИ, 1998. — С. 332—333.
- [300] Шамолин М. В. Качественные и численные методы в некоторых задачах пространственной динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой // *Тез. докл. 5 Междунар. совещ.-сем. «Инженерно-физические проблемы новой техники»* (Москва, 19—22 мая 1998). — М.: Изд-во МГТУ, 1998. — С. 154—155.

- [301] Шамолин М. В. Методы нелинейного анализа в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Междунар. конгр. «Нелинейный анализ и его приложения» (Москва, 1—5 сентября 1998 г.). — М., 1998. — С. 131.
- [302] Шамолин М. В. Некоторые задачи пространственной динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой в условиях квазистационарности // Тез. докл. Всерос. научн.-техн. конф. молодых учёных «Современные проблемы аэрокосмической науки» (г. Жуковский, 27—29 мая 1998 г.). — М.: Изд-во ЦАГИ, 1998. — С. 89—90.
- [303] Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, вып. 3. — С. 209—210.
- [304] Шамолин М. В. Семейства трёхмерных фазовых портретов в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // III Междунар. симп. по классической и небесной механике (Великие Луки, 23—27 августа 1998 г.). Тез. докл. — М.; Великие Луки: ВЦ РАН, 1998. — С. 165—167.
- [305] Шамолин М. В. Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. — 1998. — № 6. — С. 29—37.
- [306] Шамолин М. В. Методы нелинейного анализа в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой (Methods of nonlinear analysis in dynamics of a rigid interacting with a medium) // CD Proc. of the Cong. «Nonlinear Analysis and Its Applications», Moscow, Russia, September 1—5, 1998. — 1999. — P. 497—508.
- [307] Шамолин М. В. Некоторые классы частных решений в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. — 1999. — № 2. — С. 178—189.
- [308] Шамолин М. В. Нелинейные динамические эффекты при пространственном торможении тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. III Междунар. конф. «Чкаловские чтения. Инженерно-физические проблемы авиации и космической техники» (1—4 июня 1999 г.). — Егорьевск: ЕАТК ГА, 1999. — С. 257—258.
- [309] Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 1999. — Т. 364, № 5. — С. 627—629.
- [310] Шамолин М. В. О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, вып. 5. — С. 181—182.
- [311] Шамолин М. В. Семейства длиннопериодических траекторий в пространственной динамике твёрдого тела // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. (25—29 мая 1999 г.): Тез. докл. (System Modelling). — Киев, 1999. — С. 60.
- [312] Шамолин М. В. Задача о движении четырёхмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде и один случай интегрируемости // Book of Abstracts of the Third Int. Conf. «Differential Equations and Applications», Saint-Petersburg, Russia, June 12—17, 2000. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000. — С. 198.
- [313] Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби задачи о движении четырёхмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 21—26 августа 2000 г.). — Владимир: Владимирский гос. ун-т, 2000. — С. 196—197.

- [314] Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырёхмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Докл. РАН. — 2000. — Т. 375, № 3. — С. 343—346.
- [315] Шамолин М. В. Многомерные топографические системы Пуанкаре и трансцендентная интегрируемость // IV Сибирский конгр. по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 26 июня — 1 июля 2000 г.): Тез. докл. Ч. I. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. — С. 25—26.
- [316] Шамолин М. В. Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 2000. — Т. 371, № 4. — С. 480—483.
- [317] Шамолин М. В. О грубости диссипативных систем и относительной грубости систем с переменной диссипацией. Тез. докл. семинара по векторному и тензорному анализу им. П. К. Рашевского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2000. — № 2. — С. 63.
- [318] Шамолин М. В. О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек // Успехи мат. наук. — 2000. — Т. 55, вып. 3. — С. 187—188.
- [319] Шамолин М. В. Об одном случае интегрируемости по Якоби в динамике четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференциальным и интегральным уравнениям (Одесса, 12—14 сентября 2000 г.). — Одесса: АстроПринт, 2000. — С. 294—295.
- [320] Шамолин М. В. Сопоставление некоторых интегрируемых случаев из двумерной, трёхмерной и четырёхмерной динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. V Крымской междунар. мат. школы «Метод функции Ляпунова и его приложения» (МФЛ-2000) (Крым, Алушта, 5—13 сентября 2000 г.). — Симферополь, 2000. — С. 169.
- [321] Шамолин М. В. Задача диагностирования как главная задача общей задачи дифференциальной диагностики // Book of Abstracts of the Third Int. Conf. «Tools for Mathematical Modelling», Saint-Petersburg, Russia, 18—23 June, 2001. — Saint-Petersburg State Tech. Univ., 2001. — P. 121.
- [322] Шамолин М. В. Интегрируемость задачи о движении четырёхмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 309.
- [323] Шамолин М. В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 302—303.
- [324] Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике двумерного, трёхмерного и четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Анн. докл. VIII Всерос. съезда по теоретической и прикладной механике (Пермь, 23—29 августа 2001 г.). — Екатеринбург: УрО РАН, 2001. — С. 599—600.
- [325] Шамолин М. В. Новые интегрируемые случаи в динамике четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. (22—25 мая 2001 г.): Thes. of Conf. Rep. — Kyiv, 2001. — С. 344.

- [326] Шамолин М. В. Об устойчивости движения твёрдого тела в сопротивляющейся среде, закрученного вокруг своей продольной оси // Изв. РАН. МТТ. — 2001. — № 1. — С. 189—193.
- [327] Шамолин М. В. Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2001. — № 5. — С. 22—28.
- [328] Шамолин М. В. Случаи интегрируемости уравнений пространственной динамики твёрдого тела // Прикл. механика. — 2001. — Т. 37, № 6. — С. 74—82.
- [329] Шамолин М. В. Новые интегрируемые случаи в динамике двухмерного, трёхмерного и четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 1—6 июля 2002 г.). — Владимир: Владимирский гос. ун-т, 2002. — С. 142—144.
- [330] Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // Успехи мат. наук. — 2002. — Т. 57, вып. 1. — С. 169—170.
- [331] Шамолин М. В. Интегрируемость в трансцендентных функциях в динамике твёрдого тела // Тез. докл. научн. конф. «Ломоносовские чтения-2003». Секция механики. 17—27 апреля 2003 г., Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2003. — С. 130.
- [332] Шамолин М. В. Об интегрируемости неконсервативных динамических систем в трансцендентных функциях // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. (27—30 мая 2003 г.): Thes. of Conf. Rep. — Kyiv, 2003. — С. 377.
- [333] Шамолин М. В. Об одной пространственной задаче о движении твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. Междунар. научн. конф. по механике «Третьи Поляховские чтения». Санкт-Петербург, 4—6 февраля 2003 г. — СПб.: Изд-во НИИХ Санкт-Петербургского ун-та, 2003. — С. 170—171.
- [334] Шамолин М. В. Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой // Прикл. механика. — 2004. — Т. 40, № 4. — С. 137—144.
- [335] Шамолин М. В. Интегрируемость неконсервативных систем в трансцендентных элементарных функциях // Мат. конф. «X Міжд. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука» (13—15 тр. 2004, Киев). — Киев, 2004. — С. 279.
- [336] Шамолин М. В. Методы анализа классов неконсервативных систем в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой: Дис... докт. физ.-мат. наук. — М., МГУ, 2004.
- [337] Шамолин М. В. Методы анализа классов неконсервативных систем в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой: Автореферат дис... докт. физ.-мат. наук. — М., 2004.
- [338] Шамолин М. В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Экзамен, 2004.
- [339] Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры (Differential equations and computer algebra systems (DE & CAS'2005)): матер. Междунар. конф., Брест, 5—8 октября 2005 г. Ч. 1. — Минск: Изд-во БГПУ, 2005. — С. 231—233.

- [340] Шамолин М. В. Интегрируемость в трансцендентных функциях в динамике твёрдого тела // Мат. конф. «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования» (Воронеж, 12–17 декабря 2005 г.). — Воронеж: Воронежская гос. академия, 2005. — С. 240.
- [341] Шамолин М. В. О движении твёрдого тела в сопротивляющейся среде при учёте вращательных производных момента аэродинамических сил по угловой скорости // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. (23–25 мая 2005 г.): Thes. of Conf. Rep. — Kyiv, 2005. — С. 351.
- [342] Шамолин М. В. О движении тела в сопротивляющейся среде при учёте вращательных производных момента аэродинамических сил по угловой скорости // Тез. докл. научн. конф. «Ломоносовские чтения-2005». Секция механики. Апрель 2005 г., Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005. — С. 182.
- [343] Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае в динамике на $so(4) \times \mathbb{R}^4$ // Тез. докл. Всерос. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения» (СамДиф-2005), Самара, 27 июня—2 июля 2005 г. — Самара: Универс-групп, 2005. — С. 97–98.
- [344] Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbb{R}^n$ // Успехи мат. наук. — 2005. — Т. 60, вып. 6. — С. 233–234.
- [345] Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Междунар. конф. «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», по св. 100-летию С. М. Никольского (Москва, 23–29 мая 2005 г.). — М.: МИАН им. В. А. Стеклова, 2005. — С. 244.
- [346] Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, при учёте вращательных производных момента сил по угловой скорости // Докл. РАН. — 2005. — Т. 403, № 4. — С. 482–485.
- [347] Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании // Прикл. математика и механика. — 2005. — Т. 69, вып. 6. — С. 1003–1010.
- [348] Шамолин М. В. К задаче о пространственном торможении твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Изв. РАН. МТТ. — 2006. — № 3. — С. 45–57.
- [349] Шамолин М. В. К пространственной задаче взаимодействия твёрдого тела с сопротивляющейся средой // Анн. докл. IX Всерос. съезда по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 22–28 августа 2006 г.). Т. I. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та им. Н. И. Лобачевского, 2006. — С. 120.
- [350] Шамолин М. В. Модельная задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учётом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости: Научный отчёт Ин-та механики МГУ № 4818. — М., 2006.
- [351] Шамолин М. В. О случае полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Владимир, 10–15 июля 2006 г.). — Владимир: Владимирский гос. ун-т, 2006. — С. 226–228.

- [352] Шамолин М. В. О траекториях характерных точек твёрдого тела, движущегося в среде // Междунар. конф. «Пятое Окуневские чтения» (Санкт-Петербург, 26—30 июня 2006 г.): Тез. докл. — СПб.: Балтийский гос. техн. ун-т, 2006. — С. 34.
- [353] Шамолин М. В. Пространственная задача о движении твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. VIII Крымской междунар. мат. школы «Метод функции Ляпунова и его приложения» (Алушта, 10—17 сентября 2006 г.). Таврический нац. ун-т. — Симферополь: ДиАйПи, 2006. — С. 184.
- [354] Шамолин М. В. Системы с переменной диссипацией в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Четвёртые Поляховские чтения: Тез. докл. Междунар. научн. конф. по механике (Санкт-Петербург, 7—10 февраля 2006 г.). — СПб.: ВВМ, 2006. — С. 86.
- [355] Шамолин М. В. Влияние вращательных производных момента силы воздействия среды по угловой скорости твёрдого тела на его движение. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 44.
- [356] Шамолин М. В. Интегрируемость в элементарных функциях систем с переменной диссипацией. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 38.
- [357] Шамолин М. В. Интегрируемость задачи о движении четырёхмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 21.
- [358] Шамолин М. В. Интегрируемость сильно неконсервативных систем в трансцендентных элементарных функциях. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 40.
- [359] Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твёрдого тела. — М.: Экзамен, 2007.
- [360] Шамолин М. В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 17.
- [361] Шамолин М. В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — 2-е изд. — М.: Экзамен, 2007.
- [362] Шамолин М. В. Новые интегрируемые случаи в динамике четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 27.
- [363] Шамолин М. В. О движении твёрдого тела в сопротивляющейся среде при учёте вращательных производных момента аэродинамических сил по угловой скорости. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 44.

- [364] Шамолин М. В. О работе Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», Самара, 27 июня — 2 июля 2005 г. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 45.
- [365] Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 34.
- [366] Шамолин М. В. Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Int. Conf. (22–25 May 2007): Thes. of Conf. Rep. — Kyiv, 2007. — С. 249.
- [367] Шамолин М. В. Об интегрируемости движения четырёхмерного твёрдого тела-маятника, находящегося в потоке набегающей среды. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 37.
- [368] Шамолин М. В. Об устойчивости одного режима движения твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. научн. конф. «Ломоносовские чтения-2007». Секция механики. Апрель 2007 г., Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007. — С. 153.
- [369] Шамолин М. В. Об учёте вращательных производных момента аэродинамических сил на движение тела в сопротивляющейся среде. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 26.
- [370] Шамолин М. В. Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке среды при учёте вращательных производных момента силы её воздействия // Изв. РАН. МТТ. — 2007. — № 3. — С. 187–192.
- [371] Шамолин М. В. Случаи полной интегрируемости в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Всерос. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды» памяти Л. И. Седова в связи со 100-летием со дня рождения (Москва, 12–14 ноября 2007 г.). — М.: МИАН им. В. А. Стеклова, 2007. — С. 166–167.
- [372] Шамолин М. В. Случаи полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил // Тез. докл. Междунар. конф. «Анализ и особенности», посвящ. 70-летию В. И. Арнольда (Москва, 20–24 августа 2007 г.). — М.: МИАН им. В. А. Стеклова, 2007. — С. 110–112.
- [373] Шамолин М. В. Случаи полной интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем // Тез. докл. Междунар. конф. «Классические задачи динамики твёрдого тела» (09–13 июня 2007 г.). — Донецк: Ин-т прикл. мат. и механ. НАН Украины, 2007. — С. 81–82.
- [374] Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, вып. 5. — С. 169–170.
- [375] Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил // «Нелинейный динамический анализ-2007»: Тез. докл. междунар. конгр. (Санкт-Петербург, 4–8 июня 2007 г.). — СПб.: Санкт-Петербургский гос. ун-т, 2007. — С. 178.

- [376] Шамолин М. В. Трёхпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 2008. — Т. 418, № 1. — С. 46—51.
- [377] Шамолин М. В., Цыпцын С. В. Аналитическое и численное исследование траекторий движения тела в сопротивляющейся среде: Научный отчёт Ин-та механики МГУ № 4289. — М., 1993.
- [378] Шамолин М. В., Шебаршов Д. В. Проекция лагранжевых торов для бигармонического осциллятора на пространство положений и динамика твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Моделирование и исследование устойчивости систем (Modelling and Investigation of System Stability). Научн. конф. (19—23 мая 1997 г.). Тез. докл. (Mechanical Systems). — Киев, 1997. — С. 142.
- [379] Шамолин М. В., Шебаршов Д. В. Методы решения основной задачи дифференциальной диагностики. — М., 1999. — Деп. в ВИНТИ 12.05.99; № 1500-В99.
- [380] Шамолин М. В., Шебаршов Д. В. Некоторые вопросы геометрии в классической механике. — М., 1999. — Деп. в ВИНТИ 12.05.99; № 1499-В99.
- [381] Шамолин М. В., Шебаршов Д. В. Некоторые задачи дифференциальной диагностики // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. (25—29 мая 1999 г.). Тез. докл. (System Modelling). — Киев, 1999. — С. 61.
- [382] Шамолин М. В., Шебаршов Д. В. Некоторые задачи дифференциальной диагностики. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 305.
- [383] Шамолин М. В., Шебаршов Д. В. Некоторые задачи дифференциальной диагностики. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 2007. — С. 19.
- [384] Шорыгин О. П., Шульман Н. А. Вход диска в воду с углом атаки // Уч. записки ЦАГИ. — 1977. — Т. 8, № 1. — С. 12—21.
- [385] Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.
- [386] Якоби К. Лекции по динамике. — М.; Л.: ОНТИ, 1936.
- [387] Якобсон М. В. О гладких отображениях окружности в себя // Мат. сб. — 1975. — Вып. 85. — С. 183—188.
- [388] Airy H. The soaring of birds // Nature. — Vol. 28.
- [389] Blix M. Une nouvelle théorie sur le vol a viole des oiseaux // Revue generale sciences pures et appliquees. — 1890.
- [390] Ishlinsky A. Yu., Klimov D. M. Some aspects of the solution of the main problem of inertial navigation // J. Inst. Navig. — 1970. — Vol. 23, no. 4.
- [391] Liliental O. Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. — Berlin, 1889.
- [392] Marey E.-J. Le vol des oiseaux. Chap. XX. — Paris, 1890.
- [393] Mouillard L.-P. L'empire de l'air. — Paris, 1881.
- [394] Onniere B. Étude sur le vol plane // L'Aeronaute. — 1891.
- [395] Von Parseval A. Die Mechanik des Vogelflugs. — Wisbaden, 1889.
- [396] Peixoto M. On structural stability // Ann. Math. (2). — 1959. — Vol. 69. — P. 199—222.

- [397] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds // *Topology*. — 1962. — Vol. 1, no. 2. — P. 101–120.
- [398] Peixoto M. On an approximation theorem of Kupka and Smale // *J. Differ. Equ.* — 1966. — Vol. 3. — P. 214–227.
- [399] Peal S. E. Soaring of birds // *Nature*. — Vol. XXVIII.
- [400] Prandtl L., Betz A. *Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen*. — Berlin, 1932.
- [401] Rayleigh (Strutt J. W.). The soaring of birds // *Nature*. — Vol. XXVIII.
- [402] Shamolin M. V. Global qualitative analysis of the nonlinear systems on the problem of a body motion in a resisting medium // *Fourth Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations*, Bolyai Institute, August 18–21, 1993. — Szeged, Hungary, 1993. — P. 54.
- [403] Shamolin M. V. Relative structural stability on the problem of a body motion in a resisting medium // *ICM'94, Abstract of Short Communications*, Zurich, 3–11 August, 1994. — Zurich, Switzerland, 1994. — P. 207.
- [404] Shamolin M. V. New two-parameter families of the phase patterns on the problem of a body motion in a resisting medium // *ICIAM'95, Book of Abstracts*. Hamburg, 3–7 July, 1995. — Hamburg, Germany, 1995. — P. 436.
- [405] Shamolin M. V. Poisson-stable and dense orbits in rigid body dynamics // *3rd Experimental Chaos Conf., Advance Program*. Edinburgh, Scotland, August 21–23, 1995. — Edinburgh, Scotland, 1995. — P. 114.
- [406] Shamolin M. V. Qualitative methods to the dynamic model of an interaction of a rigid body with a resisting medium and new two-parametric families of the phase portraits // *DynDays'95 (Sixteenth Annual Informal Workshop), Program and Abstracts*. Lyon, June 28 – July 1, 1995. — Lyon, France, 1995. — P. 185.
- [407] Shamolin M. V. Structural optimization of the controlled rigid motion in a resisting medium // *WCSMO-1, Extended Abstracts. Posters*. Goslar, May 28 – June 2, 1995. — Goslar, Germany, 1995. — P. 18–19.
- [408] Shamolin M. V. Qualitative methods in interacting with the medium rigid body dynamics // *Abstracts of GAMM Wissenschaftliche Jahrestagung'96*, 27.–31. May, 1996, Prague, Czech Rep., Karls-Universität Prag. — P. 129–130.
- [409] Shamolin M. V. Qualitative methods in interacting with the medium rigid body dynamics // *Abstracts of XIXth ICTAM*, Kyoto, Japan, August 25–31, 1996. — Kyoto, Japan, 1996. — P. 285.
- [410] Shamolin M. V. Relative structural stability and relative structural instability of different degrees in topological dynamics // *Abstracts of Int. Topological Conf. Dedicated to P. S. Alexandroff's 100th Birthday «Topology and Applications»*, Moscow, May 27–31, 1996. — Moscow: Phasys, 1996. — P. 207–208.
- [411] Shamolin M. V. Topographical Poincaré systems in many dimensional spaces // *Fifth Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations*, Bolyai Institute, Regional Committee of the Hungarian Academy of Sciences, July 29 – August 2, 1996. — Szeged, Hungary, 1996. — P. 45.
- [412] Shamolin M. V. Classical problem of a three-dimensional motion of a pendulum in a jet flow // *3rd EUROMECH Solid Mechanics Conf., Book of Abstracts*, Stockholm, Sweden, August 18–22, 1997. — Stockholm, Sweden: Royal Inst. of Technology, 1997. — P. 204.

- [413] Shamolin M. V. Families of three-dimensional phase portraits in dynamics of a rigid body // EQUADIFF 9, Abstracts, Enlarged Abstracts, Brno, Czech Rep., August 25–29, 1997. — Brno, Czech Rep.: Masaryk Univ., 1997. — P. 76.
- [414] Shamolin M. V. Three-dimensional structural optimization of controlled rigid motion in a resisting medium // Proc. of WCSMO-2, Zakopane, Poland, May 26–30, 1997. — Zakopane, Poland, 1997. — P. 387–392.
- [415] Shamolin M. V. Three-dimensional structural optimization of controlled rigid motion in a resisting medium // WCSMO-2, Extended Abstracts, Zakopane, Poland, May 26–30, 1997. — Zakopane, Poland, 1997. — P. 276–277.
- [416] Shamolin M. V. Lyapunov functions method and many-dimensional topographical systems of Poincare in rigid body dynamics // Тез. докл. IV Крымской междунар. мат. школы «Метод функции Ляпунова и его приложения» (Крым, Алушта, 5–12 сентября 1998 г.). — Симферополь: Изд-во Симферопольского гос. ун-та, 1998. — С. 80.
- [417] Shamolin M. V. Many-dimensional topographical Poincare systems in rigid body dynamics // Abstracts of GAMM Wissenschaftliche Jahrestagung'98, 6.–9. April, 1998. — Bremen, Germany: Universität Bremen, 1998. — P. 128.
- [418] Shamolin M. V. New two-parametric families of the phase portraits in three-dimensional rigid body dynamics // Междунар. конф., посвящённая 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. Москва, 31 августа — 6 сентября 1998 г. Тез. докл. Дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — С. 97–99.
- [419] Shamolin M. V. Some classical problems in a three-dimensional dynamics of a rigid body interacting with a medium // Proc. of ICTACEM'98, Kharagpur, India, December 1–5, 1998. — Kharagpur, India: Aerospace Engineering Dep., Indian Inst. of Technology, 1998. — P. 11.
- [420] Shamolin M. V. Integrability in terms of transcendental functions in rigid body dynamics // Book of Abstracts of GAMM Annual Meeting, April 12–16, 1999, Metz, France. — Metz, France: Université de Metz, 1999. — P. 144.
- [421] Shamolin M. V. Long-periodic trajectories in rigid body dynamics // Sixth Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, Bolyai Institute, Regional Committee of the Hungarian Academy of Sciences, August 10–14, 1999. — Szeged, Hungary, 1999. — P. 47.
- [422] Shamolin M. V. Mathematical modelling in 3D dynamics of a rigid interacting with a medium // Book of Abstracts of the Second Int. Conf. «Tools for Mathematical Modelling», Saint-Petersburg, Russia, 14–19 June, 1999. — Saint-Petersburg: Saint-Petersburg State Tech. Univ., 1999. — P. 122–123.
- [423] Shamolin M. V. Methods of analysis of a deceleration of a rigid in 3D medium // Contributed Abstracts of 3rd ENOC, Copenhagen (Lyngby), Denmark, August 8–12, 1999. — Copenhagen: Tech. Univ. of Denmark, 1999.
- [424] Shamolin M. V. New families of the non-equivalent phase portraits in 3D rigid body dynamics // Abstracts of Second Congress ISAAC 1999, Fukuoka, Japan, August 16–21, 1999. — Fukuoka Ins. of Tech., 1999. — P. 205–206.
- [425] Shamolin M. V. Properties of integrability of systems in terms of transcendental functions // Final Progr. and Abstracts of Fifth SIAM Conf. on Appl. of Dynamic. Syst., May 23–27, 1999, Snowbird, Utah, USA. — SIAM, 1999. — P. 60.

- [426] Shamolin M. V. Some properties of transcendental integrable dynamical systems // Book of Abstracts of EQUADIFF 10, Berlin, August 1–7, 1999. — Berlin: Free Univ. of Berlin, 1999. — P. 286–287.
- [427] Shamolin M. V. Structural stability in 3D dynamics of a rigid body // WCSMO-3, Short Paper Proc., Buffalo, NY, May 17–21, 1999. Vol. 2. — Buffalo: State Univ. of NY at Buffalo, 1999. — P. 475–477.
- [428] Shamolin M. V. Structural stability in 3D dynamics of a rigid body // CD-Proc. of WCSMO-3, Buffalo, NY, May 17–21, 1999. — Buffalo, NY, 1999.
- [429] Shamolin M. V. About interaction of a rigid body with a resisting medium under an assumption of a jet flow // Book of Abstracts II (General sessions) of 4th EUROMECH Solid Mech. Conf., Metz, France (June 26–30, 2000). — Univ. of Metz, 2000. — P. 703.
- [430] Shamolin M. V. Integrability and non-integrability in terms of transcendental functions // CD-Abstracts of 3rd ECM (Poster sessions), Barcelona, Spain, June 10–14, 2000. — Poster no. 36.
- [431] Shamolin M. V. Mathematical modelling of interaction of a rigid body with a medium and new cases of integrability // Book of Abstracts of ECCOMAS 2000, Barcelona, Spain, 11–14 September. — Barcelona, 2000. — P. 495.
- [432] Shamolin M. V. Mathematical modelling of interaction of a rigid body with a medium and new cases of integrability // CD-Proc. of ECCOMAS 2000, Barcelona, Spain, 11–14 September. — Barcelona, 2000.
- [433] Shamolin M. V. Methods of analysis of dynamics of a rigid body interacting with a medium // Book of Abstracts of Annual Sci. Conf. GAMM 2000 at the Univ. of Göttingen, 2–7 April, 2000. — Univ. of Göttingen, 2000. — P. 144.
- [434] Shamolin M. V. New families of many-dimensional phase portraits in dynamics of a rigid body interacting with a medium // Book of Abstracts of 16th IMACS World Congress 2000, Lausanne, Switzerland, August 21–25, 2000. — EPFL, 2000. — P. 283.
- [435] Shamolin M. V. New families of many-dimensional phase portraits in dynamics of a rigid body interacting with a medium // CD-Proc. of 16th IMACS World Congress 2000, Lausanne, Switzerland, August 21–25. — EPFL, 2000.
- [436] Shamolin M. V. Comparison of some cases of integrability in dynamics of a rigid body interacting with a medium // Book of Abstracts of Annual Sci. Conf. GAMM 2001, ETH Zurich, 12–15 February, 2001. — Zurich: ETH, 2001. — P. 132.
- [437] Shamolin M. V. Pattern recognition in the model of the interaction of a rigid body with a resisting medium // Col. of Abstracts of First SIAM–EMS Conf. «Applied Mathematics in our Changing World», Berlin, Germany, September 2–6, 2001. — Springer; Birkhäuser, 2001. — P. 66.
- [438] Shamolin M. V. Dynamical systems with the variable dissipation in 3D dynamics of a rigid body interacting with a medium // Book of Abstracts of 4th ENOC, Moscow, Russia, August 19–23, 2002. — Moscow, Inst. Probl. Mech. Russ. Acad. Sci., 2002. — P. 109.
- [439] Shamolin M. V. Foundations in differential and topological diagnostics // Book of Abstracts of Annual Sci. Conf. GAMM 2002, Univ. of Augsburg, March 25–28, 2002. — Univ. of Augsburg, 2002. — P. 154.

- [440] Shamolin M. V. Methods of analysis of dynamics of a 2D- 3D-, or 4D-rigid body with a medium // Abstracts, Short Communications, Poster Sessions of ICM-2002, Beijing, August 20–28, 2002. — Beijing, China: Higher Education Press, 2002. — P. 268.
- [441] Shamolin M. V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 110, no. 2. — P. 2526–2555.
- [442] Shamolin M. V. Foundations of differential and topological diagnostics // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 114, no. 1. — P. 976–1024.
- [443] Shamolin M. V. Global structural stability in dynamics of a rigid body interacting with a medium // 5th ICIAM, Sydney, Australia, 7–11 July, 2003. — Sydney: Univ. of Technology, 2003. — P. 306.
- [444] Shamolin M. V. Integrability and nonintegrability in terms of transcendental functions // Book of Abstracts of Annual Sci. Conf. GAMM 2003, Abano Terme—Padua, Italy, 24–28 March, 2003. — Univ. of Padua, 2003. — P. 77.
- [445] Shamolin M. V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 114, no. 1. — P. 919–975.
- [446] Shamolin M. V. Some questions of differential and topological diagnostics // Book of Abstracts of 5th European Solid Mech. Conf. (ESMC-5), Thessaloniki, Greece, August 17–22, 2003. — Aristotle Univ. Thes. (AUT), European Mech. Sc. (EUROMECH), 2003. — P. 301.
- [447] Shamolin M. V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // J. Math. Sci. — 2004. — Vol. 122, no. 1. — P. 2841–2915.
- [448] Shamolin M. V. Some cases of integrability in dynamics of a rigid body interacting with a resisting medium // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 5–10 июля 2004 г.). — Владимир: Владимирский гос. ун-т, 2004. — С. 296–298.
- [449] Shamolin M. V. Mathematical model of interaction of a rigid body with a resisting medium in a jet flow // Abstracts. Pt. 1. 76 Annual Sci. Conf. (GAMM), Luxembourg, March 28 – April 1, 2005. — Univ. du Luxembourg, 2005. — P. 94–95.
- [450] Shamolin M. V. Some cases of integrability in 3D dynamics of a rigid body interacting with a medium // Book of Abstracts. IMA Int. Conf. «Recent Advances in Nonlinear Mechanics», Aberdeen, Scotland, August 30 – September 1, 2005. — Aberdeen, 2005. — P. 112.
- [451] Shamolin M. V. Structural stable vector fields in rigid body dynamics // Abstracts of 8th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2005), Lodz, Poland, December 12–15, 2005. — Tech. Univ. Lodz, 2005. — P. 78.
- [452] Shamolin M. V. Structural stable vector fields in rigid body dynamics // Proc. of 8th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2005), Lodz, Poland, December 12–15, 2005. Vol. 1. — Tech. Univ. Lodz, 2005. — P. 429–436.
- [453] Shamolin M. V. Almost conservative systems in dynamics of a rigid body // Book of Abstracts, 77th Annual Meeting of GAMM, March 27–31, 2006, Technische Univ. Berlin. — Technische Univ. Berlin, 2006. — P. 74.
- [454] Shamolin M. V. 4D rigid body and some cases of integrability // Abstracts of ICIAM07, Zurich, Switzerland, June 16–20, 2007. — Zurich: ETH, 2007. — P. 311.

- [455] Shamolin M. V. On the problem of a symmetric body motion in a resisting medium // Book of Abstracts of EMAC-2007 (1–4 July, 2007, Hobart, Australia). — Univ. Tasmania, Hobart, Australia, 2007. — P. 25.
- [456] Shamolin M. V. The cases of complete integrability in dynamics of a rigid body interacting with a medium // Book of Abstracts of Int. Conf. on the Occasion of the 150th Birthday of A. M. Lyapunov (June 24–30, 2007, Kharkiv, Ukraine). — Kharkiv: Verkin Inst. Low Temper. Physics Engineer. NASU, 2007. — P. 147–148.
- [457] Shamolin M. V. The cases of integrability in 2D-, 3D-, and 4D-rigid body // Abstracts of Short Communications and Posters of Int. Conf. «Dynamical Methods and Mathematical Modelling», Valladolid, Spain (September 18–22, 2007). — Valladolid: ETSII, 2007. — P. 31.
- [458] Shamolin M. V. The cases of integrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body interacting with a medium // Abstracts of 9th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2007), Lodz, Poland, December 17–20, 2007. — Tech. Univ. Lodz, 2007. — P. 115.
- [459] Shamolin M. V. The cases of integrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body interacting with a medium // Proc. of 9th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2007), Lodz, Poland, December 17–20, 2007. Vol. 1. — Tech. Univ. Lodz, 2005. — P. 415–422.
- [460] Shamolin M. V., Shebarshov D. V. Lagrange tori and the Hamilton–Jacobi equation // Book of Abstracts of Conf. «Partial Differential Equations: Theory and Numerical Solutions» (Praha, August 10–16, 1998). — Praha, Czech Rep.: Charles University, 1998. — P. 88.
- [461] Weyher C. L. Observations sur le vol plane par obres // L’Aeronaute. — 1890.

